DOI:10.11721/cqnuj20250102

关于单 K_3-群及其自同构群的新刻画*

张　欢，何立官
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:设 G 是有限群，$o_1(G)$表示 G 中最高阶元素的阶，$p_l=p_l(G)$表示 G 的阶的最大素因子。定义一个与 p_l 阶元有关的度量 $\mathrm{P_1NC}(G)$，并仅用 $o_1(G)$和 $\mathrm{P_1NC}(G)$刻画了单 K_3-群及其自同构群。

关键词:有限群；单 K_3-群；单 K_3-群的自同构群；$\mathrm{P_1NC}$-度量
中图分类号:O152.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2025)01-0112-05

1 符号说明

设 G 是有限群，$\pi_e(G)$表示 G 中元素阶的集合，$o_1(G)$表示 G 中最高阶元素的阶。$|G|$表示 G 的阶，$\pi(G)$表示 $|G|$的素因子集合。用 $\Gamma(G)$表示 G 的素图：$\Gamma(G)$的顶点集是 $\pi(G)$，$\Gamma(G)$的两顶点 p,q 之间有边当且仅当 $pq\in\pi_e(G)$。$t(G)$表示 $\Gamma(G)$的连通分支数，$\pi_i(i=1,2,\cdots)$表示 $\Gamma(G)$的连通分支所含顶点集。如果 $2\big||G|$，则总设 $2\in\pi_1$[1]。本文其余符号及术语是标准的。

如果有限单群 G 的阶 $|G|$恰含有 n 个素因子，称 G 为单 K_n-群。当 $n=3$ 时，单 K_3-群只有以下 8 个：A_5，A_6，$L_2(7)$，$L_2(8)$，$L_2(17)$，$L_3(3)$，$U_3(3)$，$U_4(2)$。一直以来，有很多工作都试图在极弱的(数量)条件下去刻画单 K_3-群的性质结构。例如，文献[2-4]用 $|G|$和 $o_1(G)$分别刻画了单 K_3-群及其自同构群，文献[5]去掉了群阶相等的条件，用与 $o_1(G)$阶元相关的数量(即 $o_1(G)$阶元的个数与中心化子的阶)刻画了单 K_3-群，文献[6]在假设不可解的条件下用与 $o_1(G)$阶元素相关的数量刻画了单 K_3-群：A_5，$L_2(7)$，$L_2(8)$，$L_2(17)$，$L_3(3)$，$U_3(3)$，$U_4(2)$的自同构群，文献[7]用 $|G|$与 $\Gamma(G)$刻画了单 K_3-群等。文献[2-6]说明与 $o_1(G)$阶元素相关的数量在刻画群的性质时拥有重要的地位。设 $p_l=p_l(G)$表示 $|G|$的最大素因子，由 Cauchy 定理知 G 中一定有 p_l 阶元。作为群 G 的 2 个所谓“最大”的数量($p_l(G)$和 $o_1(G)$)之一，与 p_l 阶元素相关的数量信息在刻画群的结构时也应该拥有独特作用。例如，文献[8]讨论了与 p_l 阶元素相关的数量对散在单群结构的影响。

本文试图用与 p_l 阶元素相关的数量信息(即 p_l 阶元的个数与中心化子的阶)刻画 K_3-群及其自同构群。为此，用 $n_{p_l}(G)$表示 G 中 p_l 阶元的个数，$c_{p_l}(G)$表示 G 中 p_l 阶元的中心化子的最大阶。令

$$\mathrm{P_1NC}(G)=\{p_l;\ n_{p_l}(G);c_{p_l}(G)\},$$

称 $\mathrm{P_1NC}(G)$为 G 的 $\mathrm{P_1NC}$-度量。由文献[9]可知，对本文讨论的群 G，p_l 阶元的中心化子的阶是相同的，即所有 p_l 阶元的中心化子的阶均为 $c_{p_l}(G)$。接下来将讨论 $\mathrm{P_1NC}$-度量对单 K_3-群及其自同构群结构的影响。

2 定理及证明

定理 1　设 G 是有限群，M 是下列单 K_3-群：A_5，A_6，$L_2(17)$，$L_2(8)$，$L_3(3)$，$U_3(3)$。如果 $o_1(G)=o_1(M)$且 $\mathrm{P_1NC}(G)=\mathrm{P_1NC}(M)$，则 $G\cong M$ 或 $G\cong\mathrm{Aut}(M)$。

