

求解双层弹性膜单侧接触问题的交替方向乘子法^{*}

袁星月¹, 崔席勇², 张守贵¹

(1. 重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331; 2. 中冶赛迪信息技术(重庆)有限公司, 重庆 401120)

摘要:针对一类双层弹性膜单侧接触问题,提出了基于自适应罚参数的交替方向乘子法。利用辅助变量构造增广 Lagrange 函数,通过引入鞍点问题处理不等式约束。用交替方向乘子法对该问题进行数值求解,每次迭代包括 2 个线性椭圆问题,显式求解辅助变量和 Lagrange 乘子。基于迭代函数的自适应法则自动调整罚参数,展示了算法收敛性和自适应罚参数近似方法。最后用有限元离散化数值结果验证了算法的有效性。

关键词:单侧接触;弹性膜;有限元;交替方向乘子法;自适应罚参数

中图分类号:O241.82

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2024)05-0087-08

双层弹性膜接触问题主要是求解 2 个弹性膜接触时的平衡位置,在力学上有广泛应用。2 个膜接触时满足弹性体的基本法则,膜之间可以相互接触但不能相互渗透,且由牛顿第三定律,其中一个膜对另一个膜的作用力相等^[1-3]。该问题通常由偏微分等式和不等式组成,因此需要求解的模型是一个非线性问题,无法通过直接计算得到解析解,只能利用合适的数值计算方法得到近似解。通过变分理论,将非线性模型转化为变分问题,由 Lax-Milgram 定理和 Sobolev 空间理论讨论问题解的适定性^[4-6]。基于变分不等式理论,可以通过有限元方法^[1-3]等问题进行离散,得到双层弹性膜的近似解。

本文利用有限元方法对双层弹性膜单侧接触问题进行离散,并基于交替方向乘子法^[6-11]提出自适应交替方向乘子法^[9-11],该算法通过迭代函数自动选取合适的罚参数^[12-14],明显提升了算法效率。此外,还给出了算法收敛性证明结果,且通过数值算例将该算法与交替方向乘子法和半光滑牛顿算法^[15]进行对比。

1 模型介绍及等价变分形式

考虑如下双层弹性膜问题^[1-3]:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 - \lambda = f_1, & \text{在 } \Omega \text{ 上} \\ -\Delta u_2 + \lambda = f_2, & \text{在 } \Omega \text{ 上} \\ u_1 - u_2 \geq 0, \lambda \geq 0, (u_1 - u_2)\lambda = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 上} \\ u_1 = g, u_2 = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\Omega \in \mathbf{R}^2$ 是一个有界、连通的开集;边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的;未知量 u_1 和 u_2 表示 2 个弹性膜在垂直方向上的位移; λ 为 Lagrange 乘子,表示第 2 个膜在第 1 个膜上的作用力; f_1 和 f_2 为外部作用力。模型(1)中的边界条件表示第 1 个膜在距离边界为 g 时固定,第 2 个膜在边界处固定。

首先,给出函数空间:

$$H_g^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = g, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}\}.$$

再令 $V = H_g^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $s \geq 0$,定义凸集:

$$H_+^s(\partial\Omega) = \{v \in H^s(\partial\Omega); v \geq 0 \text{ a. e. ,在 } \partial\Omega \text{ 上}\},$$

^{*} 收稿日期:2023-11-15 修回日期:2024-04-01 网络出版时间:2024-08-28T10:01

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11971085);重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2020jcyj-msxmX0066);重庆市研究生教育教学改革研究项目(No. yjg213071);中冶集团“181 计划”研发项目(No. 90310365)

第一作者简介:袁星月,女,研究方向为微分方程数值解法,E-mail:2505944022@qq.com;通信作者:张守贵,男,教授,E-mail:shgzhang@cqnu.edu.cn

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20240827.1230.004

$$K = \{v = (v_1, v_2) \in V; v_1 - v_2 \geq 0, \text{在 } \Omega \text{ 上}\}, \Lambda = \{\chi \in L^2(\Omega); \chi \geq 0 \text{ a. e. 在 } \Omega \text{ 上}\}.$$

引理 1^[1] 对给定的 $(f_1, f_2) \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}_+(\partial\Omega)$, 对任意 $(v_1, v_2) \in H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$, 任意 $\chi \in \Lambda$ 有:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\text{grad } u_i) \cdot (\text{grad } v_i)(x) dx = \sum_{i=1}^2 (f_i, v_i) + \int_{\Omega} \lambda(x) \cdot (v_1 - v_2)(x) dx \\ \int_{\Omega} (\chi - \lambda)(x)(u_1 - u_2)(x) dx \geq 0 \end{cases}, \quad (2)$$

