

主从博弈鲁棒弱 Nash 平衡的通有稳定性^{*}

王 森^{1,2}, 杨光惠^{1,2}, 王国玲^{1,2}

(1. 贵州大学 数学与统计学院; 2. 贵州省博弈决策与控制系统重点实验室, 贵阳 550025)

摘要:为了研究主从博弈鲁棒弱 Nash 平衡的存在性与通有稳定性,首先建立了不确定参数下的主从博弈模型,其中不确定参数属于一个已知的集合;其次基于不确定参数集,将主从双方的支付都归结为一定的集合,进而运用 I 型集偏序定义了该博弈的鲁棒弱 Nash 平衡并证明了其存在性;最后运用 Fort 定理证明了当支付函数集合扰动时,大多数主从博弈的鲁棒弱 Nash 平衡都是稳定的。提出的主从博弈的鲁棒弱 Nash 平衡及所得结果都是新的。

关键词:主从博弈;鲁棒弱 Nash 平衡; I 型集偏序;通有稳定性

中图分类号:O225

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2025)01-0044-08

主从博弈最早是由德国经济学家 Stackelberg^[1]在 1952 年提出,并在经济学中产生了深远影响,此后越来越多的学者对主从博弈平衡的存在性与稳定性进行研究。Yu 等人^[2]通过 Kakutani 不动点定理证明了两主多从博弈 Nash 平衡点的存在性。Pang 等人^[3]将非合作多主从博弈表示为一个广义 Nash 平衡问题,进而表示为一个拟变分不等式并运用一种迭代惩罚方法得到该博弈的平衡解。文献[4]研究了具有垂直信息的两阶段多主从博弈的平衡选取,其中一个领导者的行动只能被独有跟随者观察到。随后,文献[5]研究了多主多从博弈合作平衡的存在性和稳定性。2023 年,刘珍丽等人^[6]将模糊支付引入主从博弈中,首先运用 Kakutani 不动点定理证明了 n 人非合作模糊博弈 Nash 平衡的存在性,基于此进一步证明了主从模糊博弈 Nash 平衡的存在性。同年,文献[7]定义了具有主从结构的群体博弈的合作平衡并证明了其存在性与通有稳定性。

然而,上述文献均在确定性环境下进行研究。但在实际生活中,环境的不确定性、信息的不完备性等不确定因素均会影响局中人的决策。因此,不确定性下的博弈问题引起了众多学者的研究兴趣。1994 年 Zhukovskii 等人^[8]结合 Nash 平衡与弱 Pareto 有效解,首次提出了 n 人非合作博弈的 Nash-Slater(NS)平衡概念并证明了存在性。基于 NS 平衡,2020 年文献[9]定义了含不确定参数的群体博弈的 NS 平衡,并利用 Ky Fan 不等式证明了存在性,进而证明了通有稳定性。在文献[9]讨论的不确定参数下群体博弈模型基础上,2022 年王明婷等人^[10]进一步引入成本函数并定义了弱 NS 平衡,还证明了存在性和通有稳定性。此外,杨哲等人^[11]通过 Fan-Glicksberg 不动点定理证明了含不确定参数的多主从博弈的平衡存在性。文献[12]中定义了不确定参数下多主多从博弈的强(弱)平衡并运用了 Kakutani 不动点定理证明了这些平衡的存在,并且不同于文献[11]中的博弈模型,此博弈模型中的不确定参数不仅影响领导者和跟随者的支付函数,还对跟随者的策略集产生影响。Liu 等人^[13-14]在模糊参数定义下分别建立单主多从和多主多从博弈的 α -FNS 平衡概念并证明了存在性。

事实上,不确定参数下的博弈与鲁棒优化有着密不可分的联系。Ben-Tal 等人^[15]研究了含不确定参数的优化问题,其中参数的变化范围是确定的,鲁棒可行解或鲁棒最优解与一个确定的优化问题的可行解或最优解对应。针对优化问题中的不确定性,文献[16]提出了鲁棒严格有效解、鲁棒有效解和鲁棒弱有效解。同时,许多学者将鲁棒优化运用到博弈论中,定义了不同的鲁棒平衡。例如,Yu 等人^[17]定义了多目标博弈的鲁棒平衡以及加权鲁棒平衡,并证明了这些平衡的存在性。基于鲁棒优化的思想,Crespi 等人^[18]建立了不确定参数下的多目标 n 人非合作博弈,并在其中参与人对不确定参数(环境)是厌恶的假设下,引入 u 型集序关系,给出该博弈的鲁棒(弱)Nash 平衡概念,并运用 Kakutani-Glicksberg-Fan 不动点定理证明了此类平衡的存在性。然而大多数情况

* 收稿日期:2024-01-05 修回日期:2024-12-06 网络出版时间:2025-03-14T11:04

资助项目:贵州省科技计划项目(黔科合基础-zk[2025]面上 676);贵州大学引进人才科研项目(No. 2017[59])

第一作者简介:王森,女,研究方向为应用数学,E-mail:1444632715@qq.com;通信作者简介:杨光惠,女,教授,博士,E-mail:ghuiyang@126.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250313.1555.006

下,博弈参与人通常对不确定参数所对应的博弈环境表现得不同,因此学者们往往还借助于另一种集合序关系—— l 型集偏序^[16]加以描述,如文献[19]研究了多目标主从博弈的鲁棒弱 Nash 平衡并证明了此类平衡的存在性。

受文献[16,18-19]的启发,本文基于鲁棒优化的思想建立不确定参数下的主从博弈,并在 l 型集偏序下给出单目标主从博弈的鲁棒弱 Nash 平衡,进一步探讨它的存在性和支付集扰动时的稳定性。