证明　当 $M=A_5$，A_6，$L_2(17)$时，由文献[9]知 $o_1(M)=p_l(M)$，此时定理条件等价于文献[5]中定理 2.3

* **收稿日期**:2024-04-03　**修回日期**:2024-08-29　**网络出版时间**:2025-03-14T09:47
资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11871127)
第一作者简介:张欢，女，研究方向为有限群论，E-mail:2694705787@qq.com；**通信作者简介**:何立官，男，教授，博士，E-mail:lghecqnu@126.com
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250313.1543.004

的条件 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(M)$，并由此知 $G\cong M$，结论成立。

下面证明 $M=L_2(8)$，$L_3(3)$，$U_3(3)$的情形。由于方法类似，只讨论 $M=L_2(8)$和 $M=U_3(3)$。

情形 1，当 $M=L_2(8)$时，有 $G\cong L_2(8)$或 $G\cong\mathrm{Aut}(L_2(8))$。

此时 $o_1(G)=o_1(L_2(8))=9$，$\mathrm{P_1NC}(G)=\mathrm{P_1NC}(L_2(8))=\{7;2^3\cdot 3^3;7\}$。设 a 是 G 的任一 7 阶元，由文献[9]知 $C_G(\langle a\rangle)=\langle a\rangle$，于是 a 所在的共轭类长度是 $|G/C_G(\langle a\rangle)|=|G/\langle a\rangle|=|G|/7$。

设 G 中 7 阶元共分为 t 个共轭类，则 $t\cdot|G|/7=2^3\cdot 3^3$，从而有 $|G|\,|\,2^3\cdot 3^3\cdot 7$。又因为 $9\in\pi_e(G)$，所以 $3^2\,|\,|G|$。若 $2\notin\pi(G)$，则 G 中元素个数至多为 $3^3\cdot 7<2^3\cdot 3^3$，矛盾。故 $2\in\pi(G)$，即 $\pi(G)=\{2,3,7\}$。由 $o_1(G)=9$ 知 7 是 $\Gamma(G)$的孤立点，从而 $t(G)\geqslant 2$。由文献[1]中定理 A 和引理 3 知 G 的结构是如下之一：

1) G 是 Frobenius 群或 2-Frobenius 群；

2) G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\lhd K\trianglelefteq G$，使得 H 为幂零，群 K/H 是非交换单群，H 和 G/K 是 π_1-群，其中 $2\in\pi_1$，而且 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$。

下面证明 G 的结构只能是 2)这种情况。

(i) G 不是 Frobenius 群。

如果 G 是 Frobenius 群，由文献[10]中定理 1 知 $t(G)=2$ 且 $\Gamma(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$，其中 K 是 Frobenius 核，H 是 Frobenius 补。于是 K 或是$\{2,3\}$ -Hall 子群，或是 Sylow7-子群。设 S 为 K 的一个 Sylow-子群，因为 K 幂零，所以 $|H|\,|\,(|S|-1)$。如果 K 是 Sylow7-子群，则有 $9\,|\,6$，矛盾。设 K 是$\{2,3\}$ -Hall 子群，则 $|H|=7$。考虑 K 的 Sylow3-子群，有 $7\,|\,8$ 或 $7\,|\,26$，矛盾。故 G 不是 Frobenius 群。

(ii) G 不是 2-Frobenius 群。

如果 G 是 2-Frobenius 群，由文献[10]中定理 2 知 $t(G)=2$，且 G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\lhd K\trianglelefteq G$，使得 $\pi(K/H)=\pi_2$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1$，G/K 和 K/H 均为循环群且满足 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|$。因为 7 是 $\Gamma(G)$的孤立点，所以 $\pi_2=\{7\}$，因此 $\pi(H)\cup\pi(G/K)=\{2,3\}$ 且 $|K/H|=7$。又因为 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|=6$ 且 $3^2\,|\,|G|$，比较阶有 $3\,|\,|H|$。用 G 中的 7 阶元共轭作用在 H 上，则存在 H 的 Sylow3-子群 S_3 在该作用下不变。此时有 $|S_3|\,|\,3^3$。考虑 $\Omega_1(Z(S_3))$，显然 $\Omega_1(Z(S_3))$ 是一个初等交换 3-群，且 $|\Omega_1(Z(S_3))|\,|\,3^3$。因 $7\nmid|\mathrm{Aut}(\Omega_1(Z(S_3)))|$，故 7 阶元作用在 $\Omega_1(Z(S_3))$上是平凡作用，这说明 $21\in\pi_e(G)$，矛盾。故 G 不是 2-Frobenius 群。

