

一类特殊向量集的偏序性质与最优性*

赵克全, 刘美含, 夏远梅

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:为研究一类具状态属性向量集的偏序性质和最优性,通过将大规模复杂电力系统抽象为具正常和故障状态属性的特殊向量集,考虑了一类加权和二元关系,证明了向量集中二元关系的一些偏序基本性质,进而获得了特殊向量集的一些最优性结果。针对一类具状态属性向量集,建立了其中二元关系的偏序性质、最优性等一系列定理。所得结果可对电力系统可靠性评估提供理论和方法支撑。

关键词:多目标优化问题;特殊向量集;偏序性质;最优性

中图分类号:O221.6

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2024)04-0035-07

多目标优化问题是最优化领域的一个重要分支,多目标优化理论与方法及应用研究已有大量成果^[1-5]。一般认为在 1896 年 Pareto 最早提出了多目标优化问题。由于多目标优化问题的各个目标间一般具有矛盾性,像空间中的任何 2 个点均可能不能比较大小,因此如何定义多目标优化问题的解概念是十分重要的问题。1906 年,意大利经济学家 Pareto 在经济福利理论的著作中首次引进了 Pareto 最优的思想,这种最优表达的是“找不到比之更好就是最好”的思想。为了给出这类“最优点”的数学定义,需要考虑目标空间中的“偏好”,有了“偏好”才能比较各个点的“好”和“坏”,而偏序关系作为一类非常重要的数学工具能够用于刻画目标空间中的“偏好”,进而为定义多目标优化问题的解概念,建立解的最优性提供重要支撑。

在大规模复杂电力系统中,电气元件一般情况下具有故障和正常 2 种属性,所有元件的正常或故障状态属性将构成具状态属性的特殊向量集合。因此,如何引入恰当的偏序,进而基于偏序刻画电力系统中不同状态向量之间状态属性的关系对电力系统可靠性评估方法等研究具有重要意义。程林等人^[6]利用 n 维向量介绍了含 n 个元件电力系统状态的数学表示并利用自然序介绍了单调结构系统。谭豫琳等人^[7]研究了绩效分配中寻找指标基础分数问题和电力生产发电机分配问题,并针对具范数结构多目标优化问题,基于标量化思想提出了近似方法以获得问题的 Pareto 解。注意到经典的自然序应用于大规模复杂电力系统状态属性关系研究无法体现电气元件的优先次序和重要性程度。最近,Kaddani 等人^[8]提出了基于加权和的部分偏好模型。岳立柱等人^[9]在偏序集理论基础上将权重拓展为偏序权重,解决了部分权重序列条件下评价函数的偏序表示问题。

受文献[6-9]研究工作的启发,本文考虑由电力系统状态空间抽象出来的一类特殊向量集,主要利用加权和和二元关系对一类具状态属性的特殊向量集,即包含 n 个元件电力系统所有状态构成集合的偏序性质和最优性进行研究,为电力系统可靠性评估提供理论与方法支撑。

1 预备知识

电气元件是构成电力系统的基本单位,主要包括发电机、变压器、输电线等单元。电气元件能按技术规定的参数完成规定功能的状态称为正常状态,元件故障是指元件执行其规定功能的终止。通常情况下元件正常,状态变量用“0”表示,元件故障,状态变量用“1”表示。

由 n 个电气元件组成的电力系统状态构成的集合称为电力系统状态空间,数学表达式为:

$$S = \{s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid s_i = 0 \text{ 或 } 1, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}\},$$

* 收稿日期:2024-06-20 网络出版时间:2024-10-11T09:24

资助项目:国家重点研发计划项目(No. 2023YFA1011302);国家自然科学基金面上项目(No. 12171063);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014);重庆英才计划“包干制”项目(No. cstc2022ycjh-bgzxm0114)

第一作者简介:赵克全,男,教授,博士生导师,E-mail:kequanz@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.n.20241010.1936.006

其中 $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$ 表示状态向量, n 表示状态变量个数, s_i 表示第 i ($i \in I$) 个状态变量。若 $s_i = 1$, 则表示第 i 个状态故障; 若 $s_i = 0$, 则表示第 i 个状态正常。

定义 1^[10] 设 R 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个二元关系, 即 R 是 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 的一个子集, 对任意的 $(x, y) \in R$, 有 xRy 。