1 预备知识

记 E 为一个拓扑线性空间, $C_0(E)$ 表示 E 中全体非空紧子集的集合。 E 中任意 2 个集合之间的加减法: 设 A, B 是 E 中的 2 个非空集合, 则:

$$A+B=\{a+b|a\in A,b\in B\}, A-B=\{a-b|a\in A,b\in B\}.$$

引入如下 E 中的集合偏序关系。

定义 1^[16] K 是 E 中一个非空闭凸锥, 若对任意 $A, B\subseteq C_0(E)$, 满足 $B\subseteq A+\text{int}K$, 则称 $A<_KB$, 且称 $<_K$ 为 E 中的 l 型集偏序关系。

注 1 若 $E=\mathbf{R}, K=\mathbf{R}_+$, 则 $A<_KB$ 等价于 A 的下确界小于 B 的下确界。

接下来介绍关于泛函和集值映射的一些结果。

引理 1^[20-21] 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间, 则 $f:X\rightarrow\mathbf{R}$ 是连续的当且仅当 $\forall c\in\mathbf{R}$, 集合 $\{x\in X:f(x)\geq c\}$ 和 $\{x\in X:f(x)\leq c\}$ 都是 X 上的闭集。

定义 2^[20-21] 若 $f:X\rightarrow\mathbf{R}$ 满足 $\forall x_1, x_2\in X, \forall \lambda\in(0,1)$, 有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq\min\{f(x_1), f(x_2)\}$$

成立, 则称 f 在凸集 X 上拟凹。

引理 2^[20-21] 设 X 是一个非空凸集, 则 $f:X\rightarrow\mathbf{R}$ 拟凹当且仅当 $\forall c\in\mathbf{R}, \{x\in X:f(x)\geq c\}$ 是凸集。

引理 3^[20-21] 设 X 和 Y 是 2 个 Hausdorff 拓扑空间, $F:X\rightarrow 2^Y$ 是一个集值映射, 若 Y 是紧空间且 F 是闭的, 则 F 在 X 上是上半连续的。

引理 4^[20-21] 设 X 和 Y 是 2 个 Hausdorff 拓扑空间, $f:X\rightarrow\mathbf{R}$ 上半连续, $G:Y\rightarrow 2^X$ 在 y_0 上半连续且 $G(y_0)$ 是紧集, 则 $M(y)=\sup_{x\in G(y)}f(x,y)$ 在 y_0 是上半连续的。

引理 5^[20-21] 设 X 和 Y 是 2 个度量空间, $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ 是一紧集序列, $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ 是 Y 中一序列, $\{\varphi_m(x,y)\}_{m=1}^\infty$ 是 $X\times Y$ 上一连续函数列, 如果 $A_m\rightarrow A$ 且 A 紧, $y_m\rightarrow y\in Y$ 使 $\sup_{(x,y)\in X\times Y}|\varphi_m(x,y)-\varphi(x,y)|\rightarrow 0$, 其中 $\varphi(x,y)$ 是 $X\times Y$ 上的连续函数, 则 $\max_{x\in A_m}\varphi_m(x,y_m)\rightarrow\max_{x\in A}\varphi(x,y)$ 。

进一步, 为了探讨平衡的稳定性, 需要引入下面 2 个结果。

引理 6^[20] 设 X 是完备度量空间, 则 X 必是 Baire 空间。

引理 7^[20] (Fort 定理) 若 X 是一个 Baire 空间, Y 是一个度量空间, 集值映射 $F:X\rightarrow 2^Y$ 是上半连续且紧值的, 则存在 X 中的一个稠密剩余集 Q , 使 $\forall x\in Q, F$ 在 x 是下半连续的。

接下来介绍不确定参数下 n 人非合作博弈模型及鲁棒弱 Nash 平衡的定义与存在性定理^[19]。不确定参数下 n 人非合作博弈的一般模型 $\Gamma_1=\langle I, X, \{f_i\}_{i\in I}, \mathcal{U} \rangle$ 如下:

1) 局中人集合 $I=\{1, 2, \dots, n\}$;

2) 不确定参数集 $\mathcal{U}$;

3) 策略集 $X=\prod_{i=1}^n X_i$, 其中 X_i 是局中人 $i\in I$ 的策略集;

4) 局中人 $i\in I$ 的支付函数 $f_i:X\times\mathcal{U}\rightarrow\mathbf{R}$ 且 $f_i(x,\mathcal{U})=\{f_i(x,u):u\in\mathcal{U}\}\in C_0(\mathbf{R})$ 。

定义 3^[19] 对于不确定参数下 n 人非合作博弈 $\Gamma_1=\langle I, X, \{f_i\}_{i\in I}, \mathcal{U} \rangle$, 若 $x^*=(x_i^*, x_{-i}^*)\in X$ 满足 $\forall i\in I, \nexists x_i\in X_i$, 使:

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*, \mathcal{U})<_{\mathbf{R}_+} f_i(x_i, x_{-i}^*, \mathcal{U}),$$

则称 $x^*\in X$ 为 Γ_1 的一个鲁棒弱 Nash 平衡。

定理 1^[19] 对博弈 $\Gamma_1=\langle I, X, \{f_i\}_{i\in I}, \mathcal{U} \rangle, \forall i\in I, X_i$ 是 Hausdorff 拓扑线性空间 E_i 中的非空紧凸集, $\mathcal{U}$