因此，G 有符合条件 2)的正规列 $1\trianglelefteq H\lhd K\trianglelefteq G$。由 7 是 $\Gamma(G)$的孤立点知 $\pi(H)\cup\pi(G/K)=\{2,3\}$ 且 $7\in\pi(K/H)$，从而 $K/H\cong L_2(7)$或 $L_2(8)$。

设 $K/H\cong L_2(7)$，再设 $|G|=2^3\cdot 3^x\cdot 7(2\leqslant x\leqslant 3)$，因为 $|\mathrm{Out}(L_2(7))|=2$，所以 $|G/K|\,|\,2$，比较阶有 $3\,|\,|H|$。设 L 是 H 的 Sylow3-子群，则 $|L|\,|\,3^2$。因为 H 是幂零群，所以 L char H，从而 $L\lhd G$。用 G 中的 7 阶元共轭作用在 L 上，有 $21\in\pi_e(G)$，矛盾。

设 $K/H\cong L_2(8)$。如果 $|G|=2^3\cdot 3^2\cdot 7$，则 $|H|=1$，$G=K\cong L_2(8)$。如果 $|G|=2^3\cdot 3^3\cdot 7$，因为 $|\mathrm{Out}(L_2(8))|=3$，所以 $|G/K|\,|\,3$。如果 $|G/K|=1$，比较阶有 $|H|=3$。用 G 中的 7 阶元共轭作用在 H 上，有 $21\in\pi_e(G)$，矛盾。所以 $|G/K|=3$，此时 $|H|=1$，从而 $K\cong L_2(8)$。因此 $G\cong L_2(8)\times Z_3$ 或 $G\cong L_2(8)\rtimes Z_3$，其中 $L_2(8)\times Z_3$ 表示 $L_2(8)$由 Z_3 的半直积。如果 $G\cong L_2(8)\times Z_3$，则有 $21\in\pi_e(G)$，矛盾。所以 $G\cong L_2(8)\rtimes Z_3$，由文献[9]知 $G\cong\mathrm{Aut}(L_2(8))$，且有 $o_1(\mathrm{Aut}(L_2(8)))=9$，$\mathrm{P_1NC}(\mathrm{Aut}(L_2(8)))=\{7;2^3\cdot 3^3;7\}$。

综上所述，即有 $G\cong L_2(8)$或 $G\cong\mathrm{Aut}(L_2(8))$。

情形 2，当 $M=U_3(3)$时，有 $G\cong U_3(3)$或 $G\cong\mathrm{Aut}(U_3(3))$。

此时 $o_1(G)=o_1(U_3(3))=12$，$\mathrm{P_1NC}(G)=\mathrm{P_1NC}(U_3(3))=\{7;2^6\cdot 3^3;7\}$。作类似情形 1 的讨论，即可知 $|G|\,|\,2^6\cdot 3^3\cdot 7$，$\pi(G)=\{2,3,7\}$，$2^4\,|\,|G|$或 $3^2\,|\,|G|$，且 G 有符合情形 1 中条件 2)的正规列 $1\trianglelefteq H\lhd K\trianglelefteq G$，此时 $K/H\cong L_2(7)$，$L_2(8)$或者 $U_3(3)$。

设 $K/H\cong L_2(7)$，$|G|=2^x\cdot 3^y\cdot 7(3\leqslant x\leqslant 6,2\leqslant y\leqslant 3)$，因为 $|\mathrm{Out}(L_2(7))|=2$，所以 $|G/K|\,|\,2$，比较阶