其中内积 $(f_i, v_i) = \int_{\Omega} f_i(x) v_i(x) dx$, 式(2)与问题(1)等价。

引理 2^[1] 对于任意 $(f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}_+(\partial\Omega)$, $(v_1, v_2) \in H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$, 问题(2)存在唯一解 $(u_1, u_2, \lambda) \in H^1_g(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \times \Lambda$ 。

根据引理 1、引理 2 以及文献[1]可知双层弹性膜单侧接触问题解的存在性、唯一性。

注意到问题(1)中的 $u_1 - u_2 \geq 0, \lambda \geq 0, (u_1 - u_2)\lambda = 0$ 可以写成 $\lambda = \max(0, \lambda - \delta(u_1 - u_2))$, 其中 $\delta > 0$, 根据 Green 公式及文献[3]可知双层弹性膜问题(1)与如下变分等式问题等价。

求唯一解 $u^* \in K$, 使得:

$$\begin{cases} a(u_1^*, v_1) - (\lambda^*, v_1) = l^1(v_1), \forall v_1 \in H^1_0(\Omega) \\ a(u_2^*, v_2) + (\lambda^*, v_2) = l^2(v_2), \forall v_2 \in H^1_0(\Omega) \\ \lambda^* = \max(0, \lambda^* - \delta(u_1^* - u_2^*)) \end{cases}, \quad (3)$$

其中: $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, $l^i(v_i) = (f_i, v_i)$, $i = 1, 2$, $a(u_i, v_i) = \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx$ 是对称双线性形式, 在 $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ 上满足^[1]: 存在只依赖区域 Ω 的常数 $\alpha > 0$, 使得对任意 $v \in H^1_0(\Omega)$ 有:

$$\alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(v, v). \quad (4)$$

2 增广 Lagrange 乘子法

根据文献[6-8], 在区域 Ω 上引入辅助变量 φ , 导出如下 Lagrange 函数 $L: (K \times L^2(\Omega)) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$:

$$L(v, \varphi, \mu) = E(v_1) + E(v_2) - (\mu, v_1 - v_2 - \varphi), \quad (5)$$

及对应的增广 Lagrange 函数 $L_{\rho}: (K \times L^2(\Omega)) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$:

$$L_{\rho}(v, \varphi, \mu) = E(v_1) + E(v_2) - (\mu, v_1 - v_2 - \varphi) + \frac{\rho}{2} \|v_1 - v_2 - \varphi\|^2, \quad (6)$$

其中: $\rho > 0$ 为罚参数, $E(v_i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_i|^2 dx dy - \int_{\Omega} f_i v_i dx dy$, $v = (v_1, v_2)$ 。考虑 Lagrange 函数式(5)对应的极大极小值问题即鞍点问题:

$$\max_{\mu} \min_{(v, \varphi)} L(v, \varphi, \mu) = \min_{(v, \varphi)} \max_{\mu} L(v, \varphi, \mu), \forall (v, \varphi, \mu) \in K \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad (7)$$

和增广 Lagrange 函数式(6)对应的鞍点问题:

$$\max_{\mu} \min_{(v, \varphi)} L_{\rho}(v, \varphi, \mu) = \min_{(v, \varphi)} \max_{\mu} L_{\rho}(v, \varphi, \mu), \forall (v, \varphi, \mu) \in K \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad (8)$$

若 (u, φ, λ) 是 L_{ρ} 的一个鞍点, 则由式(5)、(7)可得:

$$(\lambda, u_1 - u_2 - \varphi) \leq (\mu, u_1 - u_2 - \varphi).$$

又由 μ 的任意性, 可得:

$$u_1 - u_2 = \varphi. \quad (9)$$

引理 3^[6] 若 $(u, \varphi, \lambda) \in K \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 是鞍点问题(7)的解, 则对任意 $\rho > 0$, (u, φ, λ) 也是鞍点问题(8)的解, 反之亦成立, 且 u 是变分等式问题(3)的解。

根据引理 3 以及文献[7-8]中的交替方向乘子法, 通过计算问题(8)表示的极值问题来依次计算 φ^{k+1}, u^{k+1} , 更新 Lagrange 乘子 λ^{k+1} , 给定初始函数值 $(u^0, \lambda^0) \in K \times L^2(\Omega)$, 罚参数 $\rho > 0$, 置 $k = 0$; 求解辅助变量 $\varphi^{k+1} \in L^2(\Omega)$, 使得对任意的 φ 有:

$$L_{\rho}(\mathbf{u}^k, \phi^{k+1}, \lambda^k) \leq L_{\rho}(\mathbf{u}^k, \varphi, \lambda^k). \quad (10)$$

