

非光滑多目标分式鲁棒优化问题的 最优性条件与 Mond-Weir 型对偶*

吴浩, 李向有

(延安大学 数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000)

摘要:研究了非光滑多目标分式鲁棒优化问题,借助 Gordan 择一定理和极大极小定理在非光滑的 Extended Mangasarian-Fromovitz 约束下建立了最优性必要条件;接着引入广义凸-凹函数,给出 Mond-Weir 型对偶模型,在广义凸性的假设下得到对偶问题与原问题的强、弱对偶和逆对偶定理。研究结果丰富了优化理论的研究内容,并为求解多目标优化问题提供了新的算法依据。

关键词:多目标优化;最优性;弱有效解;对偶

中图分类号:O221.6;O224

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2025)02-0059-09

多目标优化是运筹学的一个重要分支,它是指在一个问题中同时优化多个目标函数,而这些目标函数通常相互冲突,即改善一个目标可能会导致其他目标的性能下降。由于多目标优化问题存在解为向量的特殊性,Pareto^[1]在1986年提出 Pareto 有效解和 Pareto 弱有效解的概念,包含了该类问题的所有最优解。多目标分式优化^[2]是多目标优化的一个特殊情况。多目标分式优化问题的目标函数通常是多个分式函数的组合,例如在资源分配问题中,可能需要同时最小化成本与资源的比值和最大化效益与资源的比值等;这些分式函数通常具有非线性和非凸性,求解难度较大。目前已有许多研究者对多目标优化问题进行了研究,并得到了大量的研究成果^[3-6]。

实际生活中存在着测量误差、不准确信息等因素,这让人们在处理如生活中的资源分配、物流选址等优化问题时会面临不确定数据的干扰;面对此类问题,众多研究者都进行了研究^[7-10]。在不确定数据的影响下,要使目标函数达到最优,常见的处理方法有随机规划和鲁棒优化^[11-13]。Mulvey 等人^[14]在1995年首次提出鲁棒优化的概念,即在最坏的情况下最小化目标函数,使得任意解均可行,进而得到较优解。鲁棒优化已成为一种重要的处理不确定信息手段。李艳艳等人^[15]和张晓青等人^[16]针对具有不确定信息的多目标优化问题,借助鲁棒优化的方法分别给出关于鲁棒解的标量化性质以及最优性条件;Chuong 等人^[17]使用广义微分和变分分析的工具,建立了一类不等式和等式约束的多目标分式优化问题的最优性必要条件,利用广义凸函数得到了最优性充分条件,并研究了它的对偶问题;Hong 等人^[18]借助 Mordukhovich 极限子微分,研究了一类非光滑不确定多目标分式优化问题,给出局部(弱)Pareto 解的 Fritz-John 型和 Karush-Kuhn-Tucker 型最优性必要条件,利用极限子微分定义广义凸-凹函数,在广义凸-凹性下研究最优性充分条件;Thu 等人^[19]建立了不确定半无限多目标分式优化问题的 Karush-Kuhn-Tucker 型鲁棒最优性条件和对偶性;Sun 等人^[20]在鲁棒优化的框架下,考虑了目标函数和约束函数同时具有不确定参数且为凸函数的不确定单目标分式优化问题,给出单目标优化问题的最优解的最优性条件;冯欣怡等人^[21]借助 Dinkelbach 方法,将多目标优化分式优化问题转化为一般整式优化问题,在标量化方法下建立了拟近似有效解的半无限优化问题的鲁棒最优性条件。

值得注意的是,对偶性也是研究原问题的一个重要途径,对偶问题可以提供关于原问题的更多信息,并且在某些情况下可以更容易地求解。为研究已有文献中关于具有特定凸凹特性的非光滑多目标分式优化问题的对偶问题,同时也为存在不确定数据的优化问题提供更有效的解决方案,并让该方案在不确定性普遍存在的各种

* 收稿日期:2024-06-12 修回日期:2025-02-24 网络出版时间:2025-05-07T16:44

资助项目:国家自然科学基金地区科学基金项目(No. 11961072);陕西省教育厅科学研究计划项目(No. 17JK0860)

第一作者简介:吴浩,男,研究方向为最优化理论与应用,E-mail:2220667113@qq.com;通信作者简介:李向有,男,副教授,E-mail:yadxlxy@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250507.1635.002