有 $3\mid\mid H\mid$,用 G 中7阶元共轭作用在 H 的Sylow3-子群 L 上,有 $21\in\pi_e(G)$,矛盾。

设 $K/H\cong L_2(8)$,此时 $|\mathrm{Out}(L_2(8))|=3$。设 $|G|=2^x\cdot 3^3\cdot 7(x\geqslant 3)$,如果 $|G/K|=1$,则 $3\mid\mid H\mid$,用 G 中的7阶元共轭作用在 H 的Sylow3-子群 L 上,则 $21\in\pi_e(G)$,矛盾,故 $|G/K|=3$。若 $x>3$,比较阶有 $2\mid\mid H\mid$,且 $|H|\mid 2^3$。如果 $|H|\mid 2^2$,用 G 中的7阶元共轭作用在 H 上,有 $14\in\pi_e(G)$,矛盾。如果 $|H|=2^3$,有 $G/C_G(\Omega_1(Z(H)))$同构于 $\mathrm{Aut}(\Omega_1(Z(H)))$的一个子群。因为 $|\mathrm{Aut}(\Omega_1(Z(H)))|\mid 2^3\cdot 3\cdot 7$,所以 $L_2(8)\leqslant C_G(\Omega_1(Z(H)))$,故 $14\in\pi_e(G)$,矛盾。所以 $x=3$,$|G|=2^3\cdot 3^3\cdot 7$,此时 $G\cong L_2(8)\times Z_3$ 或 $G\cong L_2(8)\rtimes Z_3$。若 $G\cong L_2(8)\times Z_3$,有 $21\in\pi_e(G)$,矛盾。若 $G\cong L_2(8)\rtimes Z_3$,有 $o_1(G)=9$,矛盾。再设 $|G|=2^x\cdot 3^2\cdot 7(3\leqslant x\leqslant 6)$。当 $x=3$ 时,$G\cong L_2(8)$,而 $o_1(L_2(8))=9$,矛盾;当 $x\geqslant 4$ 时,$2\mid\mid H\mid$ 且 $|H|\mid 2^3$,重复前面的讨论可得出矛盾。

设 $K/H\cong U_3(3)$。如果 $|G|=2^5\cdot 3^3\cdot 7$,则 $|H|=1$,$G=K\cong U_3(3)$。设 $|G|=2^6\cdot 3^3\cdot 7$,又因为 $|\mathrm{Out}(U_3(3))|=2$,所以 $|G/K|\mid 2$。如果 $|G/K|=1$,比较阶有 $|H|=2$,用 G 中7阶元共轭作用在 H 上,有 $14\in\pi_e(G)$,矛盾。所以 $|G/K|=2$,$|H|=1$,从而 $K\cong U_3(3)$,因此 $G\cong U_3(3)\times Z_2$ 或 $G\cong U_3(3)\rtimes Z_2$。如果 $G\cong U_3(3)\times Z_2$,有 $14\in\pi_e(G)$,矛盾。所以 $G\cong U_3(3)\rtimes Z_2$,由文献[9]知 $G\cong\mathrm{Aut}(U_3(3))$,且确实有 $o_1(\mathrm{Aut}(U_3(3)))=12$,$\mathrm{P_1NC}(\mathrm{Aut}(U_3(3)))=\{7;2^6\cdot 3^3;7\}$。

综上所述,有 $G\cong U_3(3)$ 或 $G\cong\mathrm{Aut}(U_3(3))$。 证毕

定理2 设 G 是有限群,则 $G\cong U_4(2)$ 的充分必要条件是 $o_i(G)=o_i(U_4(2))(i=1,2)$ 且 $\mathrm{P_1NC}(G)=\mathrm{P_1NC}(U_4(2))$,其中 $o_2(G)$ 表示 G 的第二高阶元素的阶。

证明 只需证明充分性。此时有:

$$\mathrm{P_1NC}(G)=\mathrm{P_1NC}(U_4(2))=\{5;2^6\cdot 3^4;5\},o_1(G)=12,o_2(G)=9。$$

类似定理1的讨论知 $|G|\mid 2^6\cdot 3^4\cdot 5$。又因为 $12\in\pi_e(G)$,所以 $\pi(G)=\{2,3,5\}$,且 $2^4\mid\mid G|$ 或 $3^3\mid\mid G|$。由 $o_1(G)=12$,$o_2(G)=9$ 知5是 $\Gamma(G)$ 的孤立点,从而 $t(G)\geqslant 2$,故 G 是Frobenius群或者2-Frobenius群,或者 G 有符合情形1中条件2)的正规列 $1\trianglelefteq H\lhd K\trianglelefteq G$。

