

## 斑马优化算法的收敛性分析\*

冉 谊, 毛若华, 司仪涵, 刘晓宇  
(重庆师范大学 重庆国家应用数学中心, 重庆 401331)

**摘要:**斑马优化算法是一种崭新的基于群体智能的优化算法,此算法已顺利地应用于诸多复杂的优化问题求解,尽管基于斑马优化算法有许多改进后的算法,但是都缺少严谨的收敛性分析,不能从理论上证明算法是否达到全局最优,缺乏理论支撑。因此,利用随机过程中的 Markov 理论对斑马优化算法进行收敛性分析,为斑马优化算法的改进和工程应用奠定了良好的理论基础。首先给出斑马优化算法的斑马状态空间和斑马位置的转移概率的数学定义;其次建立斑马优化算法的 Markov 链模型,然后论证斑马群状态序列 Markov 链是有限齐次的,且状态空间是可约的;最后结合算法的全局收敛准则,证明了斑马优化算法的 Markov 链模型能够满足随机搜索算法全局收敛的 2 个假设,验证了算法的全局收敛性。此外,通过选取不同特征的 16 个标准测试函数对斑马优化算法进行数值实验,成功的验证了本文理论证明的正确性并体现出斑马优化算法的特点。

**关键词:**斑马优化算法;Markov 链;转移概率;收敛性

**中图分类号:**O229;O224;TP181

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-6693(2025)02-0029-09

斑马优化算法(zebra optimization algorithm,ZOA)是 Trojovská 等人<sup>[1]</sup>于 2022 年提出的一种通过模拟斑马觅食和防御捕食者行为的全新算法,用于处理工程中的非凸、非线性优化问题,如拉伸或压缩弹簧、焊接梁、减速器和压力容器等。该算法有控制参数少、结构简单、易于实现且具有较好的收敛性和鲁棒性等优点,被用于各个领域的优化问题中。Elymany 等人<sup>[2]</sup>提出了一种基于 ZOA 和人工猩猩群体优化器的混合优化 ANFIS MPPT 策略,用于提升混合微网系统的性能和效率,Shareef 等人<sup>[3]</sup>提出了一种基于特征选择和双通道生成对抗网络(DGAN)的物联网(IoT)网络僵尸网络检测模型,通过 ZOA 和 Sooty Tern 优化算法提高了检测准确性和效率,以及应用于其他一系列工程领域<sup>[4-6]</sup>。但 ZOA 也有和其他智能算法相同的共性问题,存在随机搜索计算量较大等问题,因此一些学者对该算法的性能进行了改进,王震等人<sup>[7]</sup>将 Hénon 混沌映射、自适应权重和黄金正弦 3 种策略引入 ZOA,从而提出一种融合的改进 ZOA(IZOA),苏晨等人<sup>[8]</sup>提出一种融合正切搜索与竞争交配的 ZOA(TZOA),以上对 ZOA 的改进都取得了较好的结果。但这些研究都是从工程或者改进算法的角度表明 ZOA 的收敛性,缺乏相应的理论分析。因此,对 ZOA 进行理论分析是具有重要意义的。

Markov 链的理论在物理学、生物学、计算机科学、经济学和信息处理等方面都有重要应用。Markov 链在随机算法收敛性分析以及收敛概率分析上具有较强的分析能力,目前已经成功运用到粒子群算法(PSO)<sup>[9]</sup>、布谷鸟算法(CS)<sup>[10]</sup>、蝙蝠算法(BA)<sup>[11]</sup>、灰狼算法(GWO)<sup>[12]</sup>和鲸鱼算法(WOA)<sup>[13]</sup>等智能优化算法的收敛性证明中。在 ZOA 中,斑马通过觅食和防御这 2 种行为来更新位置,本质上是一个随机过程,故本文采用随机过程中的 Markov 链理论对 ZOA 进行收敛性分析,首先研究斑马群的状态及相关的状态转移,再建立关于 ZOA 的 Markov 链模型,最后通过 Solis 等人<sup>[14]</sup>提出的随机算法收敛准则,对 ZOA 进行收敛性分析,完善了 ZOA 的理论研究。此外,通过选取不同特征的 16 个标准测试函数与其他智能优化算法在均值、标准差、平均耗时上进行数值实验对比。数值实验成功地对理论证明的正确性进行了验证,同时体现出 ZOA 的独特之处,为算法在工程

\* 收稿日期:2024-10-20 修回日期:2025-01-14 网络出版时间:2025-04-29T16:41

资助项目:国家自然科学基金青年科学基金项目(No. 12401699);重庆市自然科学基金创新发展联合基金重点项目(No. CSTB2023NSCQ-LZX0037);国家重点研发计划重点专项(No. SQ2023YFA1000183)

第一作者简介:冉谊,男,研究方向为最优化数值方法与应用,E-mail:xyz2020199@163.com;通信作者简介:刘晓宇,女,讲师,博士,E-mail:xyliu@cqnu.edu.cn