是一个非空紧集。若 $(x, u) \mapsto f_i(x, u)$ 连续且 $\forall (x_{-i}, u) \in X_{-i} \times \mathcal{U}, x_i \mapsto f_i(x_i, x_{-i}, u)$ 拟凹, 则 Γ_1 至少存在一个鲁棒弱 Nash 平衡。

注 2 鲁棒弱 Nash 平衡(定义 3)及存在性定理(定理 1)即为文献[19]的定义 5 和定理 5 在单目标框架下的情形。

2 不确定参数下主从博弈鲁棒弱 Nash 平衡的存在性

首先, 本文构建不确定参数下的主从博弈模型 $\Gamma_2 = \langle N, Z, Y, f, \{g_i\}_{i \in I}, \mathcal{U} \rangle$:

1) 一个领导者和 n 个跟随者, 且跟随者的集合为 $N = \{1, 2, \dots, n\}$;

2) 不确定参数集 $\mathcal{U}$;

3) 领导者的策略集 Z , 跟随者的策略集 $Y = \prod_{i=1}^n Y_i$, 其中 Y_i 是跟随者 $i \in N$ 的策略集;

4) 领导者的支付函数 $f: Z \times Y \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}$ 且 $f(z, y, \mathcal{U}) = \{f(z, y, u) : u \in \mathcal{U}\} \in C_0(\mathbf{R})$, 跟随者 $i \in N$ 的支付函数 $g_i: Z \times Y \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}$ 且 $g_i(z, y, \mathcal{U}) = \{g_i(z, y, u) : u \in \mathcal{U}\} \in C_0(\mathbf{R})$ 。

当领导者选定策略 z 后, 跟随者展开可视为 n 人非合作博弈的竞争。如果跟随者的鲁棒弱 Nash 平衡存在, 则存在 $\bar{y} \in Y$ 使得 $\forall i \in N, \nexists y_i \in Y_i$, 有 $g_i(z, \bar{y}_i, \bar{y}_{-i}, \mathcal{U}) <_{\mathbf{R}_+} g_i(z, y_i, \bar{y}_{-i}, \mathcal{U})$ 成立。可以看出跟随者的鲁棒弱 Nash 平衡依赖于领导者的策略 z 与不确定参数集 $\mathcal{U}$ 。由此可以得到一个从领导者的策略集与不确定参数集到跟随者的鲁棒弱 Nash 平衡的映射 H , 且跟随者的鲁棒弱 Nash 平衡往往不是一个, 因此 H 是一个集值映射。本文将跟随者的鲁棒弱 Nash 平衡集记为 $H(z, \mathcal{U})$ 。

对领导者而言, 首先他希望无论自己选择任何策略 z , 跟随者所选择的鲁棒弱 Nash 平衡都能使他的支付在集合意义上达到最大, 即 $\forall z \in Z, \nexists y \in H(z, \mathcal{U})$, 使得 $f(z, \bar{y}, \mathcal{U}) <_{\mathbf{R}_+} f(z, y, \mathcal{U})$ 。本文将所有满足此条件的 $f(z, \bar{y}, \mathcal{U})$ 记为 $v(z, \mathcal{U}) = \{v(z, u) : u \in \mathcal{U}\}$ 。其次, 领导者还希望自己选择的策略 $\bar{z}$ 能使自己的支付最大化, 也就是说 $\nexists z \in Z, v(\bar{z}, \mathcal{U}) <_{\mathbf{R}_+} v(z, \mathcal{U})$ 。由此, 定义如下的主从博弈的鲁棒弱 Nash 平衡。

定义 4 若 $(\bar{z}, \bar{y}) \in Z \times Y$ 满足:

1) $\nexists z \in Z$ 使 $v(\bar{z}, \mathcal{U}) <_{\mathbf{R}_+} v(z, \mathcal{U})$;

2) $\bar{y} \in H(\bar{z}, \mathcal{U})$, $\nexists y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})$ 使 $f(\bar{z}, \bar{y}, \mathcal{U}) <_{\mathbf{R}_+} f(\bar{z}, y, \mathcal{U})$;

则称 $(\bar{z}, \bar{y})$ 是博弈 Γ_2 的一个鲁棒弱 Nash 平衡。

下面得到了定义 4 中条件 1) 成立的一个等价条件。

定理 2 定义 4 中条件 1) 成立当且仅当

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u) = \max_{y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, y, u) = \max_{z \in Z} \max_{y \in H(z, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u)。$$

证明 必要性。由 $v(\bar{z}, \mathcal{U})$ 可知, $\nexists y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})$, $f(\bar{z}, \bar{y}, \mathcal{U}) <_{\mathbf{R}_+} f(\bar{z}, y, \mathcal{U})$ 。由定义 1 可知, $\nexists y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})$ 使 $f(\bar{z}, \bar{y}, \mathcal{U}) \subseteq f(\bar{z}, y, \mathcal{U}) + \text{int} \mathbf{R}_+$ 。进一步, $\forall y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})$ 满足 $f(\bar{z}, y, \mathcal{U}) \not\subseteq f(\bar{z}, \bar{y}, \mathcal{U}) + \text{int} \mathbf{R}_+$ 。因此 $\forall y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})$, 有:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, y, u) \leq \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u),$$

进而 $\forall y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})$, 有:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u) = \inf_{u \in \mathcal{U}} v(\bar{z}, u) = \max_{y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, y, u)。 \quad (1)$$

