

不确定多目标优化问题的一类鲁棒标量化方法^{*}

张 静, 邓 杲, 赵克全

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:对不确定多目标优化问题的(近似)鲁棒弱有效解和(近似)鲁棒有效解的性质进行研究。通过对带松弛和剩余变量的鲁棒标量化问题(近似)最优解的研究,建立了(近似)鲁棒弱有效解和(近似)鲁棒有效解的一些充分条件和必要条件。将确定性多目标优化问题提出的带松弛和剩余变量标量化模型推广到鲁棒情形,提出了一类新的鲁棒标量化问题。所得结果是对最近一些研究工作的改进与推广。

关键词:鲁棒多目标优化问题;鲁棒标量化问题;(近似)鲁棒弱有效解;(近似)鲁棒有效解

中图分类号:O221.6

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2024)05-0001-06

众所周知,多目标优化理论与方法在现实生活中有着广泛应用,如工程设计、交通运输、经济管理等领域。特别是多目标优化问题的各种解在解决这些实际问题中起着十分关键的作用,从而引起了诸多学者对多目标优化问题的解、近似解及各种标量化方法等方面的深入关注和大量研究,并取得了丰富的研究成果^[1-9]。

许多实际问题可能具有一定的不确定因素,优化问题逐渐延伸出鲁棒优化问题,因此,鲁棒优化问题的各种鲁棒解的定义及性质等也得到了深入的研究和发展。1998年, Ben-tal 等人^[10]考虑了鲁棒单目标模型,并研究了该模型为凸规划时的一些性质。2012年, Kuroiwa 等人^[11]考虑了不确定多目标优化问题,并对 Beck 等人^[12]所提出的不确定单目标优化问题的鲁棒对应得到不确定多目标优化问题的鲁棒优化问题,定义了相应的鲁棒有效解、弱鲁棒有效解、真鲁棒有效解,并研究了真鲁棒有效解和弱鲁棒有效解的标量化方法,得到了弱鲁棒有效解和真鲁棒有效解的最优性必要条件。2015年, Zamani 等人^[13]将线性多目标优化问题的鲁棒有效解的概念推广到了非线性情形,并在光滑意义下给出了鲁棒性的一些必要和充分条件。2016年, Chuong^[14]利用鲁棒有效解建立了局部鲁棒(弱)有效解的充分和必要最优性条件。

受文献[10-15]等研究工作的启发,本文主要将文献[15]中带松弛和剩余变量的标量化问题的相关结果推广到鲁棒多目标情形,利用带松弛和剩余变量的标量化方法建立了(近似)鲁棒弱有效解和(近似)鲁棒有效解的充分条件和必要条件。

1 预备知识

在 p -维欧氏空间 $\mathbf{R}^p$ 中,对任意给定向量 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_p), \mathbf{y}=(y_1, y_2, \dots, y_p)$, 定义序关系:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} < \mathbf{y} &\Leftrightarrow x_i < y_i, \forall i=1, 2, \dots, p; \\ \mathbf{x} \leq \mathbf{y} &\Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i=1, 2, \dots, p; \\ \mathbf{x} \leq \mathbf{y} &\Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i=1, 2, \dots, p.\end{aligned}$$

且至少有一个 i 使得 $x_i < y_i$ 。

本文考虑不确定多目标优化问题为:

$$\begin{aligned}(\text{MOP}) \quad &\min (f_1(\mathbf{x}, u_1), f_2(\mathbf{x}, u_2), \dots, f_p(\mathbf{x}, u_p)), \\ \text{s. t.} \quad &\mathbf{x} \in X_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^p \mid g_j(\mathbf{x}, v_j) \leq 0, j=1, 2, \dots, l\},\end{aligned}$$

^{*} 收稿日期:2023-12-04 修回日期:2024-04-23 网络出版时间:2024-06-07T10:12

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11991024, No. 12171063);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014);重庆市自然科学基金项目(No. cstc2022ycjh-bgzxm0114)

第一作者简介:张静,女,研究方向为多目标优化理论与方法, E-mail:1483650957@qq.com;通信作者:赵克全,教授,博士生导师, E-mail:kequanz@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20240607.0906.002