求解未知函数 $\mathbf{u}^{k+1} \in K$, 使得对任意的 $\mathbf{v} \in K$ 有:

$$L_{\rho}(\mathbf{u}^{k+1}, \phi^{k+1}, \lambda^k) \leq L_{\rho}(\mathbf{v}, \phi^{k+1}, \lambda^k). \quad (11)$$

更新 Lagrange 乘子 $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho(\phi^{k+1} - (u_1^{k+1} - u_2^{k+1}))$ 。

由于在 Ω 上有约束条件 $u_1 - u_2 \geq 0$ 且 u_1, u_2 满足式(9), 则求解问题(10)等价于求解如下约束极小值问题:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} L_{\rho}(\mathbf{u}^k, \phi^{k+1}, \lambda^k) - \gamma^k = 0, \quad (12)$$

$$(\gamma^k, \phi^{k+1}) = 0, \quad (13)$$

其中: $\gamma^k > 0$, 为 ϕ^{k+1} 的 Lagrange 乘子, 根据式(12)得:

$$\phi^{k+1} = \frac{1}{\rho}(\gamma^k - \lambda^k + \rho(u_1^k - u_2^k)), \quad (14)$$

结合式(13)且 $\gamma^k > 0$ 可得:

$$\gamma^k = (\lambda^k - \rho(u_1^k - u_2^k))^+, \quad (15)$$

其中: $v^+ = \max(0, v)$, 将式(15)代入式(14)得到 $\phi^{k+1} = \frac{1}{\rho}((\lambda^k - \rho(u_1^k - u_2^k))^+ - \lambda^k) + u_1^k - u_2^k$ 。

根据式(11)对任意 $v_i \in H_0^1(\Omega)$ 有 $\frac{\partial}{\partial v_i} L_{\rho}(\mathbf{u}^{k+1}, \phi^{k+1}, \lambda^k) \cdot v_i = 0$, 结合原问题可知此式等价于以下变分问题:

$$a(u_1^{k+1}, v_1) + \rho(u_1^{k+1} - u_2^{k+1}, v_1) = l^1(v_1) + (\rho\phi^{k+1} + \lambda^k, v_1),$$

$$a(u_2^{k+1}, v_2) - \rho(u_1^{k+1} - u_2^{k+1}, v_2) = l^2(v_2) - (\rho\phi^{k+1} + \lambda^k, v_2),$$

取 $v_1 = v_2 = v$, 两式相减得 $a(u_1^{k+1} - u_2^{k+1}, v) = l^1(v) - l^2(v) + 2(\lambda^k - \rho(u_1^{k+1} - u_2^{k+1} - \phi^{k+1}), v)$ 。

根据以上分析, 得到求解双层弹性膜问题的交替方向乘子法(alternating direction method of multipliers, ADMM)如下。

算法 1(ADMM) 步骤 1, 给定初始函数值 $(\mathbf{u}^0, \lambda^0) \in K \times L^2(\Omega)$, 取罚参数 $\rho > 0$, 置 $k = 0$;

步骤 2, 计算辅助变量 $\phi^{k+1} \in L^2(\Omega)$:

$$\phi^{k+1} = \frac{1}{\rho}((\lambda^k - \rho(u_1^k - u_2^k))^+ - \lambda^k) + u_1^k - u_2^k;$$

步骤 3, 求解未知函数 $\mathbf{u}^{k+1} = (u_1^{k+1}, u_2^{k+1})$:

$$a(u_1^{k+1}, v_1) + \rho(u_1^{k+1} - u_2^{k+1}, v_1) = l^1(v_1) + (\rho\phi^{k+1} + \lambda^k, v_1),$$

$$a(u_2^{k+1}, v_2) - \rho(u_1^{k+1} - u_2^{k+1}, v_2) = l^2(v_2) - (\rho\phi^{k+1} + \lambda^k, v_2);$$

步骤 4, 更新 Lagrange 乘子 $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho(\phi^{k+1} - (u_1^{k+1} - u_2^{k+1}))$;

步骤 5, 给定迭代终止条件, 满足则结束迭代返回结果 $(\mathbf{u}^{k+1}, \phi^{k+1}, \lambda^{k+1})$, 否则令 $k = k + 1$, 回到步骤 2。

3 自适应交替方向乘子法

为了克服固定罚参数影响交替方向乘子法的收敛速度, 采用基于迭代函数选取自适应的可变罚参数, 以变参数序列 $\{\rho_k\}$ 代替固定参数 ρ , 得到如下自适应交替方向乘子法(self-adaptive alternating direction method of multipliers, SADMM)^[9-14]。

算法 2(SADMM) 步骤 1, 给定初始函数值 $(\mathbf{u}^0, \lambda^0) \in K \times L^2(\Omega)$, 取罚参数 $\rho_k > 0$, 置 $k = 0$;