如果 G 是Frobenius群,类似情形1中(i)部分的讨论知 K 不是Sylow5-子群。若 K 是 $\{2,3\}$-Hall子群,则 $|H|=5$。设 K 的Sylow3-子群为 S_3,有 $|S_3|\mid 3^4$。再考虑 $\Omega_1(Z(S_3))$,显然 $\Omega_1(Z(S_3))$是一个初等交换3-群,且 $|\Omega_1(Z(S_3))|\mid 3^4$。又因为 $o_2(G)=9$,所以 $|\Omega_1(Z(S_3))|\mid 3^3$,从而 $5\nmid|\mathrm{Aut}(\Omega_1(Z(S_3)))|$。用5阶元作用在 $\Omega_1(Z(S_3))$上,有 $15\in\pi_e(G)$,矛盾。故 G 不是Frobenius群。

再类似情形1中(ii)部分的讨论知 G 不是2-Frobenius群。

于是 G 有符合情形1中条件2)正规列 $1\trianglelefteq H\lhd K\trianglelefteq G$,此时 $K/H\cong A_5$,A_6 或 $U_4(2)$。

设 $K/H\cong A_5$。因为 $o_2(G)=9$,所以 $3^2\mid\mid G|$,比较阶有 $3\mid\mid H|$,用 G 中的5阶元作用在 H 上,存在 H 的Sylow3-子群 L 在该作用不变,从而有 $15\in\pi_e(G)$,矛盾。

设 $K/H\cong A_6$。若 $3^2\mid\mid G|$,则 $|G|=2^6\cdot 3^2\cdot 5$,H 为2-群。设 L 为 G 的Sylow3-子群,由 $o_2(G)=9$ 知 L 为9阶循环群且 $L\trianglelefteq K$。设 x 为 K 的9阶元,由 H 为2-群知 xH 也为9阶元,但 A_6 中没有9阶元,矛盾。

于是 $3^3\mid\mid G|$,比较阶有 $3\mid\mid H|$,用 G 中的5阶元作用在 H 上,有 $15\in\pi_e(G)$,矛盾。因此 $K/H\cong U_4(2)$。此时 $|G|=2^6\cdot 3^4\cdot 5$,则 $|H|=1$,$G=K$,即 $G\cong U_4(2)$。 证毕

定理3 设 G 是有限非可解群,则 $G\cong L_2(7)$ 的充分必要条件是:

$$o_i(G)=o_i(L_2(7))(i=1,2)\text{且 }\mathrm{P_1NC}(G)=\mathrm{P_1NC}(L_2(7))。$$

证明 只需证明充分性。此时 $\mathrm{P_1NC}(G)=\mathrm{P_1NC}(L_2(7))=\{7;2^4\cdot 3;7\}$,$o_1(G)=7$,$o_2(G)=4$。

类似定理1的讨论知 $|G|\mid 2^4\cdot 3\cdot 7$。因为 G 不可解,$\pi(G)=\{2,3,7\}$。由 $o_1(G)=7$,$o_2(G)=4$ 知2,3,7是 $\Gamma(G)$ 的孤立点,从而 $t(G)=3$。

由文献[10]的定理3和定理4知 G 有符合情形1中条件2)的正规列 $1\trianglelefteq H\lhd K\trianglelefteq G$。由 $|K/H|\mid 2^4\cdot 3\cdot 7$ 知 $K/H\cong L_2(7)$。

再类似定理 1 的讨论知 $G\cong L_2(7)$。　　证毕

对于单 K_3-群 A_5，$L_2(7)$，$L_2(17)$，自同构群有如下刻画。

定理 4　设 G 是有限群，M 是下列单 K_3-群：A_5，$L_2(7)$，$L_2(17)$，则 $G\cong \mathrm{Aut}(M)$ 的充分必要条件是 $o_1(G)=o_1(\mathrm{Aut}(M))$，$\mathrm{P_1NC}(G)=\mathrm{P_1NC}(\mathrm{Aut}(M))$。