又由定义 4 与 $\nexists z \in Z$ 使 $v(\bar{z}, \mathcal{U}) <_{\mathbf{R}_+} v(z, \mathcal{U})$ 可知, $\nexists z \in Z$ 使 $v(z, \mathcal{U}) \subseteq v(\bar{z}, \mathcal{U}) + \text{int} \mathbf{R}_+$ 。所以 $\forall z \in Z$, 有:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} v(z, u) \leq \inf_{u \in \mathcal{U}} v(\bar{z}, u)。 \quad (2)$$

结合式(1), (2), 有 $\forall z \in Z$:

$$\max_{y \in H(z, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u) \leq \max_{y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, y, u),$$

由 z 的任意性可知:

$$\max_{y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, y, u) = \max_{z \in Z} \max_{y \in H(z, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u)。$$

充分性。假设条件 1) 不成立, 那么 $\exists z_0 \in Z$ 使 $v(\bar{z}, \mathcal{U}) <_{\mathbf{R}_+} v(z_0, \mathcal{U})$ 。由定义 1 可知:

$$v(z_0, \mathcal{U}) \subseteq v(\bar{z}, \mathcal{U}) + \text{int} \mathbf{R}_+.$$

进一步,有:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} v(\bar{z}, u) \leq \inf_{u \in \mathcal{U}} v(z_0, u).$$

由式(1)可得,上式即:

$$\max_{y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, y, u) \leq \max_{y \in H(z_0, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z_0, y, u),$$

这与条件矛盾,因此定义 4 中条件 1)成立。

证毕

利用定理 2 得到 Γ_2 的鲁棒弱 Nash 平衡的存在性定理如下。

定理 3 对博弈 $\Gamma_2 = \langle N, Z, Y, f, \{g_i\}_{i \in I}, \mathcal{U} \rangle$, 令 Z 和 $\mathcal{U}$ 是非空紧集且 $\forall i \in N, Y_i$ 是 Hausdorff 线性拓扑空间中的非空紧凸集。若:

- 1) $(z, y, u) \mapsto f(z, y, u)$ 连续;
- 2) $(y, u) \mapsto g_i(z, y, u)$ 连续;
- 3) $y_i \mapsto g_i(z, y_i, y_{-i}, u)$ 拟凹。

则 Γ_2 至少有一个鲁棒弱 Nash 平衡。

证明 由定理 1 可得, $H(z, \mathcal{U}) \neq \emptyset$ 。下证 $H: Z \times \mathcal{U} \rightarrow 2^Y$ 是上半连续的。由引理 3 可知, 只需证 H 是闭的, 即 $\forall z_k \in Z, z_k \rightarrow z^*, \forall y_k \in H(z_k, \mathcal{U}), k=1, 2, \dots, y_k \rightarrow y^*$, 则 $y^* \in H(z^*, \mathcal{U})$ 。

因 $y_k \in H(z_k, \mathcal{U})$, 所以 $\forall i \in N, \nexists y_i \in Y_i$, 使:

$$g_i(z_k, y_{k_i}, y_{-k_i}, \mathcal{U}) \prec_{\mathbf{R}_+} g_i(z_k, y_i, y_{-k_i}, \mathcal{U}).$$

由定义 1 可知, $\forall i \in N, \forall y_i \in Y_i, g_i(z_k, y_i, y_{-k_i}, \mathcal{U}) \not\subseteq g_i(z_k, y_{k_i}, y_{-k_i}, \mathcal{U}) + \text{int} \mathbf{R}_+$ 。所以 $\forall y_i \in Y_i$, 有:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} g_i(z_k, y_i, y_{-k_i}, u) \leq \inf_{u \in \mathcal{U}} g_i(z_k, y_{k_i}, y_{-k_i}, u). \quad (3)$$

由引理 1 和 $(y, u) \mapsto g_i(z, y, u)$ 连续可得, $y \mapsto \inf_{u \in \mathcal{U}} g_i(z, y, u)$ 也是连续的。进而对式(3)取极限有 $\forall y_i \in Y_i$:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} g_i(z^*, y_i, y_{-i}^*, u) \leq \inf_{u \in \mathcal{U}} g_i(z^*, y^*, y_{-i}^*, u). \quad (4)$$

下证 $y^* \in H(z^*, \mathcal{U})$ 。采用反证法, 假设 $y^* \notin H(z^*, \mathcal{U})$, 那么 $\exists i_0 \in N, \exists \tilde{y}_{i_0} \in Y_{i_0}$ 使:

$$g_{i_0}(z^*, y_{i_0}^*, y_{-i_0}^*, \mathcal{U}) \prec_{\mathbf{R}_+} g_{i_0}(z^*, \tilde{y}_{i_0}, y_{-i_0}^*, \mathcal{U}).$$

因此:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} g_{i_0}(z^*, y_{i_0}^*, y_{-i_0}^*, u) \leq \inf_{u \in \mathcal{U}} g_{i_0}(z^*, \tilde{y}_{i_0}, y_{-i_0}^*, u).$$

这与式(4)矛盾, 所以 $y^* \in H(z^*, \mathcal{U})$, 进而 H 是闭的且是上半连续的。

因 Y_i 是非空紧集, 所以 $Y = \prod_{i=1}^n Y_i$ 也是非空紧集。由引理 1 及 $(z, y, u) \mapsto f(z, y, u)$ 连续可知, $(z, y) \mapsto \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u)$ 也是连续的。又由引理 4 可知, $\max_{y \in H(z, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u)$ 是上半连续的。因 Z 是非空紧集, 则存在 $\bar{z} \in Z$ 使:

$$\max_{y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, y, u) = \max_{z \in Z} \max_{y \in H(z, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u).$$