步骤 2, 计算辅助变量 $\phi^{k+1} \in L^2(\Omega)$:

$$\phi^{k+1} = \frac{1}{\rho_k}((\lambda^k - \rho_k(u_1^k - u_2^k))^+ - \lambda^k) + u_1^k - u_2^k; \quad (16)$$

步骤 3, 求解未知函数 $\mathbf{u}^{k+1}$:

$$a(u_1^{k+1}, v_1) + \rho_k(u_1^{k+1} - u_2^{k+1}, v_1) = l^1(v_1) + (\rho_k\phi^{k+1} + \lambda^k, v_1), \quad (17)$$

$$a(u_2^{k+1}, v_2) - \rho_k(u_1^{k+1} - u_2^{k+1}, v_2) = l^2(v_2) - (\rho_k\phi^{k+1} + \lambda^k, v_2); \quad (18)$$

步骤 4, 更新 Lagrange 乘子:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho_k (\psi^{k+1} - (u_1^{k+1} - u_2^{k+1})); \quad (19)$$

步骤 5, 选取罚参数:

$$(1+s_k)\rho_k \geq \rho_{k+1} \geq \frac{\rho_k}{1+s_k}; \quad (20)$$

步骤 6, 给定误差限 $\varepsilon > 0$, 若满足条件:

$$\frac{\|u_1^{k+1} - u_1^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_2^{k+1} - u_2^k\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_1^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_2^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \varepsilon^2,$$

则得到迭代解 $(u^{k+1}, \psi^{k+1}, \lambda^{k+1})$ 。

引理 4^[10] 若序列 $\{s_k\}$ 满足 $s_k \geq 0$, 并且 $\sum_{k=0}^{+\infty} s_k < +\infty$, 则 $\prod_{k=0}^{+\infty} (1+s_k) < +\infty$ 。

由式(20)和引理 4 可知 ρ_k 是有界的, 并定义符号 $\rho_L = \inf\{\rho_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 。

定理 1 由 SADMM 产生的序列 (u^k, ψ^k, λ^k) 满足:

$$\begin{aligned} & 2\alpha\rho_k (\|\bar{u}_1^k\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\bar{u}_2^k\|_{H^1(\Omega)}^2) + \rho_k^2 \|u_1^k - u_2^k - \psi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & (1+s_k)^2 \|\rho_k (\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\rho_{k+1} (\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) + \bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

其中: $\bar{u}_i^k = u_i^k - u_i^*$, $\bar{\lambda}^k = \lambda^k - \lambda^*$ 。

证明 将式(19)代入式(17)、(18), 得:

$$\begin{cases} a(u_1^{k+1}, v_1) = (\lambda^{k+1}, v_1) + l^1(v_1) \\ a(u_2^{k+1}, v_2) = -(\lambda^{k+1}, v_2) + l^2(v_2) \end{cases} \quad (21)$$

结合式(21)与式(3)可得 $\begin{cases} a(u_1^{k+1} - u_1^*, v_1) = (\bar{\lambda}^{k+1}, v_1) \\ a(u_2^{k+1} - u_2^*, v_2) = -(\bar{\lambda}^{k+1}, v_2) \end{cases}$, 取 $v_1 = u_1^{k+1} - u_1^*$, $v_2 = u_2^{k+1} - u_2^*$, 则有:

$$(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{u}_1^{k+1}) = a(\bar{u}_1^{k+1}, \bar{u}_1^{k+1}) \geq \alpha \|\bar{u}_1^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (22)$$

$$(\bar{\lambda}^{k+1}, -\bar{u}_2^{k+1}) = a(\bar{u}_2^{k+1}, \bar{u}_2^{k+1}) \geq \alpha \|\bar{u}_2^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (23)$$

由式(22)、(23)可得:

$$(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) \geq \alpha (\|\bar{u}_1^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\bar{u}_2^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2) \geq 0. \quad (24)$$

由于 $\lambda^* \geq 0$, $u_1^* - u_2^* \geq 0$ 和 $(u_1^* - u_2^*, \lambda^*) = 0$, 因此可以得到以下 2 个不等式:

$$0 \leq \rho_k (u_1^* - u_2^*, (\lambda^k - \rho_k (u_1^k - u_2^k))^+ - \lambda^*), \quad (25)$$

$$0 \leq (\lambda^k - \rho_k (u_1^k - u_2^k) - (\lambda^k - \rho_k (u_1^k - u_2^k))^+, (\lambda^k - \rho_k (u_1^k - u_2^k))^+ - \lambda^*). \quad (26)$$

