

多目标优化中一种新的光滑化成就标量化函数法*

傅小恒, 唐莉萍

(重庆师范大学 重庆国家应用数学中心, 重庆 401331)

摘要:提出了一种新的光滑化成就标量化函数,并研究该函数在多目标优化中的应用。首先,将成就标量化函数中的有限极大项重构为有限个加函数 $\max\{x, 0\}$ 的和,并基于对加函数 $\max\{x, 0\}$ 的光滑化,构建了一种新的光滑化成就标量化函数。其次,研究了光滑化成就标量化问题的解与多目标优化问题(弱)有效解的关系。最后,实验结果表明,光滑化成就标量化方法在解的均匀分布性及帕累托前沿面的逼近度上,优于传统的线性加权和法和成就标量化函数法。

关键词:多目标优化;成就标量化函数;光滑化方法

中图分类号:O221.6

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2025)02-0049-10

多目标优化是优化领域中的重要研究分支,主要研究在某种意义下同时优化多个相互冲突的目标函数的问题。当前,多目标优化已成为研究实际问题时进行建模、分析、求解的重要手段之一。例如,投资组合问题中的马科维茨均值-方差模型:收益最大化和风险最小化;工程中汽车发动机支架的设计问题:质量最小化和频率最大化;炼油生产过程中需要同时考虑产量最大化和污染最小化等,这些问题的求解通常依赖于多目标优化方法。

标量化方法是一类求解多目标优化问题的重要且有效的方法,主要思想是将多目标优化问题转化为单目标优化问题,通过求解单目标优化问题来达到求解多目标优化问题的目的。经典的标量化方法是线性加权和法^[1]。但该方法仅适用于凸性或者广义凸性条件下的多目标优化问题。对于非凸多目标优化问题,通常采用 ϵ -约束法^[1]、切比雪夫标量法^[2]和成就标量化函数法^[3]等。其中,成就标量化函数法主要通过将每个目标函数与参考点的距离进行加权比较,从而找到尽可能接近参考点的解,因而被广泛应用于各种多目标优化问题中。

针对如下多目标优化问题(MOP):

$$\min_{x \in X} f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), \quad (1)$$

其中: $X \subset \mathbf{R}^n$ 是可行域,目标函数 $f_i(x) (i=1, 2, \dots, m)$ 连续可微,成就标量化函数法的常见形式^[4]:

$$\min_{x \in X} g^{(\text{ASF})}(x | \lambda) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i (f_i(x) - z_i)\} + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i (f_i(x) - z_i), \quad (2)$$

其中: $X \subset \mathbf{R}^n$ 是可行域, $f_i(x)$ 表示第 i 个目标函数, $z \in \mathbf{R}^m$ 是任意给定的参考点, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ 是单纯形 $\Delta^{m-1} = \{\lambda \in \mathbf{R}^m \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, m\}$ 中的偏好向量, $\rho > 0$ 是一个很小的系数(通常可取 $\rho = 10^{-6}$)。

利用成就标量化问题(2),可以获得多目标优化问题(1)的(弱、真)有效解。然而,成就标量化函数中存在非光滑的 $\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i (f_i(x) - z_i)\}$ 项,进而降低了求解效率。

一类处理有限极大项的方法是引入一个新的独立变量,将有限极大项等价地转化为约束条件。基于该思想,成就标量化问题(2)可等价变换为如下的约束优化问题:

* 收稿日期:2024-12-26 修回日期:2025-03-05 网络出版时间:2025-04-30T10:19

资助项目:国家自然科学基金——重大项目(No. 11991024),重点项目(No. 12431010),面上项目(No. 12171060);重庆市自然科学基金项目(No. ncsmc2022-msxm01, No. CSTB2024NSCQ-LZX0140);重庆市教育委员会科学技术研究计划重大项目(No. KJZD-M202300504);重庆师范大学博望学者青年拔尖人才项目;重庆师范大学博士启动基金项目(No. 22XLB006)

第一作者简介:傅小恒,男,研究方向为多目标优化理论, E-mail: 1352886841@qq.com;通信作者:唐莉萍,女,教授,博士, E-mail: tanglipings@163.com

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/50.1165.n.20250429.1553.014>

$$\begin{aligned} & \min_{x \in X} t + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i (f_i(x) - z_i), \\ & \text{s. t. } \lambda_i (f_i(x) - z_i) \leq t, \forall i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

此类问题可以利用经典优化方法,如序列二次规划法(SQP算法)和可行方向法等进行求解。然而,这种等价变换虽然在理论上可行,但由于引入了额外的约束条件,导致问题的复杂性增加,从而降低了计算效率。

另一种处理有限极大项的方法则是光滑化。1992年,Li^[5]基于最大熵原理^[6]对有限极大项构造一个指数形式的光滑逼近函数,进而得到一族带有光滑参数的光滑优化问题。通过选择适当的光滑参数,设计了求解有限极大极小优化问题的光滑化算法。随后,Ye等人^[7]利用罚函数原理,通过将有限极大项转化为加函数 $\max\{x, 0\}$,在不可微点的某一邻域内构造一个多项式形式的光滑逼近函数,进而设计了求解有限极大极小优化问题的修正牛顿算法。此外,Bagirov等人^[8]基于罚函数原理,通过将有限极大项转化为极大值函数 $\max\{x, 0\}$,构造一个双曲形式的光滑逼近函数,分别讨论了原问题与光滑化问题间稳定点和局部解的关系,进而设计了求解有限极大极小优化问题的光滑化算法。

由于光滑化方法保持了原问题约束不变或无约束的特点,又能够使得目标函数光滑,因此可以利用多种求解光滑优化问题的方法来获得原问题的解。近期,Lin等人^[9]基于卷积光滑化方法^[10],对切比雪夫标量化函数^[2]进行光滑逼近,提出了一类新的光滑切比雪夫标量化函数,研究了光滑切比雪夫标量化问题的解以及稳定点与多目标优化问题的(弱)有效解以及稳定点间的关系,并通过数值实验表明,在固定的光滑参数情形下,光滑切比雪夫标量化方法优于经典的切比雪夫标量化方法。