定义 2^[10] 给定集合 $\mathbf{R}^n$ 的一个二元关系 R , 如果 R 满足以下 3 个条件, 则称 R 是 $\mathbf{R}^n$ 上的偏序关系:

- 1) 自反性: 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意元素 x , x 与自身满足该二元关系, 即 $x \leq x$;
- 2) 反对称性: 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意两个元素 x 和 y , 如果 $x \leq y$ 且 $y \leq x$, 则 $x = y$;
- 3) 传递性: 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意三个元素 x, y 和 z , 如果 $x \leq y$ 且 $y \leq z$, 则 $x \leq z$ 。

本文用 $\leq$ 表示上述偏序关系:

$$xRy \Leftrightarrow x \leq y。$$

定义 3^[10] 作为一个偏序, 如果 R 与空间的线性结构相容, 则称 R 是线性的, 即 $x \leq y$ 蕴涵 $x + z \leq y + z$, $tx \leq ty$, 对所有的 $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ 且 $t > 0$ 。

定义 4^[11] 设 K 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集, 若对任意的 $x \in K, \lambda \geq 0$, 均有 $\lambda x \in K$, 则称 K 为锥; 进一步, 若对任意的 $x, y \in K, \lambda \in [0, 1], (1-\lambda)x + \lambda y \in K$, 则称 K 为凸锥; 若对任意的 $x \in K, -x \in K$, 有 $x = 0$, 则 K 是点的。

引理 1^[10] 给定由 $x \leq y$ 定义的二元关系 $\leq$, 则 $\leq$ 是线性偏序当且仅当存在一个点凸锥 K 满足:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K。$$

进一步, 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$, 则称 $(A, \leq)$ 是偏序集。

定义 5^[12] 设 B 是 A 的非空子集。

1) 若 $a \in A$, 且对任意的 $b \in B$, 均有 $b \leq a$, 则称 a 为 B 的上界; 进一步, 若 $a \in B$ 满足对任意的 $b \in B$, 均有 $b \leq a$, 则称 a 为 B 的最大元;

2) 若 $a \in A$, 且对任意的 $b \in B$, 均有 $a \leq b$, 则称 a 为 B 的下界; 进一步, 若 $a \in B$ 满足对任意的 $b \in B$, 均有 $a \leq b$, 则称 a 为 B 的最小元。

定义 6^[12] 1) 设 B 是 A 的非空子集且有上界。若上界的集合作为 A 的子集有最小元, 则该最小上界称为 B 的上确界, 记为 $\sup B$ 或 $\vee B$;

3) 设 B 是 A 的非空子集且有下界。若下界的集合作为 A 的子集有最大元, 则该最大下界称为 B 的下确界, 记为 $\inf B$ 或 $\wedge B$ 。

定义 7^[12] 偏序集 $(A, \leq)$ 称为格, 若对任意 2 个元 $a, b \in A$, $\sup\{a, b\}$ 和 $\inf\{a, b\}$ 都存在。若对任意 $a, b \in A$, 在格 $(A, \leq)$ 上定义运算 $\vee$ 和 $\wedge$:

$$a \vee b = \sup\{a, b\}, a \wedge b = \inf\{a, b\},$$

则称 $(A; \vee, \wedge)$ 为由格 $(A, \leq)$ 所诱导的代数系统, $\vee$ 和 $\wedge$ 分别称为并运算和交运算。

定义 8^[12] 设偏序集 $(A, \leq)$ 是有界格且 $a \in A$ 。若存在 $b \in A$ 使得 $a \wedge b = \hat{0}, a \vee b = \hat{1}$, 其中 $\hat{0}$ 是 A 的最小元, $\hat{1}$ 是 A 的最大元, 则称 b 为 a 的补元, 这时 a 也是 b 的补元。

2 一类含权重信息二元关系的偏序性质

令 $w \in \mathbf{R}_{>}^n$ 且 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ 。考虑 $\mathbf{R}^n$ 中具权重信息的如下二元关系:

$$x \leq y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^t w_i x_i \leq \sum_{i=1}^t w_i y_i, \forall t = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 。基于二元关系 $\leq$ 给出 $<$ 和 $\leq$ 的定义为:

$$x < y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^t w_i x_i < \sum_{i=1}^t w_i y_i, \forall t = 1, 2, \dots, n,$$

$$x \leq y \Leftrightarrow x \leq y, x \neq y。$$

特别地,

$$x \leq \hat{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^t w_i x_i \leq 0, \forall t = 1, 2, \dots, n,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} < \mathbf{0} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^t w_i x_i < 0, \forall t=1,2,\dots,n, \\ \mathbf{x} \leq \mathbf{0} &\Leftrightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{0}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