将式(25)、(26)相加, 并将式(16)代入得:

$$0 \leq \rho_k (u_1^* - u_2^* - \psi^{k+1}, \bar{\lambda}^k - \rho_k (u_1^k - u_2^k - \psi^{k+1})),$$

添项减项并整理得:

$$-\rho_k (\rho_k (\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k, u_1^k - u_2^k - \psi^{k+1}) \leq -\rho_k^2 \|u_1^k - u_2^k - \psi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \rho_k (\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k, \bar{\lambda}^k), \quad (27)$$

根据式(19)添项减项得到:

$$\rho_k (\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) + \bar{\lambda}^{k+1} = \rho_k (\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k - \rho_k (u_1^k - u_2^k - \psi^{k+1}),$$

对上式取范数并将式(27)代入得到:

$$\begin{aligned} & \|\rho_k (\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) + \bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\rho_k (\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k - \rho_k (u_1^k - u_2^k - \psi^{k+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ & \|\rho_k (\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_k^2 \|u_1^k - u_2^k - \psi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\rho_k (\rho_k (\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k, u_1^k - u_2^k - \psi^{k+1}) \leq \\ & \|\rho_k (\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \rho_k^2 \|u_1^k - u_2^k - \psi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\rho_k (\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k, \bar{\lambda}^k), \end{aligned} \quad (28)$$

根据式(20)、(24)可得:

$$\begin{aligned} & \|\rho_{k+1} (\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) + \bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \rho_{k+1}^2 \|\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\rho_{k+1} (\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}, \bar{\lambda}^{k+1}) \leq \\ & (1+s_k)^2 \rho_k^2 \|\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1+s_k)^2 \|\bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\rho_k (1+s_k)^2 (\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}, \bar{\lambda}^{k+1}) = \\ & (1+s_k)^2 \|\rho_k (\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) + \bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (29)$$

因为 $\rho_k^2 \|u_1^k - u_2^k - \phi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0, \rho_k (\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k, \bar{\lambda}^k) \geq 0$, 所以将式(28)代入式(29)可得:

$$\begin{aligned} & \|\rho_{k+1}(\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) + \bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & (1+s_k)^2 \|\rho_k(\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \rho_k^2 \|u_1^k - u_2^k - \phi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\rho_k(\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k, \bar{\lambda}^k), \end{aligned}$$

则由式(24)有:

$$\begin{aligned} & 2\alpha\rho_k(\|\bar{u}_1^k\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\bar{u}_2^k\|_{H^1(\Omega)}^2) + \rho_k^2 \|u_1^k - u_2^k - \phi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & (1+s_k)^2 \|\rho_k(\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\rho_{k+1}(\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) + \bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (30)$$

综上, SADMM 得到的序列 (u^k, ϕ^k, λ^k) 满足式(30)。

证毕

定理 2 由 SADMM 产生的序列 (u^k, ϕ^k) 收敛到鞍点问题(8)的解 $(u^*, \phi^*) \in K \times L^2(\Omega)$ 。

证明 由于 $2\alpha\rho_k(\|\bar{u}_1^k\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\bar{u}_2^k\|_{H^1(\Omega)}^2) + \rho_k^2 \|u_1^k - u_2^k - \phi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$, 则由式(30)得到如下不等式:

$$\|\rho_{k+1}(\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) + \bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (1+s_k)^2 \|\rho_k(\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (31)$$

令 $\xi_k = s_k^2 + 2s_k = (1+s_k)^2 - 1$, 由引理 4 可知 $\prod_{k=0}^{+\infty} \xi_k < +\infty, \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k < +\infty$, 定义 $C_p = \prod_{k=0}^{+\infty} (1+\xi_k), C_0 =$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k$ 。由式(31)可知:

$$\begin{aligned} & \|\rho_{k+1}(\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) + \bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (1+s_k)^2 \|\rho_k(\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & (1+s_k)^2 (1+s_{k-1})^2 \|\rho_{k-1}(\bar{u}_1^{k-1} - \bar{u}_2^{k-1}) + \bar{\lambda}^{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \prod_{k=0}^{+\infty} (1+\xi_k) \|\rho_0(\bar{u}_1^0 - \bar{u}_2^0) + \bar{\lambda}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ & C_p \|\rho_0(\bar{u}_1^0 - \bar{u}_2^0) + \bar{\lambda}^0\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

即存在一个常数 $C > 0$, 使得对任意的 $k \geq 0$, 有

$$\|\rho_k(\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C. \quad (32)$$

由式(30)可知:

$$\begin{aligned} & 2\alpha\rho_k(\|\bar{u}_1^k\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\bar{u}_2^k\|_{H^1(\Omega)}^2) + \rho_k^2 \|u_1^k - u_2^k - \phi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & (1+\xi_k) \|\rho_k(\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\rho_{k+1}(\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) + \bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ & \|\rho_k(\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\rho_{k+1}(\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) + \bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi_k \|\rho_k(\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