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250429.1528.010

上的应用提供了坚实的理论依据。

## 1 ZOA

在算法搜索过程中,首先在搜索空间生成初始解  $\mathbf{X}_i (i=1,2,\dots,N)$ ,  $N$  是斑马种群数量,每个解  $\mathbf{X}_i$  是一个  $m$  维的向量,  $m$  是问题的维度,并对目标函数进行评估。在 ZOA 中,种群中最好的成员被认为是先锋斑马,并将其他种群成员引向它在搜索空间中的位置。因此,对斑马在觅食阶段的位置更新进行数学建模,斑马在此阶段更新位置如下:

$$\mathbf{X}_{i,j}^{\text{new},\rho 1} = \mathbf{X}_{i,j} + r(Z_j^P - I \cdot \mathbf{X}_{i,j}), \quad (1)$$

$$\mathbf{X}_i = \begin{cases} \mathbf{X}_i^{\text{new},\rho 1}, & F_i^{\text{new},\rho 1} < F_i, \\ \mathbf{X}_i, & \text{否则。} \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{X}_{i,j}^{\text{new},\rho 1}$  为第  $i$  只斑马更新后的第  $j$  维,  $Z_j^P$  为先锋斑马的位置,  $Z_j^P$  表示先锋斑马的第  $j$  维,  $\mathbf{X}_{i,j}$  表示第  $i$  只斑马的第  $j$  维,  $\mathbf{X}_i$  为第  $i$  只斑马的位置,  $\mathbf{X}_i^{\text{new},\rho 1}$  为第  $i$  只斑马更新后的位置,  $F_i$  表示第  $i$  只斑马的适应度函数值,  $F_i^{\text{new},\rho 1}$  为第  $i$  只斑马更新后的适应度函数值,  $r, I$  分别为  $[0,1]$  和  $\{1,2\}$  之间的随机数。

模拟斑马对捕食者攻击的防御策略,以更新 ZOA 种群成员在搜索空间中的位置。斑马针对不同捕食者选择不同的防御策略,对狮子攻击的防御策略是以 Z 字形和随机的侧向转弯动作逃跑,此时使用式(3)中的  $S_1$  进行位置更新;面对小型捕食者(如豹子、鬣狗等)攻击时,则通过聚集在一起来恐吓和迷惑捕食者,此时斑马的位置更新公式通过式(3)中的  $S_2$  来更新。

$$\mathbf{X}_{i,j}^{\text{new},\rho 2} = \begin{cases} S_1: \mathbf{X}_{i,j} + R(2r-1)(1-t/T)\mathbf{X}_{i,j}, & P_s \leq 0.5, \\ S_2: \mathbf{X}_{i,j} + r(Z_j^A - I \cdot \mathbf{X}_{i,j}), & \text{否则。} \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathbf{X}_i = \begin{cases} \mathbf{X}_i^{\text{new},\rho 2}, & F_i^{\text{new},\rho 2} < F_i, \\ \mathbf{X}_i, & \text{否则。} \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{X}_{i,j}^{\text{new},\rho 2}$  为防御阶段第  $i$  只斑马更新后的第  $j$  维,  $\mathbf{X}_i^{\text{new},\rho 2}$  为防御阶段第  $i$  只斑马更新后的位置,  $Z_j^A$  表示被攻击斑马的位置,  $Z_j^A$  表示被攻击斑马的第  $j$  维,  $F_i^{\text{new},\rho 2}$  为防御阶段第  $i$  只斑马更新后的适应度函数值,  $R$  为 0.01 的常数,  $t$  为当前迭代次数,  $T$  为最大迭代次数,  $P_s$  是  $[0,1]$  之间随机生成的概率。

在 ZOA 中,斑马个体通过这 2 种行为(觅食行为和防御行为)来更新斑马的位置。在更新斑马的位置时,如果斑马在新位置中的目标函数具有更好的值,则接受该新位置。反之,则保留原始位置。最后,经过不断迭代得到最优解。ZOA 的伪代码如表 1 所示。

## 2 ZOA 的 Markov 模型

Markov 链是对随机过程进行分析的重要手段,指的是系统在任意一时刻所处状态组成的 Markov 随机序列。下面给出一些 ZOA 的相关定义,以便建立相应的 Markov 模型。

**定义 1** (斑马状态和斑马状态空间)依据 ZOA,设斑马状态为  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X} \in A$ ,  $A$  是可行解空间,斑马状态是由斑马觅食或防御时的位置构成的,斑马的所有可能状态组成的集合构成斑马个体状态空间,记为:  $\Phi = \{\mathbf{X} | \mathbf{X} \in A\}$ 。

**定义 2** (斑马群状态和斑马群状态空间)斑马群中所有斑马的状态构成斑马群状态,记为  $\mathbf{s} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N)$ ,  $\mathbf{X}_i$  表示第  $i$  只斑马的状态。对应的斑马群的状态空间记为:

$$S = \{\mathbf{s} | \mathbf{s} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N), \mathbf{X}_i \in \Phi, 1 \leq i \leq N\}.$$

**定义 3** (斑马状态转移)  $\forall \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \in \mathbf{s}$ , ZOA 迭代中,斑马个体状态由  $\mathbf{X}_i$  一步转移到  $\mathbf{X}_j$ , 记为  $T_s(\mathbf{X}_i) = \mathbf{X}_j$ 。