令 $\bar{y} \in H(\bar{z}, \mathcal{U})$ 且 $\inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u) = \max_{y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, y, u)$ 。利用反证法易证 $\bar{y}$ 满足定义 4 的条件 2), 因此 $(\bar{z}, \bar{y})$ 是博弈 Γ_2 的鲁棒弱 Nash 平衡。

证毕

例 1 考虑如下的单主两从博弈: 领导者的策略集 $Z = [0, 1]$, 跟随者集合与策略集分别为 $N = \{1, 2\}, Y_1 = Y_2 = [0, 1]$, 不确定参数集 $U = [0, 1]$ 。领导者的支付函数为 $f(z, y, u) = z - y_1 - y_2 + u$, 跟随者 $i \in N$ 的支付函

$$\text{数为 } g_i(z, y, u) = \begin{cases} z + 2y_i + uy_{-i}, & 0 \leq y_i < \frac{1}{2} \\ z + uy_{-i} + 1, & \frac{1}{2} \leq y_i \leq 1 \end{cases}.$$

显然此博弈满足定理 3 的所有条件, 即至少存在一个鲁棒弱 Nash 平衡。

设 $(\bar{z}, \bar{y}) = (\bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ 是此博弈的一个鲁棒弱 Nash 平衡, 则满足定义 4。令 $i=1$, 则无论领导者选择任意策略 z , 都存在跟随者的策略 $y = (y_1, y_2)$ 满足 $\nexists y_1' \in Y_1$ 使得 $g_1(z, y_1, y_2, \mathcal{U}) \prec_{\mathbf{R}_+} g_1(z, y_1', y_2, \mathcal{U})$ 。那么 $\forall y_1' \in Y_1, \inf_{u \in \mathcal{U}} g_1(z, y_1, y_2, u) \geq \inf_{u \in \mathcal{U}} g_1(z, y_1', y_2, u)$ 。

易知 $\inf_{u \in \mathcal{U}} g_1(z, y_1, y_2, u) = \begin{cases} z + 2y_1, & 0 \leq y_1 < \frac{1}{2} \\ z + 1, & \frac{1}{2} \leq y_1 < 1 \end{cases}$ 。进而可知, $\max_{y_1 \in Y_1} \inf_{u \in \mathcal{U}} g_1(z, y_1, y_2, u)$ 的最优解 $y_1 \in$

$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 。同理可得 $\max_{y_2 \in Y_2} \inf_{u \in \mathcal{U}} g_2(z, y_1, y_2, u)$ 的最优解 $y_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 。所以 $\forall z \in Z, H(z, \mathcal{U}) = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 。

由定义 4 的 2) 可知, $\bar{y}$ 满足使 $\nexists y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})$, 那么 $\forall y \in H(\bar{z}, \mathcal{U}), \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u) \geq \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, y, u)$ 。又因为 $\inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, \bar{y}, u) = z - 1$, 所以 $\max_{z \in Z} \max_{y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u)$ 的最优解 $\bar{z} = 1$ 。

综上, $(\bar{z}, \bar{y}) = (\bar{z}, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in Z \times Y$ 是此博弈的一个鲁棒弱 Nash 平衡。

特别指出, 本例中的鲁棒弱 Nash 平衡与文献[11]中关于不确定参数下的主从博弈平衡是不同的。

3 不确定参数下主从博弈鲁棒弱 Nash 平衡的通有稳定性

在本节中假设 Z 和 U 都是非空紧集, Y_i 是 Hausdorff 局部凸拓扑线性空间 E_i 中的非空紧凸集。因跟随者的支付函数集合扰动会导致鲁棒弱 Nash 平衡映射 H 的扰动, 故本节只考虑 H 扰动, 那么定义如下的问题集:

$$\Lambda = \{\lambda = (f(z, y, \mathcal{U}), H(z, \mathcal{U})) : (z, y, u) \mapsto f(z, y, u) \text{ 连续}; H(z, \mathcal{U}) \text{ 在 } Z \times \mathcal{U} \text{ 上连续}; \\ \forall z \in Z, H(z, \mathcal{U}) \text{ 非空}\}.$$

在 Λ 上定义如下距离: $\forall \lambda_1 = (f^1(z, y, \mathcal{U}), H^1(z, \mathcal{U})), \lambda_2 = (f^2(z, y, \mathcal{U}), H^2(z, \mathcal{U})) \in \Lambda$, 有:

$$\rho(\lambda_1, \lambda_2) = \sup_{(z, y) \in Z \times Y} h_1(f^1(z, y, \mathcal{U}), f^2(z, y, \mathcal{U})) + \sup_{z \in Z} h_2(H^1(z, \mathcal{U}), H^2(z, \mathcal{U})),$$

其中 h_1, h_2 分别是 $\mathbf{R}, Y$ 中的 Hausdorff 距离。显然, (Λ, ρ) 是完备度量空间。

由任一 $\lambda = (f(z, y, \mathcal{U}), H(z, \mathcal{U})) \in \Lambda$ 可以确定一个不确定参数下的主从博弈 Γ_λ , 下文用博弈 λ 表示对应的博弈, 用 $N(\lambda)$ 表示博弈 λ 的所有鲁棒弱 Nash 平衡的集合, 由此可以定义一个集值映射 $N: \Lambda \rightarrow 2^{Z \times Y}$ 。由定理 3 可知, $N(\lambda) \neq \emptyset$ 。接下来探讨 $N(\lambda)$ 的连续性及其紧性。