受文献[7-9]的启发,本文基于对成就标量化函数的光滑化,提出一种新的光滑成就标量化函数,并研究其在多目标优化中的应用。首先,将成就标量化函数中的有限极大项转化为有限个加函数 $\max\{x, 0\}$ 的和,并基于对加函数 $\max\{x, 0\}$ 的光滑化,提出了一种新的光滑成就标量化函数(smoothing achievement scalarizing functions,简称SASF)。其次,利用光滑成就标量化问题的解,获得了多目标优化问题的(弱)有效解;通过多目标优化问题的(弱)有效解,得到了光滑成就标量化问题的近似解。最后,实验结果表明,与传统的线性加权和法和成就标量化函数法相比,光滑成就标量化函数法不仅能够更短时间内生成分布尽可能均匀的点,还在帕累托前沿面上的逼近效果更好。

1 预备知识

设 \mathbf{R}^n 是 n 维欧氏空间, \mathbf{R}_+^n 表示 \mathbf{R}^n 的非负象限。对任意的 $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$,定义如下序关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{z} & \Leftrightarrow y_i = z_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{y} < \mathbf{z} & \Leftrightarrow y_i < z_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{y} \leq \mathbf{z} & \Leftrightarrow y_i \leq z_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{y} \leq \mathbf{z} & \Leftrightarrow \mathbf{y} \leq \mathbf{z}, \mathbf{z} \neq \mathbf{y}. \end{aligned}$$

记 $\mathbf{R}_+^n := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$ 和 $\Delta^{m-1} = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^m \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, m \right\}$ 。

本文考虑带凸约束集合 X 的多目标优化问题(1)。下面给出多目标优化问题(1)的(弱)有效解和凸函数的定义。

定义 1^[3] 设 $\bar{\mathbf{x}} \in X$,有:

- 1) 如果不存在 $\mathbf{x} \in X$,使得 $f(\mathbf{x}) < f(\bar{\mathbf{x}})$,则称 $\bar{\mathbf{x}}$ 是多目标优化问题(1)的弱有效解。
- 2) 如果不存在 $\mathbf{x} \in X$,使得 $f(\mathbf{x}) \leq f(\bar{\mathbf{x}})$,则称 $\bar{\mathbf{x}}$ 是多目标优化问题(1)的有效解。

定义 2^[3] 设 $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, X \subset \mathbf{R}^n$,若对任意 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \lambda \in (0, 1)$,有:

$$h(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda h(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)h(\mathbf{x}_2),$$

则称 h 为在 X 上的凸函数。

2 一种新的光滑成就标量化函数及其在多目标优化中的应用

本部分基于成就标量化函数的光滑化,提出新的光滑成就标量化函数。首先将成就标量化函数中有限极大项重构为加函数 $\max\{x, 0\}$ 的有限项和;再基于Chen等人^[11]借助卷积光滑化方法对加函数 $\max\{v, 0\}$ 进行

的光滑化逼近,构建出一类新的光滑化成就标量化函数。

考虑成就标量化问题(2),其可以等价转换为优化问题(3)。虽然这些方法克服了问题(2)的不可微性,但是这些方法增加了约束条件,使得实际计算效率不理想。利用罚函数的思想,首先将问题(3)转化为含有加函数 $\max\{x, 0\}$ 的优化问题:

$$\min_{(\mathbf{x}, t) \in X \times \mathbf{R}} F(\mathbf{x}, t) = t + \sum_{i=1}^m \max\{0, \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) - t\} + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i), \quad (4)$$

其中: $X \subset \mathbf{R}^n$ 是非空凸集, $f_i(\mathbf{x})$ 表示第 i 个目标函数, $\boldsymbol{\lambda} \in \Delta^{m-1}$ 是偏好向量, $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$ 是任意给定的参考点, $\rho > 0$ 是一个很小的系数。

定理 1 问题(2)等价于优化问题(4)。

证明 任意取定 $\mathbf{x} \in X$, 令 $f_0(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq m} \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i)$, 则有:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, f_0(\mathbf{x})) &= f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \max\{0, \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) - f_0(\mathbf{x})\} + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) = \\ &= f_0(\mathbf{x}) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i). \end{aligned}$$

因为函数 $F(\mathbf{x}, t) = t + \sum_{i=1}^m \max\{0, \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) - t\} + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i)$ 是关于 t 的分段线性凸函数, 最小值在端点处 $\lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ 取得。对于任意的 $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, 有:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \lambda_k(f_k(\mathbf{x}) - z_k)) &= \lambda_k(f_k(\mathbf{x}) - z_k) + \sum_{i=1}^m \max\{0, \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) - \lambda_k(f_k(\mathbf{x}) - z_k)\} + \\ &+ \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) \geq \lambda_k(f_k(\mathbf{x}) - z_k) + f_0(\mathbf{x}) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) - \lambda_k(f_k(\mathbf{x}) - z_k) = \\ &= f_0(\mathbf{x}) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) = F(\mathbf{x}, f_0(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

从而:

$$\min_{t \in \mathbf{R}} F(\mathbf{x}, t) = f_0(\mathbf{x}) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) = \max_{1 \leq i \leq m} \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i). \quad (5)$$

于是:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) \right\} = \min_{\mathbf{x} \in X} \min_{t \in \mathbf{R}} F(\mathbf{x}, t) = \min_{(\mathbf{x}, t) \in X \times \mathbf{R}} F(\mathbf{x}, t). \quad \text{证毕}$$

定理 1 表明上述等价变换维持了原问题的约束。但由于问题(4)中的加函数 $\max\{v, 0\}$ ($v \in \mathbf{R}$) 是不可微的, 所以导致问题(4)是非光滑优化问题。注意到, Chen 等人^[11]借助卷积对加函数 $\max\{v, 0\}$ 进行了光滑化, 构造了如下的光滑函数:

$$\varphi(v, \mu) = \mu \ln(1 + e^{v/\mu}), \quad (\mu > 0),$$

其中 μ 为光滑参数。Chen 等人^[11]建立了光滑函数 $\varphi(v, \mu)$ 的如下性质。

引理 1^[11] 1) 对于任意正整数 k , $\varphi(v, \mu)$ 是关于 v 的 k 阶连续可微函数。

2) $\varphi(v, \mu)$ 关于 v 在 \mathbf{R} 上是严格单增、严格凸函数。

3) $\forall v \in \mathbf{R}$, 有 $\varphi(v, \mu) > \max\{0, v\}$ 。

4) $\max_{v \in \mathbf{R}} \{\varphi(v, \mu) - \max\{0, v\}\} = \varphi(0, \mu) = \mu \ln 2$ 。