**定理 1** ZOA 中,斑马状态由  $\mathbf{X}_i$  一步转移到  $\mathbf{X}_j$  的概率为:

$$p(T_s(\mathbf{X}_i) = \mathbf{X}_j) = \begin{cases} p_1(T_s(\mathbf{X}_i) = \mathbf{X}_j), & \text{觅食阶段,} \\ p_2(T_s(\mathbf{X}_i) = \mathbf{X}_j), & \text{防御阶段。} \end{cases} \quad (5)$$

**证明** 斑马的群体为超空间的一组点集,则斑马群中个体位置更新的过程即是在超空间中进行点集之间的变换。根据定义 3 和 ZOA 的几何性质,可得斑马在觅食阶段由  $\mathbf{X}_i$  一步转移到  $\mathbf{X}_j$  的概率为:

$$p_1(T_s(\mathbf{X}_i)=\mathbf{X}_j)=\begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{Z}^p - I \cdot \mathbf{X}_i|} p_1(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j), \mathbf{X}_j \in [\mathbf{X}_i - \mathbf{X}^\alpha, \mathbf{X}_i + \mathbf{X}^\alpha], \\ 0, \text{否则。} \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\mathbf{Z}^p$  表示先锋斑马的位置,且

$$p_1(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j) = \begin{cases} 1, f(\mathbf{X}_j) < f(\mathbf{X}_i), \\ 0, f(\mathbf{X}_j) \geq f(\mathbf{X}_i). \end{cases} \quad (7)$$

$$\mathbf{X}^\alpha = \mathbf{Z}^p - I \cdot \mathbf{X}_i. \quad (8)$$

斑马在防御阶段时由  $\mathbf{X}_i$  一步转移到  $\mathbf{X}_j$  的概率为:

$$p_2(T_s(\mathbf{X}_i)=\mathbf{X}_j) = \begin{cases} \frac{p_1(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j)}{|R(2r-1)(1-t/T)\mathbf{X}_i|}, \mathbf{X}_j \in [\mathbf{X}_i - \mathbf{X}^\beta, \mathbf{X}_i + \mathbf{X}^\beta], P_s \leq 0.5, \\ \frac{p_1(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j)}{|\mathbf{Z}^A - I \cdot \mathbf{X}_i|}, \mathbf{X}_j \in [\mathbf{X}_i - \mathbf{X}^\gamma, \mathbf{X}_i + \mathbf{X}^\gamma], P_s > 0.5, \\ 0, \text{否则。} \end{cases} \quad (9)$$

其中:

$$\begin{cases} \mathbf{X}^\beta = R \cdot (2r-1)(1-t/T)\mathbf{X}_i, \\ \mathbf{X}^\gamma = \mathbf{Z}^A - I \cdot \mathbf{X}_i. \end{cases} \quad (10)$$

因为斑马的状态是由斑马的觅食和防御这 2 种行为更新的,所以斑马的一步状态转移率是由式(6)~(10)一起决定的。证毕

表 1 ZOA

Tab. 1 Zebra optimization algorithm

行号	伪代码
1	输入优化问题信息
2	设置迭代次数 $T$ 和斑马种群数量 $N$
3	初始化斑马的位置并评估目标函数
4	for ( $t=1:T$ )
5	更新先锋斑马的位置 $\mathbf{Z}^p$
6	for ( $t=1:N$ )
7	阶段 1(觅食):根据式(1),计算第 $i$ 只斑马的位置
8	根据式(2),更新第 $i$ 只斑马的位置
9	阶段 2(防御)
10	if ( $P_s \leq 0.5, P_s = \text{rand}$ )
11	策略 1:根据式(3)中的 $S_1$ ,计算第 $i$ 只斑马的位置
12	else
13	策略 2:根据式(3)中的 $S_2$ ,计算第 $i$ 只斑马的位置
14	end
15	根据式(4),更新第 $i$ 只斑马的位置
16	end
17	保存到目前为止的候选解
18	end
19	输出 ZOA 针对给定优化问题获得的最优解

**定义 4** (斑马群状态转移) ZOA 迭代中  $\forall s_i = (\mathbf{X}_{i1}, \mathbf{X}_{i2}, \dots, \mathbf{X}_{iN}) \in S, \forall s_j = (\mathbf{X}_{j1}, \mathbf{X}_{j2}, \dots, \mathbf{X}_{jN}) \in S$ , 斑马群状态由  $s_i$  一步转移到  $s_j$ , 记为  $T_s(s_i) = s_j$ 。

**定理 2** 斑马群状态由  $s_i$  一步转移到  $s_j$  概率为:

$$p(T_s(s_i) = s_j) = \prod_{k=1}^N p(T_s(\mathbf{X}_{ik}) = \mathbf{X}_{jk}). \quad (11)$$

**证明** 斑马群状态由斑马群中所有斑马的状态构成。斑马群状态由  $s_i$  一步转移到  $s_j$  表示斑马群  $s_i$  内所有斑马状态同时转移到斑马群  $s_j$  内所有斑马状态, 则转移概率为:

$$p(T_s(s_i) = s_j) = p(T_s(\mathbf{X}_{i1}) = \mathbf{X}_{j1}) \cdots p(T_s(\mathbf{X}_{ik}) = \mathbf{X}_{jk}) \cdots p(T_s(\mathbf{X}_{iN}) = \mathbf{X}_{jN}) = \prod_{k=1}^N p(T_s(\mathbf{X}_{ik}) = \mathbf{X}_{jk}), 1 \leq k \leq N. \quad \text{证毕}$$