将基于二元关系 $\leq$ 和 $<$ 构造的集合分别记为 K_n 和 K_n° ,即:

$$\begin{aligned} K_n &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \}, \\ K_n^\circ &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{0} < \mathbf{x} \}. \end{aligned}$$

定理 1 1) $\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in K_n$;

2) $\mathbf{x} < \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in K_n^\circ$;

3) $\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in K_n \setminus \{0\}$ 。

证明 设 $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, 则对任意的 $t=1,2,\dots,n$, $\sum_{i=1}^t w_i x_i \leq \sum_{i=1}^t w_i y_i$ 。故:

$$\sum_{i=1}^t w_i (y_i - x_i) \geq 0, \forall t=1,2,\dots,n。$$

又 $\mathbf{y} - \mathbf{x} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)^\top$ 。因此, $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in K_n$ 。上述过程的逆显然成立。故1)的结论得证。类似可证2)与3)的结论也成立。证毕

注意到,当 $n=2$ 时,有:

$$K_2 = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbf{R}^2 \mid w_1 x_1 \geq 0, w_1 x_1 + w_2 x_2 \geq 0 \}。$$

显然, K_2 是一个点闭凸锥。事实上,对任意的正整数 n , K_n 均是点闭凸锥。

定理 2 K_n 是一个点闭凸锥,其中 n 为正整数。

证明 1) 显然, $\mathbf{0} \in K_n$ 。此外,对任意的 $\mathbf{x} \in K_n$,由“ $\leq$ ”和 K_n 的定义可知, $\sum_{i=1}^t w_i x_i \geq 0 (\forall t=1,2,\dots,n)$ 。从而对任意的 $\lambda \geq 0$, $\sum_{i=1}^t \lambda w_i x_i \geq 0 (\forall t=1,2,\dots,n)$ 。故 $\lambda \mathbf{x} \in K_n$ 。因此, K_n 是锥。

2) 对任意的 $\mathbf{x} \in K_n \cap (-K_n)$,则 $\mathbf{x} \in K_n$ 且 $-\mathbf{x} \in K_n$ 。故对任意的 $t \in \{1,2,\dots,n\}$,有:

$$\sum_{i=1}^t w_i x_i \geq 0, \sum_{i=1}^t -w_i x_i \geq 0。$$

因此由 $\mathbf{w} \in \mathbf{R}_+^n$ 可知, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。故 K_n 是点的。

3) 设 $\{\mathbf{x}^k\}$ 是 K_n 的任一收敛点列且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0$,则 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i^0$ 。从而对任意的 $t \in \{1,2,\dots,n\}$,有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t w_i x_i^k = \sum_{i=1}^t w_i x_i^0。$$

此外,由 $\{\mathbf{x}^k\} \subseteq K_n$ 可知,对任意的 k ,有:

$$\sum_{i=1}^t w_i x_i^k \geq 0, t=1,2,\dots,n。$$

故:

$$\sum_{i=1}^t w_i x_i^0 \geq 0, t=1,2,\dots,n,$$

即 $\mathbf{x}^0 \in K_n$ 。故 K_n 是闭的。

4) 设 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 是 K_n 中的任意2个点,则:

$$\sum_{i=1}^t w_i x_i^0 \geq 0, t=1,2,\dots,n, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^t w_i y_i^0 \geq 0, t=1,2,\dots,n, \quad (2)$$

此外,对任意的 $\lambda \in [0,1]$,有:

$$\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda) \mathbf{y} = (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2, \dots, \lambda x_n + (1-\lambda) y_n)^\top。$$

从而由式(1)和(2)可知:

$$\sum_{i=1}^t w_i (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) \geq 0, t=1, 2, \dots, n.$$

故 K_n 是凸的。

证毕

综上所述, K_n 是点闭凸锥。

推论 1 二元关系 $\leq$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性偏序。

证明 由定理 1(1)、定理 2 和引理 1 可知结论成立。

定理 3 K_n 的拓扑内部非空且 $\text{int } K_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{0} < x\}$ 。