5) $\forall v \in \mathbf{R}$, 有 $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \varphi(v, \mu) = \max\{0, v\}$ 。

6) $\forall v \in \mathbf{R}$, 当 $\mu_1 > \mu_2$ 时, 有 $\varphi(v, \mu_1) \geq \varphi(v, \mu_2)$ 。

由引理 1 中 1)~4), 易知:

$$\varphi(v, \mu) \geq \max\{0, v\} \geq \varphi(v, \mu) - \mu \ln 2, \quad \forall v \in \mathbf{R}.$$

由于 $\varphi(v, \mu)$ 有上述重要性质, 借助函数 $\varphi(v, \mu) = \mu \ln(1 + e^{v/\mu})$ ($\mu > 0$) 对问题(4)的目标函数中的加函数进行光滑化, 进而构造一个新的光滑成就标量化函数:

$$g_{\mu}^{(\text{SASF})}((\mathbf{x}, t) | \boldsymbol{\lambda}) = t + \mu \sum_{i=1}^m \ln(1 + e^{\frac{\lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i) - t}{\mu}}) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}) - z_i),$$

其中: $\mu > 0$ 是光滑参数, $\lambda \in \Delta^{m-1}$ 是偏好向量, $z \in \mathbf{R}^m$ 是任意给定的参考点, $\rho > 0$ 是一个较小的系数。光滑参数 μ 能够控制光滑函数 $g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$ 对 $F(x, t)$ 的逼近程度。由引理 1, 显然有:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \left(t + \mu \sum_{i=1}^m \ln(1 + e^{\frac{\lambda_i(f_i(x) - z_i) - t}{\mu}}) \right) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(x) - z_i) = F(x, t),$$

即 $g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$ 是 $F(x, t)$ 的光滑化逼近函数。关于光滑成就标量化函数 $g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$ 有如下重要性质。

引理 2 如果所有目标函数 $f_i(x), i=1, 2, \dots, m$ 是凸函数, 那么对任意的 $\mu > 0$ 和任意的 $\lambda \in \Delta^{m-1}$, 光滑化成就标量化函数 $g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$ 关于 $(x, t) \in X \times \mathbf{R}$ 是凸函数。

证明 由文献 [12] 的定理 1 直接推出。

证毕

引理 2 说明光滑成就标量化函数 $g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$ 能够保持原函数 $f_i(x), i=1, 2, \dots, m$ 的凸性。

引理 3 对任意的 $(x, t) \in X \times \mathbf{R}$, 若 $\mu_1 > \mu_2 > 0$, 则有 $g_{\mu_1}^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda) \geq g_{\mu_2}^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$ 。

证明 $\forall (x, t) \in \mathbf{R}^{n+1}$, 根据引理 1 知 $\varphi(t, \mu)$ 关于 μ 严格单增, 则当 $\mu_1 > \mu_2 > 0$ 时, 有:

$$\varphi(\lambda_i(f_i(x) - z_i) - t, \mu_1) \geq \varphi(\lambda_i(f_i(x) - z_i) - t, \mu_2), i=1, 2, \dots, m.$$

从而有 $g_{\mu_1}^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda) \geq g_{\mu_2}^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$ 。

证毕

引理 4 对任意的 $(x, t) \in X \times \mathbf{R}$, 有 $0 \leq g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda) - F(x, t) \leq m\mu \ln 2$ 。

证明 任意取定 $(x, t) \in X \times \mathbf{R}$, 根据 $\varphi(t, \mu)$ 的性质 $0 \leq \varphi(t, \mu) - \max\{0, t\} \leq \mu \ln 2$, 则有:

$$0 \leq \varphi(\lambda_i(f_i(x) - z_i) - t, \mu) - \max\{0, \lambda_i(f_i(x) - z_i) - t\} \leq \mu \ln 2.$$

根据上述不等式以及 $g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$ 的定义, 可知 $0 \leq g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda) - F(x, t)$, 且:

$$\begin{aligned} 0 \leq g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda) - F(x, t) &= t + \sum_{i=1}^m \mu \ln(1 + e^{\frac{\lambda_i(f_i(x) - z_i) - t}{\mu}}) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(x) - z_i) - \\ &\quad t - \sum_{i=1}^m \max\{0, \lambda_i(f_i(x) - z_i) - t\} - \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(x) - z_i) = \\ &\quad \sum_{i=1}^m (\mu \ln(1 + e^{\frac{\lambda_i(f_i(x) - z_i) - t}{\mu}}) - \max\{0, \lambda_i(f_i(x) - z_i) - t\}) = \\ &\quad \sum_{i=1}^m (\varphi(\lambda_i(f_i(x) - z_i) - t, \mu) - \max\{0, \lambda_i(f_i(x) - z_i) - t\}) \leq m\mu \ln 2. \end{aligned}$$

证毕

引理 4 表明 $g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$ 是对 $F(x, t)$ 的上逼近, 且对 $F(x, t)$ 的逼近程度可以通过原多目标优化问题的目标函数的个数 m 和光滑参数 μ 来控制。

利用光滑化成就标量化函数 $g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$, 构建如下的标量化问题:

$$\min_{(x, t) \in X \times \mathbf{R}} g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda) = \left(t + \sum_{i=1}^m \mu \ln(1 + e^{\frac{\lambda_i(f_i(x) - z_i) - t}{\mu}}) \right) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(x) - z_i). \quad (6)$$

问题(6)的最优解和近似最优解的概念, 见如下定义。

定义 3 设 $\mu > 0, \lambda \in \Delta^{m-1}, z \in \mathbf{R}^m$ 是任意给定的参考点, 且 $\rho > 0$ 是很小的系数。

1) 如果存在 $(x^*, t^*) \in X \times \mathbf{R}$, 使得对任意的 $(x, t) \in X \times \mathbf{R}$, 有 $g_\mu^{(\text{SASF})}((x^*, t^*) | \lambda) \leq g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$, 则称 (x^*, t^*) 为 $g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$ 在 $X \times \mathbf{R}$ 上的最优解。

2) 设 $\epsilon \geq 0$ 。如果存在 $(x^*, t^*) \in X \times \mathbf{R}$, 使得对任意的 $(x, t) \in X \times \mathbf{R}$, 有:

$$g_\mu^{(\text{SASF})}((x^*, t^*) | \lambda) \leq g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda) + \epsilon,$$