**定理 3** ZOA 中产生的斑马种群序列  $\{s(t) : t \geq 0\}$  是有限齐次 Markov 链, 其中  $t$  为迭代次数。

**证明** 有限性。任何优化算法的搜索空间都是有限的, 任一斑马状态  $\mathbf{X}_i$  都是有限的, 因此斑马状态空间  $\Phi$  也是有限的。又因为斑马群状态  $s = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N)$  是  $N$  个斑马构成,  $N$  是有限正整数, 所以斑马群状态空间  $S$  是有限的。

Markov 性和齐次性。由定理 2 知, 斑马群状态序列  $\{s(t) : t \geq 0\}$  中,  $\forall s(t) \in S, \forall s(t+1) \in S$ , 转移概率  $p(T_s(s(t)) = s(t+1))$  由斑马群内所有斑马的转移概率  $p(T_s(X(t)) = X(t+1))$  决定。由定理 1 可知, 转移概率  $p(T_s(X(t)) = X(t+1))$  仅与  $t$  时刻的状态  $X(t)$  以及  $[0, 1]$  之间的随机数  $r, \{1, 2\}$  之间的随机数  $I$  相关。所以  $p(T_s(s(t)) = s(t+1))$  也仅与  $t$  时刻的状态相关, 而与  $t$  时刻无关, 则 ZOA 所产生的种群序列  $\{s(t) : t \geq 0\}$  具有 Markov 性和齐次性。 证毕

### 3 ZOA 的收敛性分析

#### 3.1 收敛准则

对于优化问题  $\langle A, f \rangle$ , 有随机优化算法 D, 第  $k$  次迭代的结果为  $x_k$ , 则下一次迭代的结果为  $x_{k+1} = D(x_k, \zeta)$ 。其中:  $A$  为可行解空间,  $f$  为适应度函数,  $\zeta$  为算法 D 迭代搜索中曾经搜索到的解<sup>[14]</sup>。

在 Lebesgue 测度空间定义搜索的下确界:

$$\psi = \inf(t : v[x \in A \mid f(x) < t] > 0).$$

其中:  $v[x]$  表示在集合  $x$  上的 Lebesgue 测度。因此可以定义最优区域为:

$$\mathbf{R}_{\epsilon, M} = \begin{cases} \{x \in A \mid f(x) < \psi + \epsilon\}, \psi \text{ 有限}, \\ \{x \in A \mid f(x) < -M\}, \psi = -\infty. \end{cases}$$

其中:  $\epsilon > 0, M$  为充分大的正数。如果随机算法 D 找到  $\mathbf{R}_{\epsilon, M}$  中的 1 个点, 则可认为算法找到了可接受的全局最优或近似全局最优点。

**假设 1**  $f(D(x_k, \zeta)) \leq f(x)$ , 若  $\zeta \in A$ , 则有:

$$f(D(x_k, \zeta)) \leq f(\zeta). \quad (12)$$

**假设 2** 对于  $A$  的任意博雷尔子集  $B$ , s. t.  $v[B] > 0$ , 则有  $\prod_{k=0}^{\infty} (1 - u_k[B]) = 0$ , 其中  $u_k[B]$  为算法 D 第  $k$  次迭代搜索在集合  $B$  上的概率测度。

**定理 4**<sup>[14]</sup> (随机算法全局收敛的充要条件) 设  $f(x)$  是可测的, 可测空间  $A$  是  $\mathbf{R}^n$  上可测子集, 算法 D 满足假设 1 和假设 2,  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  是算法 D 产生的解序列, 则有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p(x_k \in \mathbf{R}_{\epsilon, M}) = 1.$$

其中:  $p(x_k \in \mathbf{R}_{\epsilon, M})$  是算法第  $k$  步的解  $x_k$  在  $\mathbf{R}_{\epsilon, M}$  中的概率测度。

#### 3.2 ZOA 收敛性

**定义 5** (斑马群最优状态集  $G$ ) 设优化问题  $\langle A, f \rangle$  的最优解是  $\mathbf{X}^*$ , 定义斑马群的最优状态集  $G = \{s^* = (\mathbf{X}) \mid f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}^*), s \in S\}$ 。

**定义 6** (闭集)<sup>[15]</sup> 对于状态空间  $S$ , 若对  $S$  的非空子集  $C$  中的任何 2 个状态, 即  $\forall s_i \in C, \forall s_j \notin C$ , 都有  $p(T_s(s_i) = s_j) = 0$ , 则称  $S$  的非空子集  $C$  是一个闭集。

**定理 5**<sup>[15]</sup> (闭集的充要条件)  $C$  是闭集的充要条件为  $\forall s_i \in C, \forall s_j \notin C$ , 对于任意步长  $l, l \geq 1$  都有  $p_{s_i \rightarrow s_j}^{(l)} = 0$ 。

**定理 6** 斑马群位置状态空间  $S$  是一个闭集。

**证明** 由定理 3 知, ZOA 产生的种群序列  $\{s(t); t \geq 0\}$  是有限齐次 Markov 链, 且  $\forall s_i \in S, \sum_{s_j \in S} p(T_s(s_i) = s_j) = 1$ ,