证明 1) 先证 K_n 的拓扑内部非空。令 $x^0 = (1, 1, \dots, 1)^T$, x^0 的邻域是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集, 即 $O(x^0, \frac{1}{2})$ 为 x^0 的开邻域。下面可以验证 x^0 是 K_n 的拓扑内点, 即需要验证 $O(x^0, \frac{1}{2}) \subseteq K_n$ 。事实上, 设 x 是 $O(x^0, \frac{1}{2})$ 中的任意一点, 则:

$$\|x - x^0\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - 1|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}.$$

从而 $\frac{1}{2} < x_i < \frac{3}{2}$ 。因此, 有:

$$\sum_{i=1}^t w_i x_i > \sum_{i=1}^t \frac{1}{2} w_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t w_i > 0, t=1, 2, \dots, n,$$

即 $x \in K_n$ 。因此, $O(x^0, \frac{1}{2}) \subseteq K_n$, 这意味着 x^0 是 K_n 的拓扑内点。故 K_n 的拓扑内部非空。

2) 下证 $\text{int } K_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{0} < x\}$ 。设 $x^0 \in \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{0} < x\}$, 则:

$$\sum_{i=1}^t w_i x_i^0 > 0, t=1, 2, \dots, n.$$

令:

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{1 \leq t \leq n} \sum_{i=1}^t w_i x_i^0,$$

则:

$$0 < \delta < \sum_{i=1}^t w_i x_i^0, t=1, 2, \dots, n.$$

设 x 是 $O(x^0, \delta)$ 中的任意一点, 则 $x_i^0 - \delta < x_i < x_i^0 + \delta$ 。因此, 由 $\sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \in (0, 1) (i=1, 2, \dots, n)$ 得:

$$\sum_{i=1}^t w_i x_i > \sum_{i=1}^t w_i (x_i^0 - \delta) = \sum_{i=1}^t w_i x_i^0 - \sum_{i=1}^t w_i \delta \geq \sum_{i=1}^t w_i x_i^0 - \delta > 0, t=1, 2, \dots, n,$$

即 $x \in K_n$ 。因此, $O(x^0, \delta) \subseteq K_n$, 这意味着 $x^0 \in \text{int } K_n$ 。故 $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{0} < x\} \subseteq \text{int } K_n$ 。接下来只需证: 若 $x^0 \in K_n$ 但 $x^0 \notin \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{0} < x\}$, 则 $x^0 \notin \text{int } K_n$ 。事实上, 由 $x^0 \in K_n$ 和 $x^0 \notin \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{0} < x\}$ 可知, $\sum_{i=1}^t w_i x_i^0 \geq 0 (t=1, 2, \dots, n)$ 且存在 k 使得 $\sum_{i=1}^k w_i x_i^0 = 0$ 。对任意的 $\delta > 0$, 取:

$$x^\delta = \left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 - \frac{\delta}{2}, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0\right)^T.$$

显然, $x^\delta \in O(x^0, \delta)$, 但由 $\sum_{i=1}^k w_i x_i^\delta = \sum_{i=1}^k w_i x_i^0 - w_k \frac{\delta}{2} = -w_k \frac{\delta}{2} < 0$ 可知, $x^\delta \notin K_n$ 。故对任意的 $\delta > 0$, 均有 $O(x^0, \delta) \not\subseteq K_n$, 即 $x^0 \notin \text{int } K_n$ 。故:

$$\text{int } K_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{0} < x\}.$$

证毕

注 1 由定理 3 可知, $\text{int } K_n = K_n^\circ$, 则 $x < y$ 可进一步等价描述为 $y - x \in \text{int } K_n$ 。

3 一类特殊向量集的最优性

在向量集 S 中定义偏序 $\leq$, 即 $(S, \leq)$ 是一个偏序集, 则 $(S, \leq)$ 有如下结论。

定理4 偏序集 $(S, \leq)$ 的任一非空子集均有上界和下界。

证明 显然, $\hat{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in S$ 和 $\hat{0} = (0, 0, \dots, 0)^T \in S$ 分别是 S 任意子集的上界和下界。证毕