定理 4 $N: \Lambda \rightarrow 2^{Z \times Y}$ 上半连续且紧值。

证明 因 $Z \times Y$ 是非空紧集, 由引理 3 可知, 只需证 N 是闭的即可, 即取

$$\forall \{\lambda^m = (f^m(z, y, \mathcal{U}), H^m(z, \mathcal{U}))\}_{m=1}^\infty \subseteq \Lambda, \lambda^m \rightarrow \lambda = (f(z, y, \mathcal{U}), H(z, \mathcal{U})) \in \Lambda (m \rightarrow \infty), \\ \forall (z^m, y^m) \in N(\lambda^m), (z^m, y^m) \rightarrow (\bar{z}, \bar{y}), (\bar{z}, \bar{y}) \in N(\lambda).$$

因 $\rho(\lambda^m, \lambda) \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$, 则 $h_1(f^m(z, y, \mathcal{U}), f(z, y, \mathcal{U})) \rightarrow 0, h_2(H^m(z, \mathcal{U}), H(z, \mathcal{U})) \rightarrow 0$ 。结合 $H(z, \mathcal{U})$

在 Z 上连续且 $z^m \rightarrow \bar{z}$ 可知, $H^m(z^m, \mathcal{U}) \xrightarrow{h_2} H(z^m, \mathcal{U})$ 且 $H(z^m, \mathcal{U}) \xrightarrow{h_2} H(\bar{z}, \mathcal{U})$, 进而 $H^m(z^m, \mathcal{U}) \xrightarrow{h_2} H(\bar{z}, \mathcal{U})$ 。又因 $y^m \rightarrow \bar{y}$ 且 $y^m \in H^m(z^m, \mathcal{U})$, 所以 $\bar{y} \in H(\bar{z}, \mathcal{U})$ 。

由 $h_1(f^m(z, y, \mathcal{U}), f(z, y, \mathcal{U})) \rightarrow 0$ 可知, 对 $f^m(z, y, \mathcal{U})$ 中的元素 $\inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z, y, u)$, $\exists f(z, y, u_1) \in f(z, y, \mathcal{U})$, 使得 $\inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z, y, u) \rightarrow f(z, y, u_1)$ 。假设 $f(z, y, u_1) \neq \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u)$, 那么 $f(z, y, u_1) > \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u)$ 。又因 $h_1(f^m(z, y, \mathcal{U}), f(z, y, \mathcal{U})) \rightarrow 0$ 且 $f^m(z, y, \mathcal{U})$ 是非空紧集, 所以 $\exists f^m(z, y, u_2) \in f^m(z, y, \mathcal{U})$, 有

$$f^m(z, y, u_2) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u), f^m(z, y, u_2) > \inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z, y, u)$$

成立。进一步, 对此式取极限有 $\inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u) \geq f(z, y, u_1)$, 显然矛盾。因此 $f(z, y, u_1) = \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u)$, 即:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z, y, u) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u) (m \rightarrow \infty).$$

由引理 1 和 $f^m(z, y, u)$ 的连续性可知, $(z, y) \mapsto \inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z, y, u)$ 也是连续的。又因 $(z^m, y^m) \rightarrow (\bar{z}, \bar{y})$, 所以 $\inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z^m, y^m, u) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(\bar{z}, \bar{y}, u)$ 。同理可得, $\inf_{u \in \mathcal{U}} f(z^m, y^m, u) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u)$ 。

进一步,

$$\left| \inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z^m, y^m, u) - \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u) \right| \leq$$

$$\left| \inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z^m, y^m, u) - \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z^m, y^m, u) \right| + \left| \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z^m, y^m, u) - \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u) \right| \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty).$$

因此, $\inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z^m, y^m, u) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u) (m \rightarrow \infty)$ 。进一步, 结合引理 5 和 $H^m(z^m, \mathcal{U}), H(\bar{z}, \mathcal{U})$ 都是紧集, 有:

$$\max_{y \in H^m(z^m, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z^m, y, u) \rightarrow \max_{y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, y, u)。$$

进而有:

$$\max_{z \in Z} \max_{y \in H^m(z, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z, y, u) \rightarrow \max_{z \in Z} \max_{y \in H(z, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u)。$$

因 $(z^m, y^m) \in N(\lambda^m)$, 由定义 4 可知, 1) $\nexists z \in Z$ 使 $v^m(z^m, \mathcal{U}) <_{\mathbf{R}_+} v^m(z, \mathcal{U})$, 2) $y^m \in H^m(z^m, \mathcal{U})$, $\nexists y \in H^m(z^m, \mathcal{U})$ 使 $f^m(z^m, y^m, \mathcal{U}) <_{\mathbf{R}_+} f^m(z^m, y, \mathcal{U})$ 。由定义 4 与 1) 可知, $\nexists z \in Z$ 使 $v^m(z, \mathcal{U}) \subseteq v^m(z^m, \mathcal{U}) + \text{int}\mathbf{R}_+$, 所以 $\forall z \in Z$, 有:

$$v^m(z, \mathcal{U}) \not\subseteq v^m(z^m, \mathcal{U}) + \text{int}\mathbf{R}_+。$$

因此 $\forall z \in Z, \inf_{u \in \mathcal{U}} v^m(z^m, u) \geq \inf_{u \in \mathcal{U}} v^m(z, u)$ 。因 z 是任意的, 所以有 $\inf_{u \in \mathcal{U}} v^m(z^m, u) = \max_{z \in Z} \inf_{u \in \mathcal{U}} v^m(z, u)$ 成立。

由定理 2 可知, 上式等价于:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z^m, y^m, u) = \max_{z \in Z} \max_{y \in H^m(z, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z, y, u)。 \quad (5)$$