其中: $f_i: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m_i} \rightarrow \mathbf{R} (i=1, 2, \dots, p)$ 与 $g_j: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m_j} \rightarrow \mathbf{R} (j=1, 2, \dots, l)$ 均为连续函数, $u_i \in U_i \subseteq \mathbf{R}^{m_i}, v_j \in V_j \subseteq \mathbf{R}^{m_j}$ 为不确定参数且 U_i 和 V_j 均为凸紧集。

考虑(MOP)的鲁棒多目标优化问题:

$$\begin{aligned} (\text{RMOP}) \quad & \min (\max_{u_1 \in U_1} f_1(\mathbf{x}, u_1), \max_{u_2 \in U_2} f_2(\mathbf{x}, u_2), \dots, \max_{u_p \in U_p} f_p(\mathbf{x}, u_p)), \\ & \text{s. t } \mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^p \mid \max_{v_j \in V_j} g_j(\mathbf{x}, v_j) \leq 0, j=1, 2, \dots, l\}. \end{aligned}$$

根据不确定多目标优化问题(MOP)的鲁棒多目标优化问题(RMOP), 给出(MOP)的鲁棒弱有效解、鲁棒有效解、 ε -鲁棒弱有效解和 ε -鲁棒有效解定义。

定义 1^[12] 1) 称(RMOP)的可行解 $\mathbf{x} \in X$ 为(MOP)鲁棒可行解。

2) 称 $\hat{\mathbf{x}}$ 为(MOP)的鲁棒弱有效解, 如果 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 为(RMOP)的弱有效解。

3) 称 $\hat{\mathbf{x}}$ 为(MOP)的鲁棒有效解, 如果 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 为(RMOP)的有效解。

4) 称 $\hat{\mathbf{x}}$ 为(MOP)的 ε -鲁棒弱有效解, 如果 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 为(RMOP)的 ε -弱有效解。

5) 称 $\hat{\mathbf{x}}$ 为(MOP)的 ε -鲁棒有效解, 如果 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 为(RMOP)的 ε -有效解。

本文提出如下鲁棒标量化问题并讨论(近似)弱鲁棒有效解和(近似)鲁棒有效解的标量化性质。

$$\begin{aligned} (\text{RSOP}) \quad & \min \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\mathbf{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i s_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i s_i^+, \\ & \text{s. t. } \max_{u_i \in U_i} f_i(\mathbf{x}, u_i) - s_i^- + s_i^+ \leq \alpha_i, i=1, 2, \dots, p, \\ & \mathbf{x} \in X, s_i^- \geq 0, s_i^+ \geq 0, \end{aligned}$$

其中: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \geq 0, \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \geq 0, \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \geq 0$ 且 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbf{R}^p$ 是给定的上限。

注 1 如果 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)给定的可行解, 则对任意的 $k \geq 0$ 和对任意的 $i=1, 2, \dots, p$ 有:

$$\max_{u_i \in U_i} f_i(\mathbf{x}, u_i) - (s_i^- + k_i) + (s_i^+ + k_i) = \max_{u_i \in U_i} f_i(\mathbf{x}, u_i) - s_i^- + s_i^+ \leq \alpha_i.$$

故 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{s}^+ + k, \hat{s}^- + k)$ 也是(RSOP)的可行解, 此时(RSOP)的目标函数值:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\mathbf{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i (s_i^- + k_i) - \sum_{i=1}^p \gamma_i (s_i^+ + k_i) = \\ & \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\mathbf{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i s_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i s_i^+ + \sum_{i=1}^p (\mu_i - \gamma_i) k_i. \end{aligned}$$

这说明该目标函数值十分依赖于 $k \geq 0$ 的取值, 根据 $k \geq 0$ 的任意性, 若 $\mu < \gamma$, 则(RSOP)的目标函数值是无下界的, 即目标函数不存在最小值。因此, 本文假设 $\mu \geq \gamma$ 。

2 鲁棒多目标优化问题的标量化结果

定理 1 假设 $\hat{\mathbf{x}} \in X, \hat{s}^+ \geq 0, \hat{s}^- \geq 0, \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \gamma \geq 0$ 和 $\alpha \in \mathbf{R}^p$, 有以下结论:

1) 当 $\lambda \geq 0$ 时, 若 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的最优解, 则 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解;

2) 当 $\lambda > 0$ 时, 若 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的最优解, 则 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒有效解;

3) 若 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的唯一最优解, 则 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒有效解。

证明 1) 用反证法。假设 $\hat{\mathbf{x}}$ 不是(MOP)的鲁棒弱有效解, 则存在 $\tilde{\mathbf{x}} \in X$ 使得对任意的 $i=1, 2, \dots, p$, 有 $\max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{\mathbf{x}}, u_i) < \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{\mathbf{x}}, u_i)$ 。又因为 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的可行解, 则对任意的 $i=1, 2, \dots, p$ 有:

$$\max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{\mathbf{x}}, u_i) - \hat{s}_i^- + \hat{s}_i^+ < \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{\mathbf{x}}, u_i) - \hat{s}_i^- + \hat{s}_i^+ \leq \alpha_i,$$

因此, $(\tilde{\mathbf{x}}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的可行解。此外, 再利用 $\lambda \geq 0$ 可得:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{\mathbf{x}}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+ < \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{\mathbf{x}}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+,$$

这与 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 为(RSOP)的最优解矛盾。因此 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解。

2) 用反证法。假设 $\hat{\mathbf{x}}$ 不是(MOP)的鲁棒有效解, 则存在 $\tilde{\mathbf{x}} \in X$ 使得对任意的 $i=1, 2, \dots, p$ 有 $\max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{\mathbf{x}}, u_i) \leq$

$\max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i)$, 且至少存在一个 $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ 使得 $\max_{u_j \in U_j} f_j(\tilde{x}, u_j) \leq \max_{u_j \in U_j} f_j(\hat{x}, u_j)$ 成立。又因为 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的可行解, 则对任意的 $i=1, 2, \dots, p$ 有:

$$\max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) - \hat{s}_i^- + \hat{s}_i^+ \leq \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) - \hat{s}_i^- + \hat{s}_i^+ \leq \alpha_i,$$

因此, $(\tilde{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的可行解。

此外, 因为 $\lambda > 0$, 则 $\sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) < \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i)$, 从而可得:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+ < \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+,$$

这与 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 为(RSOP)的最优解矛盾。因此 $\hat{x}$ 是(MOP)的鲁棒有效解。

3) 类似 2) 的证明过程。假设 $\hat{x}$ 不是(MOP)的鲁棒有效解, 则存在 $\tilde{x} \in X$ 使得 $(\tilde{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的可行解, 且由 $\lambda \geq 0$ 可得:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+ \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+,$$

这与 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 为(RSOP)的唯一最优解矛盾。因此 $\hat{x}$ 是(MOP)的鲁棒有效解。证毕

定理 2 假设 $\hat{x} \in X$ 。若 $\hat{x}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解, 则存在 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \gamma \geq 0, \alpha \in \mathbf{R}^p$ 和 $\hat{s}^+ \geq 0, \hat{s}^- \geq 0$ 使得 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的最优解。

证明 令 $\gamma = 0, \hat{s}^+ = 0, \hat{s}^- = 0$ 和 $\alpha_i = \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i), \forall i=1, 2, \dots, p$ 。显然, $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 为(RSOP)的可行解。

下证 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的最优解, 用反证法。假设 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 不是(RSOP)的最优解, 则存在(RSOP)的可行解 $(\tilde{x}, \tilde{s}^+, \tilde{s}^-)$ 使得 $\tilde{x}$ 不是(MOP)的鲁棒弱有效解且对任意的 $i=1, 2, \dots, p$ 满足:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \tilde{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \tilde{s}_i^+ < \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+.$$

再结合 $\mu \geq 0$ 和 $\tilde{s}^- \geq 0$ 可得:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) < \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i). \quad (1)$$

另一方面, $\hat{x}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解且 $\tilde{x}$ 不是(MOP)的鲁棒弱有效解, 故根据鲁棒弱有效解的定义可得, 存在非空数集 $I_0 \subseteq \{1, 2, \dots, p\}$ 使得:

$$\max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) \geq \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i), \quad \forall i \in I_0,$$

$$\max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) < \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus I_0.$$