则  $\forall s_i \in S, \forall s_j \notin S$ , 对于  $l, l \geq 1$  都有  $p_{s_i \rightarrow s_j}^{(l)} = 0$ 。由定理 5 知  $S$  是一个闭集。证毕

**定义 7** (可约)<sup>[16]</sup> 如果闭集  $C$  不包含任何真闭子集, 则称  $C$  为不可约的, 否则称为可约的。

**定理 7** ZOA 中, 对斑马群序列  $\{s(t); t \geq 0\}$  而言, 最优斑马群状态集  $G$  是状态空间  $S$  上的一个闭集。

**证明** 设  $\forall s_i \in G, \forall s_j \notin G$ , 对于任意转移步长  $l$ , 由切普曼-科尔莫戈罗夫方程可得:

$$p_{s_i \rightarrow s_j}^{(l)} = \sum_{s_{a_1} \in S} \sum_{s_{a_2} \in S} \cdots \sum_{s_{a_{l-1}} \in S} p(T_s(s_i) = s_{a_1}) \times p(T_s(s_{a_1}) = s_{a_2}) \times \cdots \times p(T_s(s_{a_{l-1}}) = s_j)。 \quad (13)$$

其中:  $p_{s_i \rightarrow s_j}^{(l)}$  表示斑马群状态  $s_i$  经过步长  $l$  转移到  $s_j$  的概率, 在式(13)展开式的每一项乘积表达式中都存在一项  $p(T_s(s_{a_{c-1}}) = s_{a_c})$ , 使得  $s_{a_{c-1}} \in G, s_{a_c} \notin G$ , 其中  $1 \leq c \leq l$ , 根据定理 2 的式(11)可得斑马群转移概率为:

$$p(T_s(s_{a_{c-1}}) = s_{a_c}) = \prod_{i=1}^N p(T_s(\mathbf{X}_{im}) = \mathbf{X}_{jm})。$$

由  $s_{a_{c-1}} \in G, s_{a_c} \notin G$ , 有  $f(\mathbf{X}_c) > f(\mathbf{X}_{c-1}) = f(\mathbf{X}^*)$ , 则存在  $p(T_s(s_{a_{c-1}}) = s_{a_c}) = 0$ , 故此时  $p_{s_i \rightarrow s_j}^{(l)} = 0$ , 由定理 5 可知,  $G$  是  $S$  上的一个闭集。证毕

**定理 8** 斑马群状态空间  $S$  是可约的。

**证明** 首先斑马种群状态空间  $S$  不含除  $G$  以外的闭集, 若斑马种群状态空间  $S$  存在一个非空闭集  $M$ , 使得  $M \cap G = \emptyset$ 。设  $s_i = (\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^*, \dots, \mathbf{X}^*) \in G, \forall s_j = (\mathbf{X}_{j1}, \mathbf{X}_{j2}, \dots, \mathbf{X}_{jd}) \in M$ , 有  $f(\mathbf{X}_{jc}) > f(\mathbf{X}^*)$ , 由定理 1 的式(5)与定理 2 的式(11), 当转移步长  $l$  趋于无穷时, 对于  $p_{s_i \rightarrow s_j}^{(l)}$ , 通过式(13)中的展开式有  $p(T_s(s_{a_{c+j-1}}) = s_{a_{c+j}}) > 0$ , 则  $M$  不是闭集, 与假设矛盾。因此斑马群状态的 Markov 链是可约的, 状态空间  $S$  不含除  $G$  以外的闭集。根据定理 6 知, 整个斑马种群状态空间  $S$  是一个闭集, 又根据定理 7 知, 最优斑马种群状态集  $G$  是斑马种群状态空间  $S$  上的一个闭集。综上所述, 斑马种群状态空间  $S$  是可约的。证毕

**定理 9**<sup>[17]</sup> 设 Markov 链有一个非空闭集  $E$ , 且不存在另外一个非空闭集  $F$ , 使得  $E \cap F = \emptyset$ , 当  $j \in E$  时, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(Y_n = j) = \pi_j$ ; 当  $j \notin E$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(Y_n = j) = 0$ 。

**定理 10** 当斑马群内部迭代趋于无穷时, 斑马群状态序列必将进入最优状态集  $G$ 。

**证明** 由定理 7、定理 8 得出状态空间  $S$  不含除  $G$  以外的闭集, 满足定理 9 条件。

当  $s \in G$  时, 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(s(t) = s) = \pi_j$ ; 当  $s \notin G$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(s(t) = s) = 0$ , 即可得出定理 10。证毕

**定理 11** ZOA 收敛到全局最优。

**证明** ZOA 每次迭代都要更新个体当前最优位置, 即:

$$\mathbf{X}_i = \begin{cases} \mathbf{X}_i, F_i \leq F_j, \\ \mathbf{X}_j, F_i > F_j. \end{cases}$$

故 ZOA 满足假设 1 的式(12)。由定理 10 知, ZOA 连续无穷次搜索不到全局最优解的概率为 0, 则有

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - u_k[B]) = 0, 0 < u_k[B] < 1,$$