则称 (x^*, t^*) 为 $g_\mu^{(\text{SASF})}((x, t) | \lambda)$ 在 $X \times \mathbf{R}$ 上的 ϵ -最优解。

下面针对多目标优化问题(1)的(弱)有效解, 利用光滑化成就标量化问题(6)建立相应的标量化结果。

定理 2 设 $\mu > 0, \lambda \in \Delta^{m-1}, z \in \mathbf{R}^m$ 是任意给定的参考点, 且 $\rho > 0$ 是很小的系数。若 $(x^*, t^*) \in X \times \mathbf{R}$ 是光滑化成就标量化问题(6)的最优解, 则 $x^* \in X$ 是多目标优化问题(6)的弱有效解。此外, 如果下面任一条件满足:

1) 所有的偏好系数 λ_i 为正 ($\lambda_i > 0 \forall i$);

2) $(x^*, t^*) \in X \times \mathbf{R}$ 是光滑化成就标量化问题(6)的唯一最优解。

则 $x^* \in X$ 是多目标优化问题(1)的有效解。

证明 反证法。若 $x^* \in X$ 不是多目标优化问题(1)的弱有效解, 则存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $f(\hat{x}) < f(x^*)$ 。从

而有:

$$g_{\mu}^{(\text{SASF})}((\hat{\mathbf{x}}, t^*) | \boldsymbol{\lambda}) = t^* + \sum_{i=1}^m \mu \ln(1 + e^{\frac{\lambda_i(f_i(\hat{\mathbf{x}}) - z_i) - t^*}{\mu}}) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\hat{\mathbf{x}}) - z_i) <$$

$$t^* + \sum_{i=1}^m \mu \ln(1 + e^{\frac{\lambda_i(f_i(\mathbf{x}^*) - z_i) - t^*}{\mu}}) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}^*) - z_i);$$

这与 $(\mathbf{x}^*, t^*) \in X \times \mathbf{R}$ 是光滑化成就标量化问题(6)的最优解矛盾。故 \mathbf{x}^* 是多目标优化问题(1)的弱有效解。

下面证明在条件 1) 或条件 2) 下, \mathbf{x}^* 为多目标优化问题(1)的有效解。

情形 1, 假设条件 1) 成立, 即所有的偏好向量 λ_i 为正。如果 \mathbf{x}^* 不是多目标优化问题(1)的有效解, 则有 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 使得:

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}^*). \quad (7)$$

注意到, $\lambda_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}$ 。结合(7)式, 得到:

$$g_{\mu}^{(\text{SASF})}((\hat{\mathbf{x}}, t^*) | \boldsymbol{\lambda}) = t^* + \sum_{i=1}^m \mu \ln(1 + e^{\frac{\lambda_i(f_i(\hat{\mathbf{x}}) - z_i) - t^*}{\mu}}) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\hat{\mathbf{x}}) - z_i) <$$

$$t^* + \sum_{i=1}^m \mu \ln(1 + e^{\frac{\lambda_i(f_i(\mathbf{x}^*) - z_i) - t^*}{\mu}}) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}^*) - z_i),$$

这与 (\mathbf{x}^*, t^*) 是光滑化成就标量化问题(6)的最优解矛盾。故 \mathbf{x}^* 是多目标优化问题(1)的有效解。

情形 2, 假设条件 2) 成立, 即 (\mathbf{x}^*, t^*) 是光滑化成就标量化函数的唯一解。如果 \mathbf{x}^* 不是多目标优化问题(1)的有效解, 则存在 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 满足式(7), 则有:

$$g_{\mu}^{(\text{SASF})}((\hat{\mathbf{x}}, t^*) | \boldsymbol{\lambda}) = t^* + \sum_{i=1}^m \mu \ln(1 + e^{\frac{\lambda_i(f_i(\hat{\mathbf{x}}) - z_i) - t^*}{\mu}}) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\hat{\mathbf{x}}) - z_i) \leq$$

$$t^* + \sum_{i=1}^m \mu \ln(1 + e^{\frac{\lambda_i(f_i(\mathbf{x}^*) - z_i) - t^*}{\mu}}) + \rho \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(\mathbf{x}^*) - z_i);$$

与 (\mathbf{x}^*, t^*) 是光滑化成就标量化问题(6)的唯一解矛盾。因此 \mathbf{x}^* 是多目标优化问题(1)的有效解。证毕

定理 3 设 $\rho > 0$ 是很小的系数, $\mu > 0, \mathbf{x}^* \in X, \epsilon \geq m\mu \ln 2$ 。如果 \mathbf{x}^* 是多目标优化问题(1)的弱有效解或有效解, 那么存在 $z = f(\mathbf{x}^*)$, 使得对任意的 $\boldsymbol{\lambda} \in \Delta^{m-1}, (\mathbf{x}^*, 0) \in X \times \mathbf{R}$ 是光滑化成就标量化问题(6)的 ϵ -最优解。

证明 由文献[3]定理 3.5.7 可知, 如果 $\mathbf{x}^* \in X$ 是多目标优化问题(1)的弱有效解或有效解, 那么存在 $z = f(\mathbf{x}^*)$, 使得任意的 $\boldsymbol{\lambda} \in \Delta^{m-1}, \mathbf{x}^*$ 是成就标量化问题(2)的最优解, 且 $g^{(\text{ASF})}(\mathbf{x}^* | \boldsymbol{\lambda}) = 0$ 。根据定理 1 和式(5), 可知 $(\mathbf{x}^*, 0)$ 是 $F(\mathbf{x}, t)$ 在 $X \times \mathbf{R}$ 上的最优解且 $F(\mathbf{x}^*, 0) = 0$ 。

当 $z = f(\mathbf{x}^*)$ 且 $\epsilon \geq m\mu \ln 2$ 时, 根据引理 4, 对任意的 $(\mathbf{x}, t) \in X \times \mathbf{R}$, 有:

$$g_{\mu}^{(\text{SASF})}((\mathbf{x}^*, 0) | \boldsymbol{\lambda}) = m\mu \ln 2 = F(\mathbf{x}^*, 0) + m\mu \ln 2 \leq F(\mathbf{x}, t) + m\mu \ln 2 \leq g_{\mu}^{(\text{SASF})}((\mathbf{x}, t) | \boldsymbol{\lambda}) + \epsilon,$$