证明　只需证明充分性。由于方法类似，只讨论 $M=A_5$，$L_2(7)$的情形。

情形 1，当 $M=A_5$ 时，有 $G\cong\mathrm{Aut}(A_5)$。

此时 $o_1(G)=o_1(\mathrm{Aut}(A_5))=6$，$\mathrm{P_1NC}(G)=\mathrm{P_1NC}(\mathrm{Aut}(A_5))=\{5;2^3\cdot 3;5\}$。

类似定理 1 的讨论有 $|G|\,\big|\,2^3\cdot 3\cdot 5$，$\pi(G)=\{2,3,5\}$，且 G 有符合定理 1 的证明中情形 1 的条件 2)的正规列 $1\trianglelefteq H\lhd K\trianglelefteq G$，此时有 $K/H\cong A_5$。如果 $|G|=2^2\cdot 3\cdot 5$，则 $|H|=1$，$G=K\cong A_5$，而 $o_1(A_5)=5$，矛盾。

于是设 $|G|=2^3\cdot 3\cdot 5$。又因为 $|\mathrm{Out}(A_5)|=2$，所以 $|G/K|\,\big|\,2$。如果 $|G/K|=1$，比较阶有 $|H|=2$，用 G 中 5 阶元共轭作用在 H 上，有 $10\in\pi_e(G)$，矛盾。所以 $|G/K|=2$，此时 $|H|=1$，从而 $K\cong A_5$，因此 $G\cong A_5\times Z_2$ 或 $G\cong A_5\rtimes Z_2$。如果 $G\cong A_5\times Z_2$，则 $10\in\pi_e(G)$，矛盾。所以 $G\cong A_5\rtimes Z_2$，由文献[9]知 $G\cong\mathrm{Aut}(A_5)$。

情形 2，当 $M=L_2(7)$时，有 $G\cong\mathrm{Aut}(L_2(7))$。

此时 $o_1(G)=o_1(\mathrm{Aut}(L_2(7)))=8$，$\mathrm{P_1NC}(G)=\mathrm{P_1NC}(\mathrm{Aut}(L_2(7)))=\{7;2^4\cdot 3;7\}$。

类似定理 1 的讨论有 $|G|\,\big|\,2^4\cdot 3\cdot 7$。由 $n_{p_1}(G)=2^4\cdot 3$ 知 $|G|>2^4\cdot 3$。由 $o_1(G)=8$ 知 $2^3\,\big|\,|G|$。可断言 $3\in\pi_e(G)$。因为如果 $3\notin\pi_e(G)$，则 $|G|=2^3\cdot 7$ 或 $|G|=2^4\cdot 7$。

再由 $o_1(G)=8$ 知 7 是 $\Gamma(G)$的孤立点，从而 $t(G)=2$，且 G 为可解群。由文献[10]定理 3 知 G 是 Frobenius 群或者 2-Frobenius 群。下证这 2 种情况都不可能，从而得出矛盾。

事实上，如果 G 是 Frobenius 群，由文献[10]定理 1 知 $\Gamma(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$。类似定理 1 证明中情形 1 (i)的讨论知 K 不是 7-群。如果 K 是 2-群，则 $|K|=2^3$ 或 $|K|=2^4$。考虑 $\Omega_1(Z(K))$，则 $\Omega_1(Z(K))$为初等交换 2-群。又 $8\in\pi_e(G)$，所以 $|\Omega_1(Z(K))|\,\big|\,2^2$。用 7 阶元共轭作用在 $\Omega_1(Z(K))$上，则 $14\in\pi_e(G)$，矛盾。所以 G 不是 Frobenius 群。

如果 G 是 2-Frobenius 群，则 G 有符合文献[10]中定理 2 的正规列 $1\trianglelefteq H\lhd K\trianglelefteq G$。因为 7 是 $\Gamma(G)$的孤立点，所以有 $\pi_2=\{7\}$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\{2\}$，于是 $|K/H|=7$。又因为 $|\mathrm{Aut}(K/H)|=6$，比较阶有 $2\,\big|\,|H|$ 且 $|H|\,\big|\,2^4$，此时考虑 $\Omega_1(Z(H))$，依然可以得出矛盾，因此 G 不是 2-Frobenius 群，故 $3\,\big|\,|G|$，即$\pi(G)=\{2,3,7\}$。