其中:  $u_k[B]$  为 ZOA 第  $k$  次迭代搜索在集合  $B$  上的概率测度。满足假设 2, 通过定理 4 可以得出 ZOA 是一个全局收敛算法。证毕

## 4 ZOA 的仿真实验分析

为了验证本文理论的正确性以及比较各算法的收敛性和特点, 通过数值实验来验证本文算法的有效性。实验的操作环境为 Windows 10 操作系统、Intel(R) Core(TM) i5-8250U CPU @1.60 GHz 1.80 GHz、4.00 GB 内存。采用 Matlab 2020a 软件对 ZOA、WOA、GWO 和 PSO 进行仿真实验。选取不同特征的 16 个标准测试函数, 利用 ZOA、WOA、GWO 和 PSO 进行重复 30 次的寻优计算, 再从平均值、标准差和平均耗时 3 个方面进行比较。其中, 算法的收敛精度和寻优能力体现在平均值上, 算法局部极值的能力和稳定性体现在标准差上, 算法的快速性体现在平均耗时上。在 16 个标准测试函数中,  $F1$  (Sphere)、 $F2$  (Schwefel's Problem 2.22)、 $F3$

(Schwefel's Problem 1.2)、F4(Schwefel's Problem 2.21)、F5(Generalized Rosenbrock's Function)、F6(Step Function)、F7(Quartic Function i. e. Noise)是单峰函数,单峰函数能够很好地测试算法的收敛精度和寻优能力;F8(Generalized Schwefel's Problem 2.26)、F9(Generalized Rastrigin's Function)、F10(Ackley's Function)、F11(Generalized Griewank's Function)、F12(Generalized Penalized Function)、F13(Generalized Penalized Function)是多峰函数,多峰函数能够很好地测试算法的全局搜索能力以及避免局部最优的能力;F14(Shekel's Foxholes Function)、F15(Kowalik's Function)、F16(Six-Hump Camel-Back Function)是固定维多峰函数,固定维多峰函数能够很好地测试算法在低维时的全局搜索能力。在仿真实验中,若实验结果与函数的最优值相差小于  $10^{-8}$ ,就认为寻优成功。

为了使算法能够正常运行,选取相同的通用参数。种群大小设置为  $N=30$ ,维度为 30,最大迭代次数为  $T=1000$ 。分别对 4 种不同的算法进行参数设置,在 WOA、GWO 中, $a$  为收敛因子,在算法的迭代过程中起着控制算法探索与开发能力平衡的作用,在 PSO 中, $V_{\max}$  为最大速度, $\omega_{\max}$ 、 $\omega_{\min}$  分别为最大、最小惯性权重,如表 2 所示。

表 2 算法参数

Tab. 2 Parameters of algorithm

算法	参数设置
ZOA	$R=0.01$
WOA	$a$ 随迭代次数从 2 线性下降至 0
GWO	$a$ 随迭代次数从 2 线性下降至 0, $b=1$
PSO	$V_{\max}=6, c_1=c_2=2, \omega_{\max}=0.9, \omega_{\min}=0.6$

由表 3 的实验结果可以看出,ZOA 在单峰函数  $F1\sim F4$ 、 $F6$ ,多峰函数  $F9\sim F11$  以及固定维多峰函数  $F16$  上都成功地找到了全局最优值,说明 ZOA 具有收敛到全局最优的能力,从而验证了本文定理 11。虽然从收敛精度和寻优能力来看,与其他 3 种算法相比,ZOA 在  $F1\sim F4$ 、 $F6\sim F7$ 、 $F9\sim F11$ 、 $F14$  及  $F16$  上显示出最强的寻优能力,但是 ZOA 在局部极值的能力和稳定性以及平均耗时上都劣于另外 3 种算法。这是因为斑马个体在觅食阶段,ZOA 采取的是由先锋斑马将其他种群成员引向它所在的搜索空间中的位置。这种方式虽有助于寻找全局最优解,但容易使算法陷入局部最优解。斑马防御阶段虽然可以利用  $S_1$  和  $S_2$  有效地更新斑马的位置,但这种更新行为有时也容易导致算法陷入局部最优解。

表 3 实验结果

Tab. 3 Results of experimental

函数	性能指标	ZOA	WOA	GWO	PSO
F1	平均值	<b>0.00E+00</b>	3.53E-151	1.43E-58	2.79E-01
	标准差	9.36E-02	<b>4.28E-02</b>	4.44E-02	4.84E-02
	平均耗时/s	0.223	<b>0.102</b>	0.284	0.133
F2	平均值	<b>4.19E-265</b>	1.57E-101	1.26E-34	9.79E-01
	标准差	5.10E-02	3.16E-02	<b>1.39E-02</b>	3.64E-02
	平均耗时/s	0.274	<b>0.124</b>	0.273	0.14
F3	平均值	<b>0.00E+00</b>	2.24E+04	2.01E-15	7.12E+01
	标准差	4.12E-02	2.98E-02	<b>2.60E-02</b>	3.71E-02
	平均耗时/s	0.94	<b>0.465</b>	0.638	0.561
F4	平均值	<b>2.45E-231</b>	3.78E+01	2.10E-14	1.56E+00
	标准差	1.27E-02	<b>7.38E-03</b>	1.09E-02	9.84E-03
	平均耗时/s	0.191	<b>0.097</b>	0.26	0.111