则当 $z = f(\mathbf{x}^*)$ 时, 对任意的 $\boldsymbol{\lambda} \in \Delta^{m-1}, (\mathbf{x}^*, 0)$ 是光滑化成就标量化问题(6)的 ϵ -最优解。证毕

定理 2 和定理 3 给出了在新的光滑成就标量化方法下, 标量化问题与原多目标优化问题间全局解的关系。

3 数值实验

本文利用 Matlab2016b 进行数值实验, 对线性加权和法 (WS)、成就标量化函数法 (ASF) 以及光滑化成就标量化函数法 (SASF) 3 种标量化方法进行比较。其中 WS 具体形式为:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} g^{(\text{WS})}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in X} \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\mathbf{x}),$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Delta^{m-1} = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^m \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, m\}$ 是偏好向量。

为了评估这 3 种方法, 本文选择了 10 个多目标优化问题进行研究。表 1 详细列出了每个测试问题的名称、来源、维数及取值范围。本文选取 Matlab 中 fmincon 函数作为优化工具, 对每个目标函数的权重 λ_i 在 $[0, 1]$ 均匀取得。成就标量化函数法和光滑成就标量化函数法在测试问题中的参考点选取相同。本文在所有实验中选择固定的光滑参数 $\mu = 0.05$ 和系数 $\rho = 10^{-6}$ 。

表 1 测试问题
Tab. 1 Text problems

测试问题	来源	维数	目标函数	变量范围
SCH	[13]	1	$f_1(x) = x^2, f_2(x) = (x-2)^2$	$[-10^3, 10^3]$
FON	[14]	3	$f_1(\mathbf{x}) = 1 - \exp(-\sum_{i=1}^3 (x_i - 1/\sqrt{3})^2)$ $f_2(\mathbf{x}) = 1 - \exp(-\sum_{i=1}^3 (x_i + 1/\sqrt{3})^2)$	$[-4, 4]$
MHHM1	[15]	1	$f_1(x) = (x-0.8)^2$ $f_2(x) = (x-0.85)^2$ $f_3(x) = (x-0.9)^2$	$[0, 1]$
MHHM2	[15]	2	$f_1(\mathbf{x}) = (x_1-0.8)^2 + (x_2-0.6)^2$ $f_2(\mathbf{x}) = (x_1-0.85)^2 + (x_2-0.7)^2$ $f_3(\mathbf{x}) = (x_1-0.9)^2 + (x_2-0.6)^2$	$[0, 1]$
VFM1	[16]	2	$f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_2-1)^2$ $f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_2+1)^2 + 1$ $f_3(\mathbf{x}) = (x_1-1)^2 + x_2^2 + 2$	$[-2, 2]$
DGO1	[17]	1	$f_1(x) = \sin(x), f_2(x) = \sin(x+0.7)$	$[-10, 13]$
IM1	[18]	2	$f_1(\mathbf{x}) = 2\sqrt{x_1}, f_2(\mathbf{x}) = x_1(1-x_2) + 5$	$x_1 \in [1, 4]$ $x_2 \in [1, 2]$
VU1	[19]	2	$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 1$	$[-3, 3]$
VU2	[19]	2	$f_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 1, f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2 - 1$	$[-3, 3]$
ZDT4	[20]	10	$f_1(\mathbf{x}) = x_1$ $f_2(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})[1 - \sqrt{x_1/g(\mathbf{x})}]$ $g(\mathbf{x}) = 81 + \sum_{i=2}^{10} [x_i^2 - 10\cos(4\pi x_i)]$	$x_1 \in [0, 1]$ $x_i \in [-5, 5]$ $i = 2, \dots, 10$

本文采用超体积 (hyper volume, 简称 HV) ^[21] 和世代距离 (GD) ^[22] 作为评价指标。超体积度量了由算法生成的非支配解集在目标空间中相对于一个预定义参照点所围成的总体积, 超体积值越大意味着算法能够找到更接近真实帕累托前沿的解, 并且这些解在前沿上分布得更加均匀。世代距离是衡量算法近似帕累托解集与真实帕累托前沿之间的距离的方法, 世代距离的值越小, 则说明解集收敛性越好。

本文采用文献[23]中的性能分析器 (performance profiles), 对 10 个测试问题用 3 种方法取得的 HV、GD 及时间效率进行了全面的性能评估(图 1~图 3)。图 1 直观展示了 3 种方法的 HV 性能评估的结果, 其中 SASF 展现出显著优势, 表现超越了 ASF 和 WS, 而 ASF 则优于 WS。这一结果表明, 在所选的 10 个测试问题中, SASF 在 HV 指标上性能最佳, 不仅能够更精准地找到接近真实帕累托前沿的解, 而且这些解在帕累托前沿上分布也更为均匀。图 4 用 3 种方法解决 VU1 问题可以看出 SASF 效果最好。

图 2 直观地揭示了 GD 的性能评估结果, 其中 SASF 明显优于 ASF 和 WS, 而 ASF 同样优于 WS, 可以看出 SASF 的收敛到解集的效果最好。图 3 呈现了时间性能评估的结果, 总体来看, SASF 表现最佳, WS 要优于 ASF。尽管在某些特定问题上, WS 在时间方面展现出了优于 SASF 的性能, 但值得注意的是, WS 在处理非凸问题时存在明显缺陷, 会丢失所有解, 这一点在图 5~6 中 IM1 和 FON 问题中得到了明确体现。在 3 个目标问题中, 图 7 也能看出 SASF 函数在 MHHM2 问题中也能取得很好的效果。综上所述, SASF 在测试问题中优于经典的 ASF 和 WS, 不仅验证了 SASF 能够在多目标优化问题中取得良好的效果, 而且说明了光滑化方法能够提升成就标量化方法的效率。