根据上式及式(32)得:

$$\begin{aligned} & 2\alpha\rho_L \sum_{k=0}^{+\infty} (\|\bar{u}_1^k\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\bar{u}_2^k\|_{H^1(\Omega)}^2) + \rho_L^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_1^k - u_2^k - \phi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \|\rho_0(\bar{u}_1^0 - \bar{u}_2^0) + \bar{\lambda}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k \leq C(1+C_0). \end{aligned} \quad (33)$$

根据式(33)得到 $2\alpha\rho_L \sum_{k=0}^{+\infty} (\|\bar{u}_1^k\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\bar{u}_2^k\|_{H^1(\Omega)}^2) \leq C(1+C_0)$, 因此有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{u}_1^k\|_{H^1(\Omega)}^2 = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{u}_2^k\|_{H^1(\Omega)}^2 = 0$ 成立。由此可得 $u_1^k \rightarrow u_1^*, u_2^k \rightarrow u_2^*$ 。

由式(33)可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_1^k - u_2^k - \phi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$, 根据式(9)及引理 3 可得:

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi^{k+1} - \phi^*\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi^{k+1} - (u_1^* - u_2^*)\|_{L^2(\Omega)} = \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi^{k+1} - (u_1^* - u_2^*) + (u_1^k - u_2^k) - (u_1^k - u_2^k)\|_{L^2(\Omega)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi^{k+1} - (u_1^k - u_2^k)\|_{L^2(\Omega)} + \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k\|_{L^2(\Omega)} = 0, \end{aligned}$$

因此 $\phi^k \rightarrow \phi^*$ 。

综上所述, 算法收敛性得证。

证毕

4 罚参数的自适应法则

对于双层弹性膜单侧接触问题, 若利用固定罚参数的交替方向乘子法计算, 虽然对任何大于 0 的罚参数都收敛, 但如果罚参数过小或过大都会大大降低算法收敛速度。本文利用自适应交替方向乘子法求解双层弹性膜单侧接触问题, 用变参数 ρ_k 代替固定罚参数^[9-14], 在算法迭代时自动选取罚参数从而提高算法效率。对定理 1

的证明中,由式(28)可得:

$$\|\rho_k(\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_2^{k+1}) + \bar{\lambda}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\rho_k(\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k) + \bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

利用平衡原理 $\|\bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)} \approx \rho_k \|\bar{u}_1^k - \bar{u}_2^k\|_{L^2(\Omega)}$, 分别用 λ^{k+1} 、 u_1^{k+1} 和 u_2^{k+1} 替代 λ^* 、 u_1^* 和 u_2^* , 可以得到:

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|_{L^2(\Omega)} \approx \rho_k \|u_1^{k+1} - u_1^k - (u_2^{k+1} - u_2^k)\|_{L^2(\Omega)}.$$

以上分析为罚参数的自动选择提供了依据,给定一个正常数 τ ,若:

$$(1+\tau) \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|_{L^2(\Omega)} < \rho_k \|u_1^{k+1} - u_1^k - (u_2^{k+1} - u_2^k)\|_{L^2(\Omega)},$$

则在下一步迭代中减小 ρ_k ;若:

$$\frac{1}{1+\tau} \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|_{L^2(\Omega)} > \rho_k \|u_1^{k+1} - u_1^k - (u_2^{k+1} - u_2^k)\|_{L^2(\Omega)},$$

则在下一步迭代中增加 ρ_k , 罚参数 ρ_{k+1} 的选取方式如下:

$$\eta_k = \frac{\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|_{L^2(\Omega)}}{\rho_k \|u_1^{k+1} - u_1^k - (u_2^{k+1} - u_2^k)\|_{L^2(\Omega)}}, \rho_{k+1} = \begin{cases} (1+s_k)\rho_k, \eta_k > 1+\tau \\ \frac{\rho_k}{1+s_k}, \eta_k < \frac{1}{1+\tau} \\ \rho_k, \text{否则} \end{cases}.$$

即序列 $\{\rho_k\}$ 满足式(20), 其中 $\{s_k\}$ 为非负序列, 由以下方式生成:

$$s_k = \begin{cases} \tau, t_k < t_{k+1} \text{ 且 } t_{k+1} \leq t_{\max} \\ \frac{1}{(t_{k+1} - t_{\max})^2}, t_k < t_{k+1} \text{ 且 } t_{k+1} > t_{\max} \\ 0, \text{否则} \end{cases}.$$

利用 t_k 表示 ρ_k 改变的次数, 令 $t_0 = 0$, 有 $t_{k+1} = \begin{cases} t_k, \frac{1}{1+\tau} \leq \eta_k \leq 1+\tau \\ t_k + 1, \text{否则} \end{cases}$. 对于给定的整数 $t_{\max} > 0$, 可知非负

序列 $\{s_k\}$ 满足 $\sum_{k=0}^{\infty} s_k < +\infty$.