续表 3

函数	性能指标	ZOA	WOA	GWO	PSO
F5	平均值	2.82E+01	2.72E+01	<b>2.69E+01</b>	3.36E+02
	标准差	5.96E-02	<b>9.55E-03</b>	1.89E-02	1.35E-02
	平均耗时/s	0.274	<b>0.143</b>	0.314	0.16
F6	平均值	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	1.37E+00
	标准差	2.95E-01	3.02E-02	3.23E-02	<b>1.06E-02</b>
	平均耗时/s	0.25	<b>0.117</b>	0.275	0.121
F7	平均值	<b>3.70E-05</b>	1.60E-03	8.50E-04	3.39E+00
	标准差	6.38E-02	<b>9.99E-03</b>	1.05E-02	1.35E-02
	平均耗时/s	0.515	<b>0.255</b>	0.406	0.266
F8	平均值	-6.54E+03	<b>-1.09E+04</b>	-5.97E+03	-6.77E+03
	标准差	3.02E-01	<b>9.35E-03</b>	1.17E-01	8.43E-02
	平均耗时/s	0.333	<b>0.14</b>	0.483	0.252
F9	平均值	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	9.12E-01	1.11E+02
	标准差	3.14E-01	7.28E-02	2.37E-02	<b>1.16E-02</b>
	平均耗时/s	0.588	0.174	0.3	<b>0.156</b>
F10	平均值	<b>8.88E-16</b>	5.03E-15	1.61E-14	1.21E+00
	标准差	1.41E-02	<b>9.76E-03</b>	5.70E-02	2.24E-02
	平均耗时/s	0.226	<b>0.12</b>	0.341	0.178
F11	平均值	<b>0.00E+00</b>	3.07E-03	2.41E-03	2.59E-02
	标准差	2.36E-02	2.48E-02	<b>1.68E-02</b>	2.50E-02
	平均耗时/s	0.296	<b>0.154</b>	0.318	0.187
F12	平均值	1.31E-01	9.82E-03	4.01E-02	<b>6.70E-03</b>
	标准差	2.06E-01	<b>3.64E-02</b>	8.69E-02	4.01E-02
	平均耗时/s	1.294	<b>0.628</b>	0.857	0.636
F13	平均值	2.18E+00	2.15E-01	5.01E-01	<b>1.18E-01</b>
	标准差	1.01E-01	<b>3.22E-02</b>	4.14E-02	4.97E-02
	平均耗时/s	1.245	<b>0.635</b>	0.797	0.657
F14	平均值	<b>2.38E+00</b>	2.50E+00	2.63E+00	2.84E+00
	标准差	4.17E-01	5.72E-02	4.24E-02	<b>1.81E-02</b>
	平均耗时/s	2.286	1.072	1.063	<b>0.997</b>
F15	平均值	1.67E-03	<b>5.78E-04</b>	5.74E-03	9.00E-04
	标准差	9.17E-02	7.43E-03	<b>7.19E-03</b>	9.90E-03
	平均耗时/s	0.197	0.088	0.105	<b>0.07</b>
F16	平均值	<b>-1.03E+00</b>	<b>-1.03E+00</b>	<b>-1.03E+00</b>	<b>-1.03E+00</b>
	标准差	4.34E-02	1.32E-02	1.27E-02	<b>6.05E-03</b>
	平均耗时/s	0.214	0.102	0.095	<b>0.052</b>

注:加黑的数据表示最优数据。

## 5 结论

在 ZOA 的基础上,利用随机过程中的马尔可夫理论,给出 ZOA 的斑马的状态空间、斑马群状态空间和斑马位置的转移概率数学定义,建立 ZOA 的 Markov 链模型,论证了斑马群状态序列 Markov 链是有限齐次的,且是可约状态空间。结合算法的全局收敛准则,证明了 ZOA 的 Markov 链模型能够满足随机搜索算法全局收敛的 2 个假设,验证了算法的全局收敛性。此外,仿真实验也成功地验证了本文理论证明的正确性,并体现出 ZOA 的特点。本文对算法的理解和改进有一定的理论指导意义,下一步将对 ZOA 进行更深入的研究,比如针对 ZOA 收敛速度慢和易陷入局部最优的不足,可以加入多种策略对 ZOA 进行改进,或者利用鞅理论对 ZOA 的收敛性作进一步的研究。