因为 $\lambda \geq 0$, 故可令当 $i \in I_0$ 时, $\lambda_i = 1$; 当 $i \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus I_0$ 时, $\lambda_i = 0$, 因此:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i),$$

这与式(1)矛盾。因此 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的最优解。证毕

定理 3 假设 $\hat{x} \in X$ 。若 $\hat{x}$ 是(MOP)的鲁棒有效解, 则存在 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \gamma \geq 0, \alpha \in \mathbf{R}^p$ 和 $\hat{s}^+ \geq 0, \hat{s}^- \geq 0$ 使得 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的最优解。

证明 类似定理 2 的证明过程, 可得该定理成立。证毕

定理 4 假设 $\hat{x} \in X, \varepsilon \geq 0, \hat{s}^+ \geq 0, \hat{s}^- \geq 0, \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \gamma \geq 0$ 和 $\alpha \in \mathbf{R}^p$ 。有以下结论:

1) 当 $\lambda + \gamma \geq 0, 0 \leq \sigma \leq \sum_{i=1}^p (\lambda_i + \gamma_i) \varepsilon_i$ 时, 若 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的 σ -最优解, 则 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε -鲁棒弱有效解;

2) 当 $\lambda + \gamma > 0, 0 \leq \sigma \leq \sum_{i=1}^p (\lambda_i + \gamma_i) \varepsilon_i$ 时, 若 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的 σ -最优解, 则 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε -鲁棒有效解;

3) 当 $\lambda + \gamma \geq 0, 0 \leq \sigma \leq \sum_{i=1}^p (\lambda_i + \gamma_i) \varepsilon_i$ 时, 若 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的唯一 σ -最优解, 则 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε -

鲁棒有效解。

证明 1) 用反证法。假设 $\hat{x}$ 不是(MOP)的 ϵ -鲁棒弱有效解, 则存在 $\tilde{x} \in X$ 使得对任意的 $i=1, 2, \dots, p$ 有 $\max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) < \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) - \epsilon_i$, 则存在 $y = (y_1, y_2, \dots, y_p) > 0$ 使得任意的 $i=1, 2, \dots, p$ 有:

$$\max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) \leq \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) - y_i - \epsilon_i.$$

令 $\tilde{s}^+ = \hat{s}^+ + y + \epsilon$, 显然 $\tilde{s}^+ \geq 0$ 。又因为 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的可行解, 则对任意的 $i=1, 2, \dots, p$ 有:

$$\begin{aligned} \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) - \hat{s}_i^- + \tilde{s}_i^+ &\leq \\ \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) - y_i - \epsilon_i - \hat{s}_i^- + \hat{s}_i^+ + y_i + \epsilon_i &= \\ \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) - \hat{s}_i^- + \hat{s}_i^+ &\leq \alpha_i, \end{aligned}$$

因此, $(\tilde{x}, \tilde{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的可行解。由 $\lambda + \gamma \geq 0$ 和 $y > 0$ 知 $\sum_{i=1}^p (\lambda_i + \gamma_i) y_i > 0$, 从而可得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \tilde{s}_i^+ &\leq \sum_{i=1}^p \lambda_i (\max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) - y_i - \epsilon_i) + \\ \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i (\hat{s}_i^+ + y_i + \epsilon_i) &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+ - \sum_{i=1}^p (\lambda_i + \gamma_i) \epsilon_i - \\ \sum_{i=1}^p (\lambda_i + \gamma_i) y_i &< \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+ - \sigma, \end{aligned}$$

这与 $(\tilde{x}, \tilde{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的 σ -最优解矛盾。因此 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ϵ -鲁棒弱有效解。

2) 用反证法。假设 $\hat{x}$ 不是(MOP)的 ϵ -鲁棒有效解, 则存在 $\tilde{x} \in X$ 使得对任意的 $i=1, 2, \dots, p$ 有 $\max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) \leq \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) - \epsilon_i$, 且存在 $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ 使得 $\max_{u_j \in U_j} f_j(\tilde{x}, u_j) < \max_{u_j \in U_j} f_j(\hat{x}, u_j) - \epsilon_j$ 成立。则存在 $y_j > 0$ 使得 $\max_{u_j \in U_j} f_j(\tilde{x}, u_j) < \max_{u_j \in U_j} f_j(\hat{x}, u_j) - y_j - \epsilon_j$ 。对任意 $i \neq j$ 时, 令 $y_i = 0$, 因此:

$$\max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) \leq \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) - y_i - \epsilon_i, \quad \forall i=1, 2, \dots, p.$$