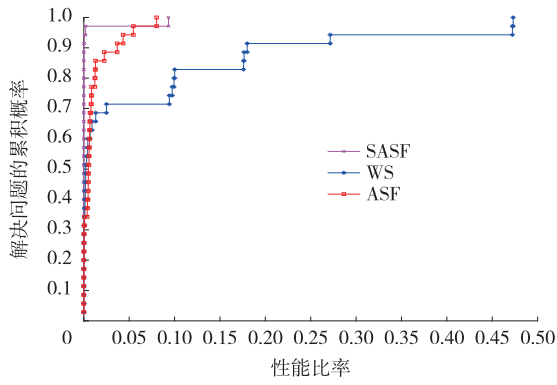


图 1 HV 性能评估

Fig. 1 HV performance evaluation

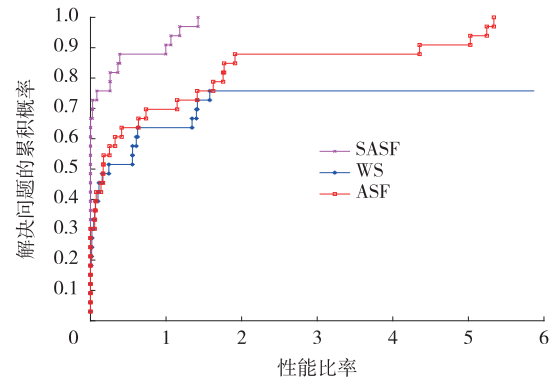


图 2 GD 性能评估

Fig. 2 GD performance evaluation

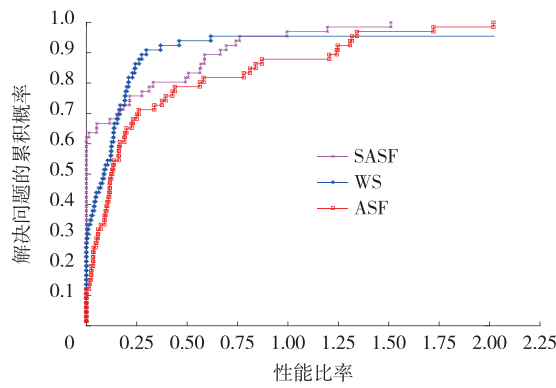
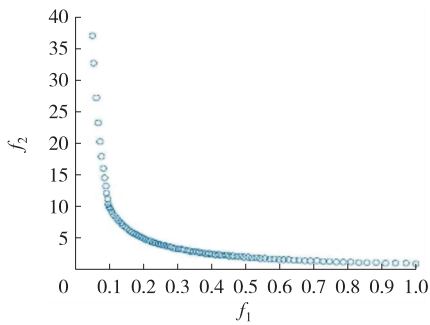
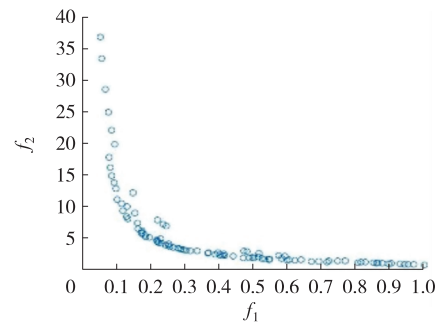


图 3 时间性能评估

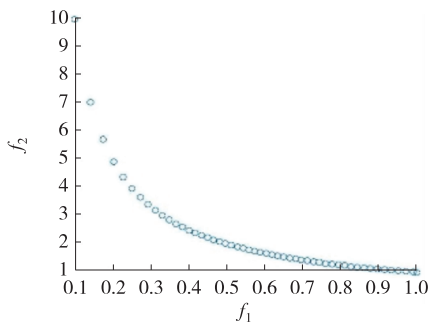
Fig. 3 Time performance evaluation



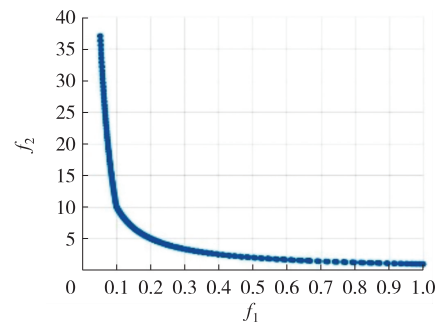
a SASF 计算 VUI



b ASF 计算 VUI



c WS 计算 VUI



d VUI 帕累托前沿面

图 4 SASF,ASF,WS 在 VUI 问题上的帕累托前沿面以及 VUI 真实帕累托前沿面

Fig. 4 The Pareto front of SASF, ASF, WS on VUI problem and the true Pareto frontier of VUI

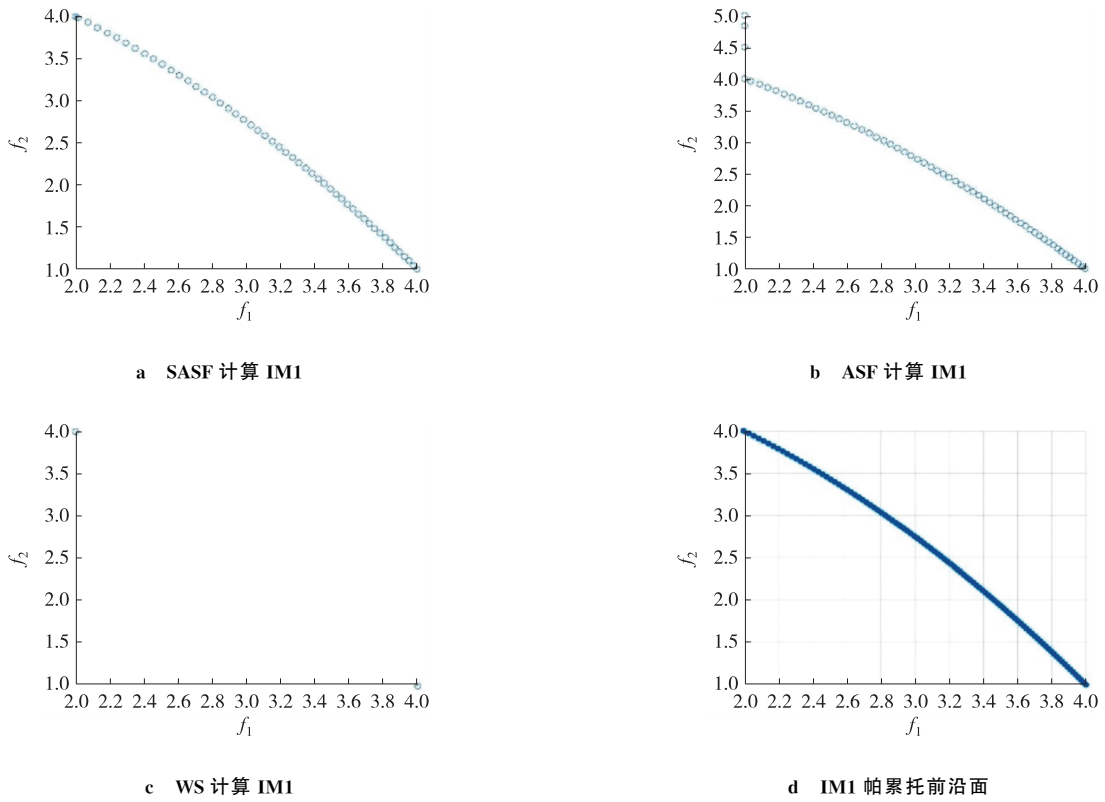


图 5 SASF,ASF,WS 在 IM1 问题上的帕累托前沿面以及 IM1 真实帕累托前沿面

Fig. 5 The Pareto front of SASF, ASF, WS on IM1 problem and the true Pareto frontier of IM1