### 参考文献:

- [1] TROJOVSKÁ E, DEGHANI M, TROJOVSKY P. Zebra optimization algorithm: a new bio-inspired optimization algorithm for solving optimization algorithm[J]. *IEEE Access*, 2022, 10: 49445-49473.
- [2] ELYMANY M M, ENANY M A, ELSONBATY N A. Hybrid optimized-ANFIS based MPPT for hybrid microgrid using Zebra optimization algorithm and artificial Gorilla troops optimizer[J]. *Energy Conversion and Management*, 2024, 299: 117809.
- [3] SHAREEF S K K, CHAITANYA R K, CHENNUPALLI S, et al. Enhanced botnet detection in IoT networks using Zebra optimization and dual-channel GAN classification[J]. *Scientific Reports*, 2024, 14(1): 17148.
- [4] ZHOU S C, LI H H, FU X L, et al. Novel multi-classification dynamic detection model for Android malware based on improved Zebra optimization algorithm and Light GBM[J]. *Sensors*, 2024, 24(18): 5975.
- [5] QI Z Y, PENG S T, WU P S, et al. Renewable energy distributed energy system optimal configuration and performance analysis: improved Zebra optimization algorithm[J]. *Sustainability*, 2024, 16(12): 5016.
- [6] EL-HAGEEN H M, ALFAIFI Y H, ALBALAWI H, et al. Chaotic Zebra optimization algorithm for increasing the lifetime of wireless sensor network[J]. *Journal of Network and Systems Management*, 2024, 32(4): 85.
- [7] 王震, 王新春, 杨培宏, 等. 基于多策略融合斑马优化算法的特征选择方法[J]. *现代电子技术*, 2024, 47(18): 149-155.  
WANG Z, WANG X C, YANG P H, et al. Method of feature selection based on multiple-strategies fusion ZOA[J]. *Modern Electronics Technique*, 2024, 47(18): 149-155.
- [8] 苏晨, 王防修, 黄淄博. 融合正切搜索与竞争交配的斑马优化算法及应用[J]. *计算机科学与探索*, 2025, 19(4): 945-963.  
SU C, WANG F X, HUANG Z B. Integration of tangent search and competitive mating in Zebra optimization algorithm and its application[J]. *Journal of Frontiers of Computer Science and Technology*, 2025, 19(4): 945-963.
- [9] 任子晖, 王坚, 高岳林. 马尔科夫链的粒子群优化算法全局收敛性分析[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(4): 462-466.  
REN Z H, WANG J, GAO Y L. The global convergence analysis of particle swarm optimization algorithm based on Markov chain[J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(4): 462-466.
- [10] 刘晓东, 孙丽君, 陈天飞. 布谷鸟算法的收敛性分析及性能比较[J]. *计算机科学与探索*, 2020, 14(10): 1644-1655.  
LIU X D, SUN L J, CHEN T F. Convergence analysis and performance comparison of cuckoo search algorithm [J]. *Journal of Frontiers of Computer Science and Technology*, 2020, 14(10): 1644-1655.
- [11] 尚俊娜, 程涛, 岳克强, 等. 蝙蝠算法的 Markov 链模型分析[J]. *计算机工程*, 2017, 43(7): 198-202.  
SHANG J N, CHENG T, YUE K Q, et al. Markov chain model analysis of bat algorithm[J]. *Computer Engineering*, 2017, 43(7): 198-202.
- [12] 孙丽君, 冯斌斌, 陈天飞. 基于鞅论的灰狼优化算法全局收敛性分析[J]. *控制与决策*, 2022, 37(11): 2839-2848.  
SUN L J, FENG B B, CHEN T F. Global convergence analysis of grey wolf optimization algorithm based on martingale theory [J]. *Control and Decision*, 2022, 37(11): 2839-2848.
- [13] MIRJALILI S, LEWIS A. The whale optimization algorithm[J]. *Advances in Engineering Software*, 2016, 95: 51-67.
- [14] SOLIS F J, WETS R J B. Minimization by random search techniques[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1981, 6(1): 19-30.
- [15] 林元烈. 应用随机过程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.  
LIN Y L. Applying stochastic process[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.
- [16] LAWLER G F. Introduction to stochastic processes[M]. New York: Chapman and Hall, 2018.

[17] 张文修, 梁怡. 遗传算法的数学基础[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2000.

ZHANG W X, LIANG Y. Mathematical foundation of genetic algorithms[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2000.

## Optimization Algorithms and Its Applications

### Convergence Analysis of Zebra Optimization Algorithm

RAN Yi, MAO Ruohua, SI Yihan, LIU Xiaoyu

(National Center for Applied Mathematics in Chongqing, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** The zebra optimization algorithm is a brand-new optimization algorithm based on swarm intelligence. This algorithm has been successfully applied to solve many complex optimization problems. Although there are many improved algorithms based on the Zebra Optimization Algorithm, they all lack rigorous convergence analysis and cannot theoretically prove whether the algorithm can reach the global optimum. Therefore, the improved algorithms lack theoretical support. Therefore, the Markov theory in stochastic processes is utilized to conduct convergence analysis on the zebra optimization algorithm, laying a solid theoretical foundation for the improvement and engineering application of the zebra optimization algorithm. Firstly, the mathematical definitions of the zebra state space and the transition probability of the zebra position in the zebra optimization algorithm are given. Secondly, the Markov chain model of the zebra optimization algorithm is established. Then, it is demonstrated that the Markov chain of the zebra group state sequence is finite and homogeneous, and its state space is reducible. Finally, combined with the global convergence criterion of the algorithm, it is proved that the Markov chain model of the zebra optimization algorithm can meet the two assumptions of the global convergence of the random search algorithm, verifying the global convergence of the algorithm. In addition, numerical experiments on the zebra optimization algorithm are carried out by selecting 16 standard test functions with different characteristics. The correctness of the theoretical proof is successfully verified, and the characteristics of the zebra optimization algorithm are also demonstrated.

**Keywords:** zebra optimization algorithm; Markov chain; transition probability; convergence

(责任编辑 黄 颖)