现实世界场景中具有实际应用,受文献[17-19,21]启发,本文使用鲁棒优化的方法,在辅助规划下借助 Gordan 择一定理和极大极小定理,建立了约束函数具有不确定数据和满足 Extended Mangasarian-Fromovitz 约束的非光滑多目标分式优化问题的最优性必要条件,并在引入的广义凸-凹性的假设下得到 Mond-Weir 型鲁棒对偶问题与原问题的对偶性。

1 预备知识

设 \mathbf{R}^n 为 n 维欧氏空间,对于 $\forall \mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ 和 $\forall \mathbf{y}=(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ 规定: $\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \geq y_i, i=1, 2, \dots, n; \mathbf{x} \gg \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \gg y_i, i=1, 2, \dots, n$,但至少存在 1 个 s ,使得 $x_s > y_s; \mathbf{x} > \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i > y_i, i=1, 2, \dots, n$ 。

定义 1^[22] 若存在常数 $\kappa > 0$ 满足: $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq \kappa \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$,则称 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为局部 Lipschitz 函数。对局部 Lipschitz 函数 f 在 $\bar{\mathbf{x}}$ 处沿 $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$ 的方向导数定义为: $f'(\bar{\mathbf{x}}; \mathbf{d}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{t}$,在 $\bar{\mathbf{x}}$ 处沿着 $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$ 的广义方向导数定义为: $f^\circ(\bar{\mathbf{x}}; \mathbf{d}) = \limsup_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}} \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{d}) - f(\mathbf{x})}{t}$,若 $\forall \mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$ 都有 $f'(\bar{\mathbf{x}}; \mathbf{d}) = f^\circ(\bar{\mathbf{x}}; \mathbf{d})$ 成立,则称 f 在 $\bar{\mathbf{x}}$ 处是 Clarke 正则的。 f 在 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的 Clarke 次微分表示为: $\partial f(\bar{\mathbf{x}}) = \{\xi \in \mathbf{R}^n \mid f^\circ(\bar{\mathbf{x}}; \mathbf{d}) \geq \langle \xi, \mathbf{d} \rangle, \forall \mathbf{d} \in \mathbf{R}^n\}$ 。

引理 1^[23] (Gordan 择一定理) 设 $\varphi(\mathbf{x}) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_l(\mathbf{x}))$ 为定义在凸集 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 上的凸函数,那么以下 2 个断言有且仅有 1 个成立: 1) $\varphi(\mathbf{x}) < 0$ 在 $\mathbf{x} \in A$ 上有解; 2) $\forall \mathbf{x} \in A$, 存在 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \in \mathbf{R}_+^l$ 使得 $\lambda\varphi(\mathbf{x}) \geq 0$ 。

引理 2^[24] 若 $X \subseteq \mathbf{R}^n, Y \subseteq \mathbf{R}^m$ 为紧凸集, $f: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个连续函数, $f(\cdot, \mathbf{y}): X \rightarrow \mathbf{R}$ 关于固定 \mathbf{y} 是凸的, $f(\mathbf{x}, \cdot): Y \rightarrow \mathbf{R}$ 关于固定 \mathbf{x} 是凹的, 则 $\inf_{\mathbf{x} \in X} \sup_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{y} \in Y} \inf_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 。

引理 3^[25] 对局部 Lipschitz 函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 及 $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \lambda > 0, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$, 有 $\partial(\lambda f)(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda \partial f(\bar{\mathbf{x}})$ 成立。此外, 对 $f_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} (i=1, 2, \dots, m)$, 有 $\partial(f_1 + f_2 + \dots + f_m)(\bar{\mathbf{x}}) \subseteq \partial f_1(\bar{\mathbf{x}}) + \partial f_2(\bar{\mathbf{x}}) + \dots + \partial f_m(\bar{\mathbf{x}})$ 成立, 若 f_i 均为凸函数则等号成立。

引理 4^[25] 若 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为局部 Lipschitz 的函数, 则以下结论成立: 1) $f^\circ(\mathbf{x}; \mathbf{d})$ 为有限值, 且 $|f^\circ(\mathbf{x}; \mathbf{d})| \leq \kappa \|\mathbf{d}\|, \mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$, 其中 κ 为依赖于 \mathbf{x} 的常数; 2) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, f^\circ(\mathbf{x}; \cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为凸函数; 3) $\forall \mathbf{d} \in \mathbf{R}^n, f^\circ(\mathbf{x}; \mathbf{d}) = \max_{\xi \in \partial f(\mathbf{x})} \{\langle \xi, \mathbf{d} \rangle\}$ 。

2 最优性条件

考虑如下非光滑多目标分式优化问题(NMFP):