对式(5)取极限有:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u) = \max_{z \in Z} \max_{y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z, y, u)。 \quad (6)$$

由定义 4 的条件 2) 可知, $\forall y \in H^m(z^m, \mathcal{U}), \inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z^m, y^m, u) \geq \inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z^m, y, u)$, 即:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z^m, y^m, u) = \max_{y \in H^m(z^m, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f^m(z^m, y, u)。$$

两边同时取极限有:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u) = \max_{y \in H(\bar{z}, \mathcal{U})} \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, y, u)。 \quad (7)$$

假设 $(\bar{z}, \bar{y}) \notin N(\lambda)$, 由定义 4 可知, $(\bar{z}, \bar{y})$ 至少满足以下条件之一:

- 1) $\exists z' \in Z$ 使 $v(\bar{z}, \mathcal{U}) <_{\mathbf{R}_+} v(z', \mathcal{U})$;
- 2) $\exists y' \in H(\bar{z}, \mathcal{U})$ 使 $f(\bar{z}, \bar{y}, \mathcal{U}) <_{\mathbf{R}_+} f(\bar{z}, y', \mathcal{U})$ 。

由 1) 与定义 1 可知, $\inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u) < \inf_{u \in \mathcal{U}} f(z', y, u)$, 这与式(6)矛盾。由 2) 与定义 1 可知, $\inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, \bar{y}, u) < \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\bar{z}, y', u)$, 这与式(7)矛盾。

综上, $(\bar{z}, \bar{y})$ 满足定义 4, 所以 $(\bar{z}, \bar{y}) \in N(\lambda)$ 。进而, N 是上半连续且紧值的。

证毕

接着引入本质平衡及本质博弈的定义。

定义 5^[20] 1) $\forall \lambda \in \Delta$, 若对 $(z, y) \in N(\lambda)$ 的任意开邻域 $O(z, y)$, 存在 λ 的开邻域 $O(\lambda)$, 使 $\forall \lambda' \in O(\lambda)$, $\exists (z', y') \in N(\lambda)$, 成立 $(z', y') \in O(z, y)$, 则称 (z, y) 为博弈 λ 的本质平衡;

2) 若 $\forall (z, y) \in N(\lambda)$, (z, y) 都是博弈 λ 的本质平衡, 则称博弈 λ 是本质的。

通过定义 5 与定理 4, 可以得到如下关于鲁棒弱 Nash 平衡的稳定性。

定理 5 博弈 $\lambda \in \Delta$ 是本质的当且仅当集值映射 $N: \Delta \rightarrow 2^{Z \times Y}$ 在 λ 是下半连续的。

证明 充分性。 $\forall \lambda \in \Delta, \forall (z, y) \in N(\lambda)$, 对 (z, y) 的任意一个开邻域 $O(z, y)$, $N(\lambda) \cap O(z, y) \neq \emptyset$ 。又因为 N 是下半连续的, 则存在 λ 的一个开邻域, 使得 $\forall \lambda' \in O(\lambda)$, 有 $N(\lambda') \cap O(z, y) \neq \emptyset$ 。取 $(z', y') \in N(\lambda') \cap O(z, y)$, 则 $(z', y') \in N(\lambda)$ 且 $(z', y') \in O(z, y)$ 。由定义 5 的条件 1) 知, (z, y) 是本质平衡点, 进而博弈 λ 是本质的。

必要性。因 $\lambda \in \Delta$, 对 $Z \times Y$ 中任意满足条件 $G \cap N(\lambda) \neq \emptyset$ 的开集 G , 取 $(z, y) \in G \cap N(\lambda)$, 则 G 是 (z, y) 的开邻域。又因博弈 λ 是本质的, 由定义 5 的条件 2) 知, $(z, y) \in N(\lambda)$ 是本质平衡点, 即存在 λ 的开邻域 $O(\lambda)$, 使得 $\forall \lambda' \in O(\lambda)$, 有 $(z', y') \in N(\lambda')$ 且 $(z', y') \in G$ 。因此 $G \cap N(\lambda') \neq \emptyset$, 进而 N 是下半连续的。

证毕

定理 6 若 $\forall i \in I, E_i$ 都是线性赋范空间, 则存在 Δ 中一个稠密剩余集 Q , 使 $\forall \lambda \in Q$, 博弈 λ 是本质的。

证明 因 Δ 是一个完备度量空间, 由引理 6 可知 Δ 是一个 Baire 空间。又因 $Z \times Y$ 是一个度量空间且 N 是一个上半连续且紧值的集值映射, 由引理 7(Fort 定理)可知, 存在 Δ 中一个稠密剩余集 Q , 使 $\forall \lambda \in Q, N$ 在 λ 是下半连续的, 进而由定理 5 知博弈 λ 是本质的。

证毕

此定理说明, 在 Baire 分类意义下, 大多数博弈 $\lambda \in \Delta$ 都是本质的。换言之, 博弈 λ 是问题空间 Δ 上的通常性质, 即当支付函数集合发生轻微扰动时, 大多数不确定参数下的主从博弈的鲁棒弱 Nash 平衡都是稳定的。

4 总结

首先,本文建立了不确定参数下主从博弈模型,基于鲁棒优化的思想,并定义了 l 型集偏序下该博弈的鲁棒弱 Nash 平衡。其次,本文证明了该平衡的存在性,同时还举例(例 1)说明了鲁棒弱 Nash 平衡存在性定理的可行性。最后,运用 Fort 定理证明了当支付函数集合扰动时,大多数不确定参数下主从博弈的鲁棒弱 Nash 平衡都是稳定的,即在 Baire 分类意义下,大多数不确定参数下主从博弈都是本质的。今后,将进一步研究不确定性下主从博弈的有限理性模型以及该模型的鲁棒弱 Nash 平衡的良性性。