令 $\tilde{s}^+ = \hat{s}^+ + y + \epsilon$, 显然 $\tilde{s}^+ \geq 0$ 。又 $\lambda + \gamma > 0$, 因此 $\sum_{i=1}^p (\lambda_i + \gamma_i) y_i > 0$ 。类似式(1)的证明过程, 可得 $(\tilde{x}, \tilde{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的可行解, 且:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \tilde{s}_i^+ < \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+ - \sigma,$$

这与 $(\tilde{x}, \tilde{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的 σ -最优解矛盾。因此 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ϵ -鲁棒有效解。

3) 假设 $\hat{x}$ 不是(MOP)的 ϵ -鲁棒有效解, 类似 2) 的证明过程, 采用同样的方法取 $\tilde{x} \in X$, y 和 $\tilde{s}^+ = \hat{s}^+ + y + \epsilon$ 。

则由 $\lambda + \gamma \geq 0$ 可得 $\sum_{i=1}^p (\lambda_i + \gamma_i) y_i \geq 0$ 。因此 $(\tilde{x}, \tilde{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的可行解, 且:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \tilde{s}_i^+ \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+ - \sigma,$$

这与 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 为(RSOP)的唯一 σ -最优解矛盾。因此 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ϵ -鲁棒有效解。证毕

定理 5 假设 $\hat{x} \in X, \epsilon \geq 0$ 。若 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ϵ -鲁棒弱有效解, 则存在 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \gamma \geq 0, \alpha \in \mathbf{R}^p$ 和 $\hat{s}^+ \geq 0, \hat{s}^- \geq 0$ 使得 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的 σ -最优解, 其中 $\sigma = \sum_{i=1}^p \lambda_i \epsilon_i$ 。

证明 令 $\gamma = 0, \hat{s}^+ = 0, \hat{s}^- = 0$ 和 $\alpha_i = \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i), \forall i=1, 2, \dots, p$ 。显然, $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的可行解。下证 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的 σ -最优解。假设 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 不是(RSOP)的 σ -最优解, 则存在(RSOP)的可行解 $(\tilde{x}, \tilde{s}^+, \hat{s}^-)$ 使得 $\tilde{x}$ 不是(MOP)的 ϵ -鲁棒弱有效解且对任意的 $i=1, 2, \dots, p$ 满足:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \tilde{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \tilde{s}_i^+ + \sigma < \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+.$$

再结合 $\mu \geq 0$ 和 $\hat{s}^- \geq 0$ 可得:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i (\max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) + \varepsilon_i) < \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i). \quad (2)$$

另一方面, $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε -鲁棒弱有效解且 $\tilde{x}$ 不是(MOP)的 ε -鲁棒弱有效解,故根据 ε -鲁棒弱有效解的定义可得,存在非空数集 $I_0 \subseteq \{1, 2, \dots, p\}$ 使得:

$$\begin{aligned} \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) &\geq \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) - \varepsilon_i, \quad \forall i \in I_0, \\ \max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) &< \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i) - \varepsilon_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus I_0. \end{aligned}$$

因为 $\lambda \geq 0$, 故当 $i \in I_0$ 时, $\lambda_i = 1$; 当 $i \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus I_0$ 时, $\lambda_i = 0$, 因此:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i (\max_{u_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, u_i) + \varepsilon_i) \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(\hat{x}, u_i),$$

这与式(2)矛盾。因此 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的 σ -最优解。

证毕

定理 6 假设 $\hat{x} \in X, \varepsilon \geq 0$ 。若 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε -鲁棒有效解, 则存在 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \gamma \geq 0, \alpha \in \mathbf{R}^p$ 和 $\hat{s}^+ \geq 0, \hat{s}^- \geq 0$

使得 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(RSOP)的 σ -最优解, 其中 $\sigma = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varepsilon_i$ 。