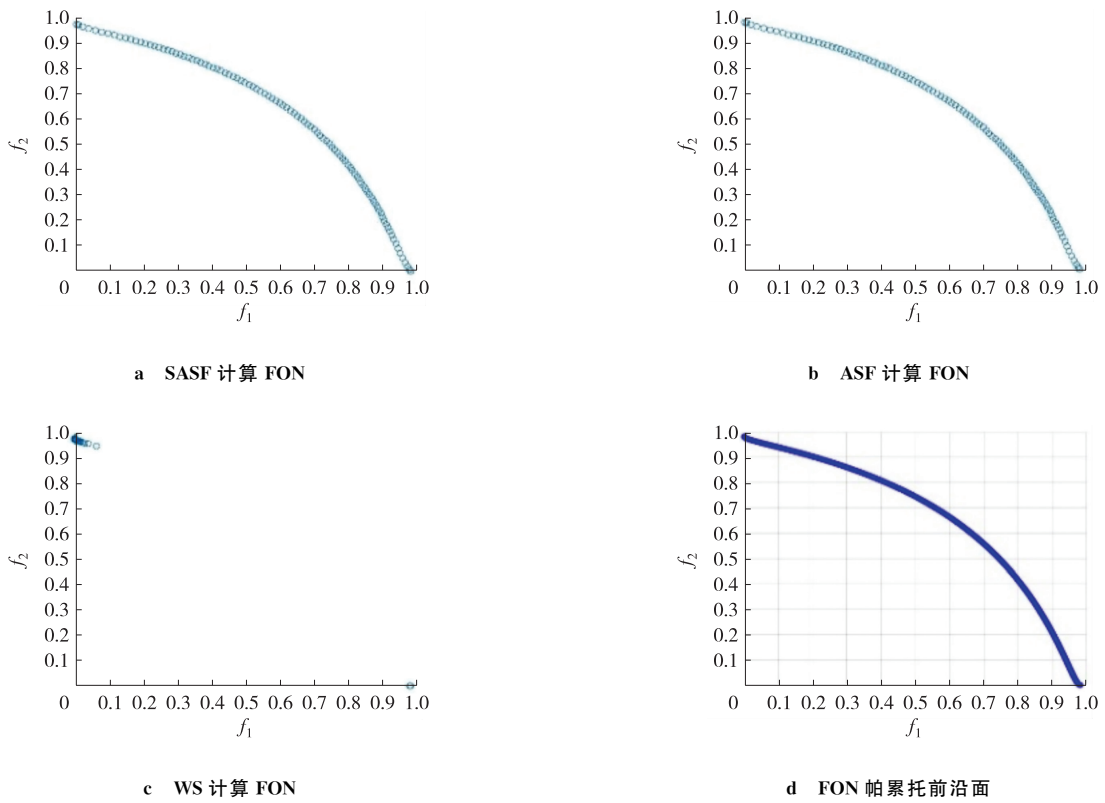


图 6 SASF,ASF,WS 在 FON 问题上的帕累托前沿面以及 FON 真实帕累托前沿面

Fig. 6 The Pareto front of SASF, ASF, WS on FON problem and the true Pareto frontier of FON

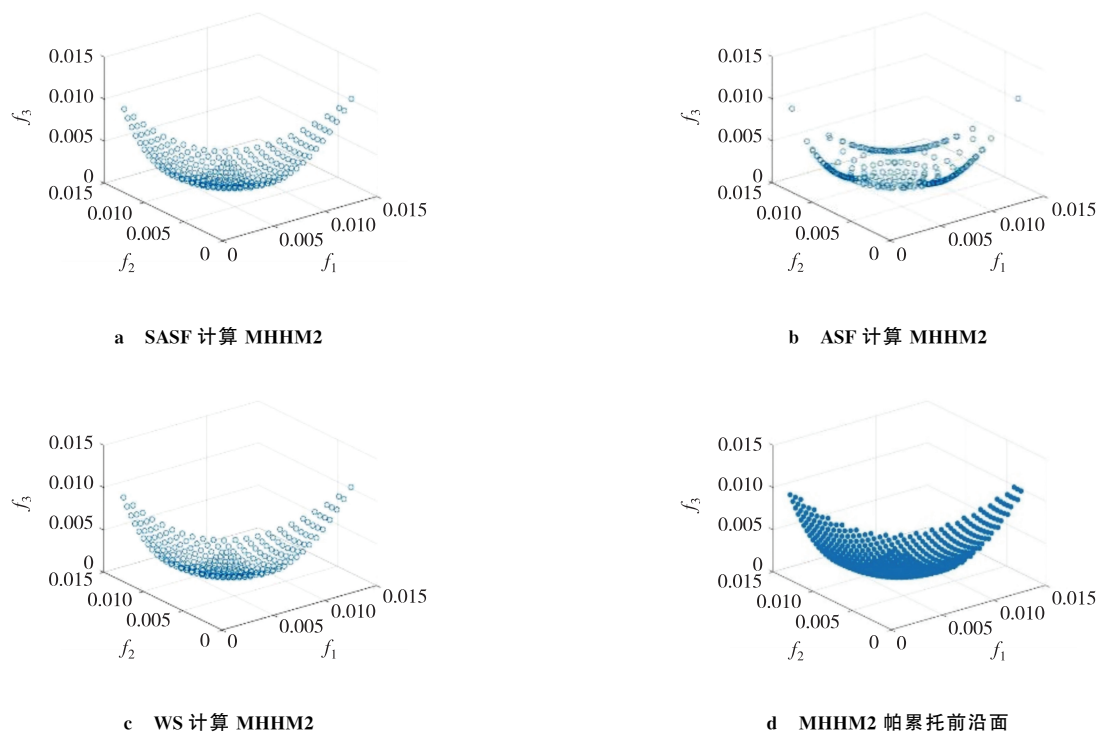


图 7 SASF,ASF,WS 在 MHHM2 问题上的帕累托前沿面以及 MHHM2 真实帕累托前沿面

Fig. 7 The Pareto front of SASF, ASF, WS on the problem MHHM2 and the true Pareto frontier of MHHM2