定理5 设 $w_1 = w_2 = \dots = w_n$, $s^{(j)} = (s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, \dots, s_n^{(j)})^T \in S (j \in \{1, 2, \dots, k\})$, 则对任意的 $t \in \{2, 3, \dots, n\}$,

$$n \left(\max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^t w_i s_i^{(j)} - \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^{t-1} w_i s_i^{(j)} \right) \in \{0, 1\}, \quad (3)$$

$$n \left(\min_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^t w_i s_i^{(j)} - \min_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^{t-1} w_i s_i^{(j)} \right) \in \{0, 1\}. \quad (4)$$

证明 以式(3)为例进行证明, 式(4)类似可证。

由 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ 和 $w_1 = w_2 = \dots = w_n$ 可知, $w_1 = w_2 = \dots = w_n = \frac{1}{n}$ 。又 $s_i^{(j)} \in \{0, 1\} (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, k\})$, 故只需证:

$$0 \leq \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^t s_i^{(j)} - \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^{t-1} s_i^{(j)} \leq 1. \quad (5)$$

事实上, 由 $s_i^{(j)} \in \{0, 1\} (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, k\})$ 可得:

$$\sum_{i=1}^{t-1} s_i^{(j)} \leq \sum_{i=1}^t s_i^{(j)} \leq \sum_{i=1}^{t-1} s_i^{(j)} + 1, j = 1, 2, \dots, k.$$

故:

$$\max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^{t-1} s_i^{(j)} \leq \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^t s_i^{(j)} \leq \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^{t-1} s_i^{(j)} + 1,$$

即式(5)成立。

证毕

定理6 若 $w_1 = w_2 = \dots = w_n$, 则偏序集 $(S, \leq)$ 的任一非空子集均有上确界和下确界。

证明 设 $\bar{S} = \{s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(k)}\}$ 是 S 的任一非空子集, 其中 $s^{(j)} = (s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, \dots, s_n^{(j)})^T (j \in \{1, 2, \dots, k\})$ 。

先证 $\bar{S}$ 有上确界。令:

$$\bar{S}^\vee = \left\{ s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T \in S \mid \sum_{i=1}^t w_i s_i \geq \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^t w_i s_i^{(j)}, t \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}, \quad (6)$$

则 $\bar{S}^\vee$ 是 $\bar{S}$ 的所有上界的集合。取 $s^{\max} = \{s_i^{\max}\}$, 其中 $s_1^{\max} = \max_{1 \leq j \leq k} s_1^{(j)}$ 且对任意的 $t \in \{2, 3, \dots, n\}$, 有:

$$s_t^{\max} = n \left(\max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^t w_i s_i^{(j)} - \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^{t-1} w_i s_i^{(j)} \right),$$

则对任意的 $s \in \bar{S}^\vee$ 和任意的 $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有:

$$\sum_{i=1}^t w_i s_i^{\max} = \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^t w_i s_i^{(j)} \leq \sum_{i=1}^t w_i s_i,$$

即对任意的 $s \in \bar{S}^\vee$, $s^{\max} \leq s$ 。此外, 由定理5可知, $s^{\max} \in S$ 。又由式(6)可知, $s^{\max} \in \bar{S}^\vee$ 。故 $s^{\max}$ 是 $\bar{S}^\vee$ 的最小元。故 $\sup \bar{S}$ 存在。

类似可证 $\bar{S}$ 有下确界。事实上, 令:

$$\bar{S}^\wedge = \left\{ s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T \in S \mid \sum_{i=1}^t w_i s_i \leq \min_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^t w_i s_i^{(j)}, t = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad (7)$$

则 $\bar{S}^\wedge$ 是 $\bar{S}$ 的所有下界的集合。取 $s^{\min} = \{s_i^{\min}\}$, 其中 $s_1^{\min} = \min_{1 \leq j \leq k} s_1^{(j)}$ 且对任意的 $t \in \{2, 3, \dots, n\}$, 有:

$$s_t^{\min} = n \left(\min_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^t w_i s_i^{(j)} - \min_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^{t-1} w_i s_i^{(j)} \right),$$

则对任意的 $s \in \bar{S}^\wedge$ 和任意的 $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有:

$$\sum_{i=1}^t w_i s_i^{\min} = \min_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^t w_i s_i^{(j)} \geq \sum_{i=1}^t w_i s_i,$$