5 算例分析

本小节针对双层弹性膜单侧接触问题使用线性有限元离散化, 利用半光滑牛顿法^[15]、ADMM 和 SADMM 对算例进行计算, 其中 ADMM 的罚参数固定, SADMM 的罚参数在每次迭代中根据迭代函数自动选取, 且在 SADMM 的罚参数自适应法则中取 $\tau = 1, t_{\max} = 100$. 3 个算法的误差限 ϵ 均取 10^{-5} , 并在相同初始条件下比较它们的迭代次数和 CPU 所用时间(t_{CPU}).

考虑在单位圆 Ω 上满足问题(1)的函数组 (u_1, u_2, λ) , 其中:

$$u_1(d, \theta) = g(2d^2 - 1), 0 \leq d \leq 1, \\ u_2(d, \theta) = \begin{cases} g(2d^2 - 1), 0 \leq d \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} g(1-d)(2d^2 - 1), \frac{1}{\sqrt{2}} \leq d \leq 1 \end{cases}, \lambda(d, \theta) = \begin{cases} 2g, 0 \leq d \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq d \leq 1 \end{cases}.$$

在 Ω 上使用极坐标 (d, θ) 表示, 其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, g 为给定的正常数. 与式(1)中 f_1 和 f_2 所对应的式子如下:

$$f_1(d, \theta) = \begin{cases} -10g, 0 \leq d \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -8g, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq d \leq 1 \end{cases}, f_2(d, \theta) = \begin{cases} -6g, 0 \leq d \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} g \frac{1+8d-18d^2}{d}, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq d \leq 1 \end{cases}.$$

对本算例采用自适应交替方向乘子法求解, 取 $g = 0.05$, 步长 $h = \frac{1}{50}$, 初始罚参数 $\rho = 10^3$, 图 1 是该条件下 $u_1 - u_2$ 的数值结果图, 图 2 为该条件下自由边界上该算例的数值解与解析解, 并且由图 2 可知本文算法 2 得到

的计算结果与解析解一致。

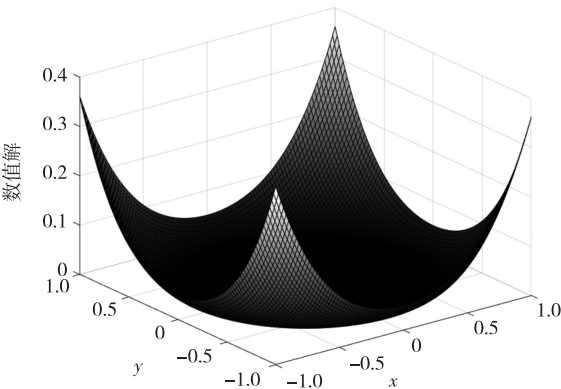


图 1 算例数值解模拟图
Fig. 1 Numerical solution of the problem

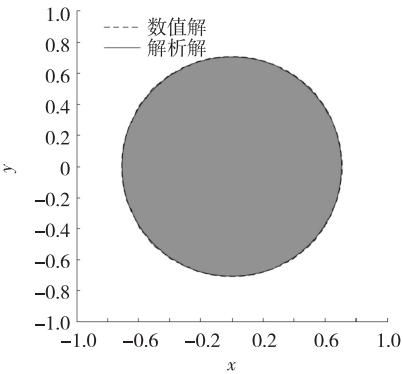


图 2 算例自由边界的数值解与解析解
Fig. 2 Numerical and analytical solutions on the free boundary of the example

表 1 列出了半光滑牛顿法、ADMM 和 SADMM 在不同初始罚参数和步长为 $\frac{1}{50}$ 时的 CPU 运行时间及迭代次数,其中“—”表示迭代次数大于 200,表 1 表明 SADMM 在相同条件下的迭代次数和 CPU 运行时间明显优于 ADMM,对于半光滑牛顿法,虽然在步长为 $\frac{1}{50}$ 时迭代次数与 SADMM 相近,但 CPU 运行时间与 SADMM 相比过长,对比发现,SADMM 更加有效。

表 1 3 个算法的 CPU 运行时间及迭代次数
Tab. 1 CPU running time and the number of iterations of the three algorithms

罚参数 ρ	半光滑牛顿法		ADMM		SADMM	
	t_{CPU}/s	迭代次数	t_{CPU}/s	迭代次数	t_{CPU}/s	迭代次数
10^{-2}	186.901 1	41	1.719 0	126	0.299 6	22
10^{-1}	92.501 1	20	$>3.086 0$	—	0.332 7	24
1	64.815 0	16	$>3.337 1$	—	0.318 2	24
10	79.957 7	18	$>3.424 2$	—	0.318 0	23
10^2	102.910 9	24	$>3.638 8$	—	0.389 8	24
10^3	111.771 9	25	$>3.755 4$	—	0.326 0	24

参考文献:

[1] BEN BELGACEM F, BERNARDI C, BLOUZA A, et al. On the unilateral contact between membranes, part1: finite element discretization and mixed reformulation[J]. Mathematical Modelling of Nature Phenomena, 2009, 4(1): 21-43.