4 结论和展望

本文对成就标量化函数进行了光滑化,提出了一类新的光滑化成就标量化函数法,研究了光滑化成就标量化问题的最优解与多目标优化问题(弱)有效解之间的关系。实验表明,本文提出的光滑化成就标量化函数法具有一定的有效性。

由于成就标量化函数法可以获得多目标优化问题的真有效解,因此如何利用本文提出的光滑成就标量化函数法获得多目标优化问题的真有效解是值得研究的内容。此外,为了提高光滑成就标量化函数法的效率,结合现有方法如基于分解的多目标进化算法是一个有意义的课题。

参考文献:

- [1] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. New York:Springer,2005.
- [2] BOWMAN Jr V J. On the relationship of the Tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives[C]// THIRIEZ H,ZIONTS S. Multiple Criteria Decision Making:Proceedings of a Conference Jouy-en-Josas,France May21-23,1975. Berlin:Springer,1976:76-86.
- [3] MIETTINEN K. Nonlinear multiobjective optimization[M]. New York:Springer Science & Business Media,1999.
- [4] WIERZBICKI A P. A methodological approach to comparing parametric characterizations of efficient solutions[C]//FANDEL G,GRAUER M,KURZHANSKI A,et al. Large-Scale Modelling and Interactive Decision Analysis. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,vol 273. Berlin:Springer,1986:27-45.
- [5] LI X S. An entropy-based aggregate method for minimax optimization[J]. Engineering Optimization,1992,18(4):277-285.
- [6] JAYNES E T. Information theory and statistical mechanics[J]. Physics Review,1957,106:621-630.
- [7] YE F, LIU H W, ZHOU S S, LIU S Y. A smoothing trust-region Newton-CG method for minimax problem[J]. Applied Mathematics and Computation,2008,199(2):581-589.
- [8] BAGIROV A M, AL NUAIMAT A, SULTANOVA N. Hyperbolic smoothing function method for minimax problems[J]. Optimization,2013,62(6):759-782.
- [9] LIN X,ZHANG X,YANG Z,et al. Smooth Tchebycheff scalarization for multiobjective optimization[EB/OL]. (2024-07-23)

- [2024-12-26], <http://arxiv.org/pdf/2402.19078>.
- [10] BECK A,TEBOULLE M. Smoothing and first order methods;a unified framework[J]. SIAM Journal on Optimization,2012,22(2):557-580.
- [11] CHEN C H,MANGASARIAN O L. Smoothing methods for convex inequalities and linear complementarity problems[J]. Mathematical Programming,1995,71(1):51-69.
- [12] CHEN X J. Smoothing methods for nonsmooth,nonconvex minimization[J]. Mathematical Programming,2012,134:71-99.
- [13] SCHAFFER J D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms [C]//GREFENSTETTE J J. Proceedings of the First Intern-Ational Conference on Genetic Algorithms and Their Applications. New York:Psychology Press, 2014:93-100.
- [14] FONSECA C M,FLEMING P J. Multiobjective optimization and multiple constraint handling with evolutionary algorithms. I. A unified formulation[J]. IEEE Transactions on Systems,Man,and Cybernetics-Part A:Systems and Humans,1998,28(1):26-37.
- [15] MAO J,HIRASAWA K,HU J,et al. Genetic symbiosis algorithm for multiobjective optimization problems[J]. Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers,2001,37(9):893-901.
- [16] VLENNET R,FONTEIX C,MARC I. Multicriteria optimization using a genetic algorithm for determining a Pareto set[J]. International Journal of Systems Science,1996,27(2):255-260.
- [17] DUMITRESCU D,GROSAN C,OLTEAN M. A new evolutionary approach for multiobjective optimization[J]. Studia Universitatis Babes-Bolyai Informatica,2000,45(1):51-68.
- [18] ISHIBUCHI H,MURATA T. A multi-objective genetic local search algorithm and its application to flowshop scheduling[J]. IEEE Transactions on Systems,Man,and Cybernetics,Part C (Applications and Reviews),1998,28(3):392-403.
- [19] RENDÓN M V. A non-generational genetic algorithm for multiobjective optimization [C]//BACK T. Proc. 7th Interational Conference on Genetic Algorithms. California:Morgan Kaufmann,1997:658-665.
- [20] ZITZLER E,DEB K,THIELE L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results [J]. Evolutionary Computation,2000,8(2):173-195.
- [21] ZITZLER E,THIELE L. Multiobjective evolutionary algorithms:a comparative case study and the strength Pareto approach [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation,1999,3(4):257-271.
- [22] COELLO C A C. Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems[M]. New York:Springer,2007.
- [23] DOLAN E D,MORÉ J J. Benchmarking optimization software with performance profiles [J]. Mathematical Programming, 2002,91:201-213.

Theory and Methods of Multi-Objective Optimization

A Novel Smoothing Achievement Scalarization Function Method for Multiobjective Optimization

FU Xiaoheng, TANG Liping

(The National Center for Applied Mathematics in Chongqing, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: A novel smooth achievement scalarizing function is introduced and its application in multiobjective optimization is explored. First, the finite maximal terms in the achievement scalarizing function are reformulated as a finite sum of the plus function $\max\{x,0\}$, and based on the smoothing of the plus function $\max\{x,0\}$, a new smooth achievement scalarizing function is developed. Second, the relationships between the solutions of the smoothing achievement scalarized problem and the (weakly) efficient solutions of the multiobjective optimization problem are studied. Finally, experimental results show that the smooth achievement scalarizing function method outperforms the traditional weighted linear scalarization method and the achievement scalarizing function method in terms of solution distribution uniformity and approximation quality on the Pareto front.

Keywords: multiobjective optimization; achievement scalarizing function; smoothing method

(责任编辑 陈 乔)