证明 类似定理 5 的证明过程, 可得该定理成立。

证毕

3 结语

本文研究了不确定多目标优化问题和对应的鲁棒标量化问题, 讨论了带松弛和剩余变量的鲁棒标量化问题的(近似)最优解和不确定多目标优化问题的(近似)鲁棒有效解与(近似)鲁棒弱有效解之间的关系, 建立了(近似)鲁棒弱有效解和(近似)鲁棒有效解的一些充分条件和必要条件。这对于进一步讨论鲁棒真有效解有着非常重要的意义。

参考文献:

- [1] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [2] YANG X M, YANG X Q, CHEN G Y. Theorems of the alternative and optimization with set-valued maps[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 107(3): 627-640.
- [3] YANG X M, LI D, WANG S Y. Near-subconvexlikeness in vector optimization with set-valued functions[J]. Journal of Optimization Theory & Applications, 2001, 110(2): 413-427.
- [4] ZHAO K Q, CHEN G Y, PENG J W. Weak E -optimal solution in vector optimization[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17(4): 1287-1302.
- [5] ZHAO K Q, YANG X M. E -Benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, 2015, 64(4): 739-752.
- [6] 赵克全. 向量优化问题解的性质研究[D]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2013.
- ZHAO K Q. Study on characterizations of solutions in vector optimization problems[D]. Hohhot: Inner Mongolia University, 2013.
- [7] 夏远梅, 赵克全. 向量优化中 ε -真有效解的非线性标量化性质[J]. 运筹学学报, 2014, 18(4): 58-64.
- XIA Y M, ZHAO K Q. Nonlinear scalarization characterizations for ε -properly efficient solutions in vector optimization[J]. Operations Research Transactions, 2014, 18(4): 58-64.
- [8] ZHAO K Q, CHEN G Y, YANG X M. Approximate proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, 2015, 64(8): 1777-1793.
- [9] 赵克全, 杨新民, 夏远梅. 多目标优化问题的完全标量化[J]. 中国科学: 数学, 2021, 51(2): 411-424.
- ZHAO K Q, YANG X M, XIA Y M. Complete scalarization of multi-objective optimization problems[J]. Scientia Sinica Mathematica, 2021, 51(2): 411-424.
- [10] BEN-TAL A, NEMIROVSKI A. Robust convex optimization[J]. Mathematics of Operations Research, 1998, 23(4): 769-805.
- [11] KUROIWA D, LEE G M. On robust multiobjective optimization[J]. Vietnam Journal of Mathematics, 2012, 40(2/3): 305-317.
- [12] BECK A, BEN-TAL. Duality in robust optimization: primal worst equals dual best[J]. Operations Research Letters, 2008, 37(1): 1-6.

- [13] ZAMANI M, SOLEIMANI-DAMANEH M, KABGANI A. Robustness in nonsmooth nonlinear multiobjective programming [J]. European Journal of Operational Research, 2015, 247(2): 370-378.
- [14] CHUONG T D. Optimality and duality for robust multiobjective optimization problems [J]. Nonlinear Analysis, 2016, 134: 127-143.
- [15] RASTEGAR N, KHORRAM E. A combined scalarizing method for multiobjective programming problems [J]. European Journal of Operational Research, 2014, 236(1): 229-237.

Operations Research and Cybernetics

A Class of Robust Scalarization Methods for Uncertain Multi-Objective Optimization Problems

ZHANG Jing, DENG Rui, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The properties of the (approximate) robust weak effective solutions and the (approximate) robust effective solutions of the uncertain multi-objective optimization problem are studied. Through the study of the (approximate) optimal solution of the robust scalarization problem with relaxation and residual variables, some sufficient conditions and necessary conditions for the (approximate) robust weak effective solution and the (approximate) robust effective solution are established. The scalarization model with relaxation and residual variables proposed by the deterministic multi-objective optimization problem is extended to the robust case, and a new class of robust scalarization problems is proposed. The results obtained are the improvement and promotion of some recent research work.

Keywords: robust multi-objective optimization problem; robust scalarization problem; (approximate) robust weak effective solutions; (approximate) robust effective solutions

(责任编辑 陈 乔)