参考文献:

- [1] STACKELBERG H V. The theory of the market economy[M]. Oxford:Oxford University Press,1952.
- [2] YU J, WANG H L. An existence theorem for equilibria points for multi-leader-follower games[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69: 1775-1777.
- [3] PANG J S, FUKUSHIMA M. Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games[J]. Computational Management Science, 2005, 2: 21-56.
- [4] CEOARANO M C, MORGAN J. Equilibrium selection in multi-leader-follower games with vertical information [J]. Computational Management Science, 2016, 65(3): 563-573.
- [5] YANG Z, JU Y. Existence and generic stability of cooperative equilibria for multi-leader-multi-follower games[J]. Journal of Global Optimization, 2016, 563-573.
- [6] 刘珍丽, 王国玲, 杨光惠, 等. 具有模糊支付的主从博弈的 Nash 平衡的存在性[J]. 模糊系统与数学, 2023, 37(2): 69-80.
LIU Z L, WANG G L, YANG G H, et al. The existence of Nash equilibrium for leader-follower games with fuzzy payment[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2023, 37(2): 69-80.
- [7] 武文俊, 杨光惠, 房才雅, 等. 主从群体博弈合作均衡的通有稳定性[J]. 数学物理学报, 2023, 43A(3): 921-929.
WU W J, YANG G H, FANG C Y, et al. Generic stability of cooperative equilibria for leader-follower population games[J]. Acta Mathematica Scientia, 2023, 43A(3): 921-929.
- [8] ZHUKOVSKII I V I, CHIKRII A A. Linear-quadratic differential games[M]. Kiev: Naoukova Dumka, 1994.
- [9] 赵薇, 杨辉, 吴隽永. 不确定参数下群体博弈均衡的存在性与通有稳定性[J]. 应用数学学报, 2020, 43(4): 627-638.
ZHAO W, YANG H, WU J Y. Existence and generic stability of equilibria for population games with uncertain parameters[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2020, 43(4): 627-638.
- [10] 王明婷, 杨光惠, 杨辉. 有限理性下不确定性群体博弈弱 NS 平衡的稳定性[J]. 数学物理学报, 2022, 42A(6): 1812-1825.
WANG M T, YANG G H, YANG H. Stability of weak NS equilibria for population games with uncertain parameters under bounded rationality[J]. Acta Mathematica Scientia, 2022, 42A(6): 1812-1825.
- [11] 杨哲, 蒲勇健. 不确定性下多主从博弈中均衡的存在性[J]. 控制与决策, 2012, 27(5): 736-740.
YANG Z, PU Y J. Existence of equilibrium points for multi-leader-follower games under uncertainty[J]. Control and Decision, 2012, 27(5): 736-740.
- [12] ZHANG Y F, LIU F, WANG Z J, et al. On Nash-Stackelberg-Nash games under decision dependent uncertainties: model and equilibrium[J]. Automatica, 2022, 142: 1-12.
- [13] LIU Z L, WANG G L, YANG G H. Existence of equilibrium solution for leader-follower games with fuzzy goals and parameters [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 473: 108731.
- [14] LIU Z L, WANG G L, YANG G H. Existence of equilibrium solution for multi-leader-follower games with fuzzy goals and parameters[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2024, 200: 585-601.
- [15] BEN-TAL A, NEMIROVSKI A. Robust convex optimization[J]. Mathematics of Operations Research, 1998, 23: 769-805.
- [16] JONAS I, KÖBIS E. Concepts of efficiency for uncertain multiobjective optimization problems based on set order relations[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2014, 80: 99-127.
- [17] YU H, LIU H M. Robust multiple objective game theory[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2013, 159: 272-280.
- [18] CRESPI G P, KUROIWA D, ROCCA M. Robust Nash equilibria in vector-valued games with uncertainty[J]. Annals of Operations Research, 2020, 289: 185-193.
- [19] WANG M, YANG G H, WANG G L, et al. Existence of robust weak Nash equilibria for leader-follower games with uncertainty

[EB/OL]. (2024-02-26)[2024-12-06]. <https://doi.org/10.1007/s10479-024-05874-0>.

[20] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

YU J. Game theory and nonlinear analysis[M]. Beijing: Science Press, 2008.

[21] BERGE C. Topological space[M]. New York: Macmillan, 1963.

Operations Research and Cybernetics

Generic Stability of Robust Weak Nash Equilibria for Leader-Follower Games

WANG Miao^{1, 2}, YANG Guanghui^{1, 2}, WANG Guoling^{1, 2}

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University;

2. Guizhou Provincial Key Laboratory for Games Decision-Making and Control System, Guiyang 550025, China)

Abstract: The existence and generic stability of robust weak Nash equilibria for leader-follower games are studied. Firstly, a leader-follower game model with uncertainty is established, where all uncertain parameters belong to a known set. Secondly, based on the uncertain parameter set, the payoffs of both the leader and the followers are reduced to a certain set. Furthermore, a robust weak Nash equilibrium for this game is defined under I -type set relation and its existence is further proved. Finally, most of those equilibria for such games are generically stable under perturbations of payoff function sets. The above existence and stability of robust weak Nash equilibria are up to date.

Keywords: leader-follower games; robust weak Nash equilibria; I -type set relation; generic stability

(责任编辑 陈 乔)