即对任意的 $s \in \bar{S}^\wedge$, 有 $s \leq s^{\min}$ 。此外, 由定理5可知, $s^{\min} \in S$ 。又由式(7)可知, $s^{\min} \in \bar{S}^\wedge$ 。故 $s^{\min}$ 是 $\bar{S}^\wedge$ 的最大

元。故 $\inf \bar{S}$ 存在。因此,由 $\bar{S}$ 的任意性可知,偏序集 $(S, \leq)$ 的任一子集均有上确界和下确界。

证毕

注 2 去掉定理 6 中的条件 $w_1 = w_2 = \cdots = w_n$, 结论不一定成立。

例 1 下面从 $w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_n$ 和 $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$ 这 2 个情形举例说明。

1) 当 $n=3$ 时, 即 $S \subseteq \mathbf{R}^3, w_1 = w_2 = 0.3, w_3 = 0.4$, 则 $(S, \leq)$ 的子集不一定有上确界或下确界。事实上, 令 $\bar{S} = \{(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$, 则 $\bar{S}^\vee = \{(1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 1, 1)^T\}$ 是 $\bar{S}$ 的所有上界的集合, 但 $\bar{S}^\vee$ 没有最小元, 故 $\sup \bar{S}$ 不存在;

2) 当 $n=4$ 时, 即 $S \subseteq \mathbf{R}^4, w_1 = \frac{8}{23}, w_2 = \frac{7}{23}, w_3 = w_4 = \frac{4}{23}$, 则 $(S, \leq)$ 的子集有上确界。事实上, 令 $\bar{S} = \{(1, 0, 1, 0)^T, (0, 1, 1, 1)^T\}$, 则 $\bar{S}^\vee = \{(1, 1, 1, 0)^T, (1, 1, 1, 1)^T, (1, 0, 1, 1)^T, (1, 1, 1, 1)^T\}$ 是 $\bar{S}$ 的所有上界的集合, 但 $\bar{S}^\vee$ 没有最小元, 故 $\sup \bar{S}$ 不存在。

注 3 在定理 6 的假设条件下, $(S, \leq)$ 的某个非空子集 $\bar{S}$ 的上确界和下确界也不一定属于 $\bar{S}$, 即 $\bar{S}$ 不一定有最大元和最小元。

例 2 当 $n=3$ 时, 即 $S \subseteq \mathbf{R}^3$, 考虑 $(S, \leq)$ 的子集 $\bar{S} = \{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T\}$ 。故 $\bar{S}^\vee = \{(1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 1, 1)^T\}$ 是 $\bar{S}$ 的所有上界的集合, $\bar{S}^\wedge = \{(0, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$ 是 $\bar{S}$ 的所有下界的集合, 其中 $\sup \bar{S} = (1, 0, 1)^T \notin \bar{S}, \inf \bar{S} = (0, 1, 0)^T \notin \bar{S}$ 。

推论 2 若 $w_1 = w_2 = \cdots = w_n$, 则偏序集 $(S, \leq)$ 是格。

证明 由定理 6 可知 $(S, \leq)$ 的任意 2 个元所构成的子集均有上确界和下确界。故由定义 7 可知, 偏序集 $(S, \leq)$ 是格。

证毕

定理 7 偏序集 $(S, \leq)$ 有最大元和最小元。进一步, 若 $w_1 = w_2 = \cdots = w_n$, 则 S 是有界格。

证明 显然, $\hat{\mathbf{1}} = (1, 1, \cdots, 1)^T \in S$ 和 $\hat{\mathbf{0}} = (0, 0, \cdots, 0)^T \in S$ 分别是 S 的最大元和最小元。又 $w_1 = w_2 = \cdots = w_n$, 故通过推论 2 可知 S 是有界格。

证毕

4 结论

本文利用一类加权和二元关系对一类特殊向量集的偏序性质和最优性进行了研究, 所得到的研究结果可对电力系统状态空间的结构性质、状态之间的属性关系以及系统可靠性评估研究提供理论与方法支撑。如何基于偏序性质研究具状态属性向量集的最优性条件和最优状态的高效算法将是很有意义的课题。

参考文献:

- [1] SAMANLIOGLU F. A multi-objective mathematical model for the industrial hazardous waste location-routing problem[J]. European Journal of Operational Research, 2013, 226(2): 332-340.
- [2] MORADIJOZ M, PARSA MOGHADDAM M, HAGHIFAM M R, et al. A multi-objective optimization problem for allocating parking lots in a distribution network[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2013, 46: 115-122.
- [3] MARCENARO-GUTIERREZ O D, LUQUE M, RUIZ F. An application of multiobjective programming to the study of workers' satisfaction in the Spanish labour market[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 203(2): 430-443.
- [4] LI D, LI K. A multi-objective model for cold chain logistics considering customer satisfaction[J]. Alexandria Engineering Journal, 2023, 67: 513-523.
- [5] 赵克全, 杨新民, 夏远梅. 多目标优化问题的完全标量化[J]. 中国科学: 数学, 2021, 51(2): 411-424.
ZHAO K Q, YANG X M, XIA Y M. Complete scalarization of multi-objective optimization problems[J]. Science China Mathematics, 2021, 51(2): 411-424.
- [6] 程林, 何剑. 电力系统可靠性原理和应用[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2015.
CHENG L, HE J. Principles and applications of power system reliability[M]. 2nd edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2015.
- [7] 谭琳, 杨春蓉, 赵克全. 具有范数结构多目标优化问题的近似方法及应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2023, 40(2): 28-33.
TAN Y L, YANG C R, ZHAO K Q. An approximate method for multi-objective optimization problems with norm structure and its application[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2023, 40(2): 28-33.

- [8] KADDANI S, VANDERPOOTENET D, VANPEPERSTRAETE J-M, et al. Weighted sum model with partial preference information; Application to multi-objective optimization[J]. European Journal of Operational Research, 2017, 260(2): 665-679.
- [9] 岳立柱, 陆畅, 张志杰. 综合评价模型的偏序集表示[J]. 运筹与管理, 2022, 31(5): 101-106.
YUE L Z, LU C, ZHANG Z J. The partial order set representation of the comprehensive evaluation model[J]. Operations Research and Management Science, 2022, 31(5): 101-106.
- [10] CHINCHULUUN A, PARDALOS P M, MIGDALAS A, et al. Pareto optimality, game theory and equilibria[M]. New York: Springer Science & Business Media, 2008.
- [11] BOYD S, VANDENBERGHE L. Convex optimization[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [12] 马占新. 偏序集与数据包络分析[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
MA Z X. Partial ordered set and data envelopment analysis[M]. Beijing: Science Press, 2013.

Partial Order Properties and Optimality of a Special Class of Vector Sets

ZHAO Kequan, LIU Meihan, XIA Yuanmei

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The partial order property and optimality of a class of vector sets with state attributes are studied. By abstracting large-scale complex power systems into special vector sets with normal and fault state attributes, a class of weighted sum binary relations is considered. Some partial order basic properties of binary relations in vector sets are proved, and some optimality results of special vector sets are obtained. For a class of vector sets with state attributes, a series of theorems such as partial order properties and optimality of binary relations are established. The results can provide theoretical and methodological support for power system reliability assessment.

Keywords: multi-objective optimization problem; special vector set; properties of partial order; optimality

特约稿作者介绍



赵克全, 博士, 教授, 博士生导师, 数学科学学院院长, 国家重点研发计划项目首席科学家, 重庆市英才计划创新领军人才, 重庆市学术技术带头人, 重庆市高校创新研究群体负责人, 重庆市最优化与复杂系统重点实验室主任。兼任中国运筹学会理事, 中国系统工程学会理事, 中国运筹学会数学与智能分会副理事长, 中国运筹学会数学规划分会常务理事, 中国运筹学会科普工作委员会副主任, 重庆市运筹学会秘书长, 重庆市数理类专业教学指导委员会秘书长。主要从事多目标优化理论与方法及其应用研究, 主持国家重点研发计划项目 1 项, 国家自然科学基金项目 4 项, 重庆市高校创新研究群体项目 1 项, 重庆市自然科学基金重点项目 1 项, 企业横向项目 2 项, 在国内外重要学术期刊发表研究论文 60 余篇, 指导研究相关学科竞赛获全国一等奖 12 项、二等奖 21 项, 重庆市特等奖 2 项, 4 次被评为全国优秀指导教师, 11 次被评为重庆市优秀指导教师。



1954-2024
重庆师范大学 70 周年校庆
弦歌七秩 桃李芬芳

(责任编辑 陈 乔)