再次重复上面的讨论知 G 只能有符合定理 1 证明中情形 1 的表达式 2)条件的正规列 $1\trianglelefteq H\lhd K\trianglelefteq G$，此时有 $K/H\cong L_2(7)$。

如果 $|G|=2^3\cdot 3\cdot 7$，则 $|H|=1$，$G=K\cong L_2(7)$，而 $o_1(L_2(7))=7$，矛盾。

于是设 $|G|=2^4\cdot 3\cdot 7$。又因为 $|\mathrm{Out}(L_2(7))|=2$，所以 $|G/K|\,\big|\,2$。如果 $|G/K|=1$，那么有 $|H|=2$。用 G 中 7 阶元共轭作用在 H 上，有 $14\in\pi_e(G)$，矛盾。所以 $|G/K|=2$，此时 $|H|=1$，$K\cong L_2(7)$，故 $G\cong L_2(7)\times Z_2$ 或 $G\cong L_2(7)\rtimes Z_2$。如果 $G\cong L_2(7)\times Z_2$，则 $14\in\pi_e(G)$，矛盾。所以 $G\cong L_2(7)\rtimes Z_2$，由文献[9]可知 $G\cong\mathrm{Aut}(L_2(7))$。　　证毕

参考文献：

[1] WILLIAMS J S. Prime graph components of finite group[J]. Journal of Algebra, 1981, 69(2): 487-513.

[2] HE L G, CHEN G Y. A new characterization of simple K_3-groups[J]. Communication in Algebra, 2012, 40(10): 3903-3911.

[3] 何立官. 关于单 K_3-群 $L_3(3)$和 $U_3(3)$[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(4): 76-79.
HE L G. On simple K_3-groups $L_3(3)$ and $U_3(3)$[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2013, 30(4): 76-79.

[4] 何立官，徐海静. 关于单 K_3-群的自同构群的刻画[J]. 数学进展, 2015, 44(3): 363-368.
HE L G, XU H J. A characterization of automorphism groups of simple K_3-groups[J]. Advances in Mathematics (CHINA), 2015, 44(3): 363-368.

[5] 何立官,陈贵云.关于单 K_3-群的 ONC-刻画[J].数学进展,2018,47(6):822-832.
HE L G,CHEN G Y. On ONC-characterization of simple K_3-groups[J]. Advances in Mathematics (CHINA),2018,47(6):822-832.

[6] 胡培杰.与最高阶元素有关的数量对群结构的影响[D].重庆:重庆师范大学,2019.
HU P J. The influence of the number related to the highest order elements on the group structure[D]. Chongqing:Chongqing Normal University,2019.

[7] 汪忠碧.素图和平均余维数对有限群结构的影响研究[D].重庆:西南大学,2022.
WANG Z B. The effect of the prime graph and the average codegrees on the structre of finite groups[D]. Chongqing:Southwest University,2022.

[8] 雷倩.关于散在单群的刻画[D].重庆:重庆师范大学,2021.
LEI Q. Characterizations of sporadic simple groups[D]. Chongqing:Chongqing Normal University,2021.

[9] CONWAY J H,CURTIS R T,NORTON S P,et al. ATLAS of finite groups[M]. Oxford:Clarendon Press,1985.

[10] 陈贵云. Frobenius 群和 2-Frobenius 群的结构[J].西南师范大学学报(自然科学版),1995,20(5):485-487.
CHEN G Y. On structure of Frobenius group and 2-Frobenius group[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science),1995,20(5):485-487.

A New Characterization of Simple K_3-Groups and Their Automorphism Groups

ZHANG Huan, HE Liguan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Let G be a finite group, $o_1(G)$ denote the largest element order of G, and $p_l = l_p(G)$ denote the largest prime factor of the order of G. It first defines a degree $P_1NC(G)$, which related to the element of order p_l, and then characterizes simple K_3-groups and their automorphism groups by only using $o_1(G)$ and $P_1NC(G)$.

Keywords: finite group; simple K_3-groups; the automorphism groups of simple K_3-groups; P_1NC-degree

(责任编辑 黄 颖)