[2] BEN BELGACEM F, BERNARDI C, BLOUZA A, et al. On the unilateral contact between membranes, part2: a posteriori analysis and numerical experiments[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2012, 32(3): 1147-1172.

[3] 严月月,钟艳丽,郭楠馨. 求解双层弹性膜单侧接触问题的 Uzawa 算法[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2018, 35(6): 75-78.
YAN Y Y, ZHONG Y L, GUO N X. A Uzawa algorithm for solving the unilateral contact between two elastic membranes[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University(Natural Science Edition), 2018, 35(6): 75-78.

[4] KINDERLEHRER D, STAMPACCHIA G. An introduction to variational inequalities and their applications[M]. New York: Academic Press, 1980.

[5] SILVESTRE L. The two membranes problem[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2005, 30: 245-257.

[6] GLOWINSKI R. Numerical methods for nonlinear variational problems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[7] KOKO J. Uzawa block relaxation method for the unilateral contact problem[J]. Journal of Computational and Applied

- Mathematics, 2011, 235(8): 2343-2356.
- [8] KOKO J. Alternating direction method of multiplier for the unilateral contact problem with an automatic penalty parameter selection[J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 78: 706-723.
- [9] 郭楠馨, 张守贵. 自由边界问题的自适应 Uzawa 块松弛算法[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(6): 682-693.
GUO N X, ZHANG S G. A self-adaptive Uzawa block relaxation algorithm for free boundary problems[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(6): 682-693.
- [10] 张霖森, 程兰, 张守贵. 曲率障碍下四阶变分不等式的交替方向乘子法[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(5): 595-604.
ZHANG L S, CHENG L, ZHANG S G. An alternating direction multiplier method for 4th-order variational inequalities with curvature obstacle[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2023, 44(5): 595-604.
- [11] 袁欣, 张守贵. 无摩擦弹性接触问题的自适应交替方向乘子法[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(8): 989-998.
YUAN X, ZHANG S G. A self-adaptive alternating direction multiplier method for frictionless elastic contact problems[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2023, 44(8): 989-998.
- [12] 程兰, 张霖森, 张守贵. 求解双侧障碍问题的自适应投影算法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2023, 40(4): 23-31.
CHENG L, ZHANG L S, ZHANG S G. A self-adaptive projection algorithm for the bilateral obstacle problem[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science Edition), 2023, 40(4): 23-31.
- [13] ZHANG S G. Projection and self-adaptive projection methods for the Signorini problem with the BEM[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2017, 74(6): 1262-1273.
- [14] ZHANG S G, LI X L. A self-adaptive projection method for contact problems with the BEM[J]. Applied Mathematics Modelling, 2018, 55: 145-159.
- [15] HINTERMÜLLER M, ITO K, KUNISCH K. The primal-dual active set strategy as a semismooth newton method[J]. SIAM Journal on Optimization, 2002, 13(3): 865-888.

An Alternating Direction Multiplier Method for the Unilateral Contact Between Two Membranes

YUAN Xingyue¹, CUI Xiyong², ZHANG Shougui¹

(1. School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

2. CISDI Information Technology (Chongqing) Co., Ltd., Chongqing 401120, China)

Abstract: It proposes an alternating direction method of multiplier for approximation solution of the unilateral contact problem of two membranes, with a self-adaptive penalty parameter. By using augmented Lagrange functional with an auxiliary unknown, a saddle-point problem is introduced to deal with the inequality constrained. Then the alternating direction method of multiplier is applied to the corresponding problem, and each iteration consists of two linear elliptic problems while the auxiliary unknown and the Lagrange multiplier are computed explicitly. A self-adaptive rule based iterative functions is used to automatically adjust the penalty parameter. The convergence of the method is shown and the self-adaptive penalty parameter approximation is given. Finally, the numerical experiments with the finite element discretization are given to illustrate the efficiency of the proposed method.

Keywords: unilateral contact; elastic membranes; finite element; alternating direction multiplier method; self-adaptive penalty parameter

(责任编辑 黄 颖)