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}) &= \left(\frac{f_1(\mathbf{x})}{g_1(\mathbf{x})}, \frac{f_2(\mathbf{x})}{g_2(\mathbf{x})}, \dots, \frac{f_l(\mathbf{x})}{g_l(\mathbf{x})} \right), \\ \text{s. t. } & h_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) \leq 0, j=1, 2, \dots, m, \\ & \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

其中: $f_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, g_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, h_j: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}$ 为局部 Lipschitz 的实值函数; $\mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_j$ 为不确定数据; $\mathcal{V}_j \subseteq \mathbf{R}^q$ 为不确定数据集。问题(NMFP)的可行集记为: $C = \{\mathbf{x} \in X : h_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) \leq 0, j=1, 2, \dots, m\}$ 。

使用鲁棒优化的方法和理论^[26], 在任意情况下考虑问题(NMFP)的鲁棒对应问题(RNMFP):

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}) &= \left(\frac{f_1(\mathbf{x})}{g_1(\mathbf{x})}, \frac{f_2(\mathbf{x})}{g_2(\mathbf{x})}, \dots, \frac{f_l(\mathbf{x})}{g_l(\mathbf{x})} \right), \\ \text{s. t. } & h_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) \leq 0, \forall \mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_j, j=1, 2, \dots, m, \\ & \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

问题(RNMFP)的可行解集记为: $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in X : h_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) \leq 0, \forall \mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_j\}$ 。记指标集 $J := \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in J$, 令 $\phi_j(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_j} h_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j)$, 对给定的 $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}$, 记 $\mathcal{V}_j^* = \{\mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_j : h_j(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{v}_j) = \phi_j(\bar{\mathbf{x}})\}, J(\bar{\mathbf{x}}) = \{j \in J : \phi_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$ 。

关于次微分的定义, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}$, 总是假设 $f_i(\mathbf{x}) \geq 0, g_i(\mathbf{x}) > 0, i=1, 2, \dots, l$ 。

借助 Bector 等人^[27]的方法, 将多目标分式优化问题转化为与之等价的辅助整式优化问题, 记 $\varphi_i(\mathbf{x}) =$

$f_i(x) - s_i g_i(x)$, 其中 $s_i \in \mathbf{R}_+$, 引入如下辅助规划(RNMF P) $_s$:

$$\begin{aligned} \min \varphi(x) &= (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_l(x)), \\ \text{s. t. } h_j(x, v_j) &\leq 0, \forall v_j \in V_j, j \in J, \\ x &\in X. \end{aligned}$$

定义 2^[19] 1) 令 $\bar{x} \in \mathcal{F}$, 若 $\forall x \in \mathcal{F}$, 有 $F(x) - F(\bar{x}) \notin -\mathbf{R}_+^l$ 成立, 则称 \bar{x} 为问题(NMFP)的鲁棒弱有效解;
2) 令 $\bar{x} \in \mathcal{F}$, 若 $\forall x \in \mathcal{F}$, 有 $F(x) - F(\bar{x}) \notin -\mathbf{R}_+^l \setminus \{0\}$ 成立, 则称 \bar{x} 为问题(NMFP)的鲁棒有效解。

引理 5^[18] 令 $\bar{x} \in \mathcal{F}$, 则以下 2 个命题成立: 1) \bar{x} 是问题(NMFP)的鲁棒有效解的充要条件 $\bar{x} \in \mathcal{F}$ 为问题(RNMF P) $_s$ 的鲁棒有效解; 2) \bar{x} 是问题(NMFP)的鲁棒弱有效解的充要条件 $\bar{x} \in \mathcal{F}$ 为问题(RNMF P) $_s$ 的鲁棒弱有效解。

为建立问题(NMFP)的鲁棒弱有效解的最优性必要条件, 需对约束函数 $h_j: X \times V_j \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}$ 做出如下假设: (A) $\forall j \in J, h_j(x, v_j)$ 关于第 1 个变量 x 是 Clarke 正则的; (B) $\forall j \in J, h_j(x, v_j)$ 关于第 1 个变量 x 是局部 Lipschitz 函数。

定义 3^[22] 在问题(NMFP)中, $\bar{x} \in \mathcal{F}$, 若存在 $d \in \mathbf{R}^n, \forall v_j \in V_j^*, j \in J(\bar{x})$ 使得 $h_j^\circ(\bar{x}, v_j; d) < 0$, 则称 \bar{x} 满足非光滑 Mangasarian-Fromovitz 约束。

定理 1 在问题(NMFP)中, 满足假设(A)和(B), $\forall x \in \mathcal{F}, h_j(x, \cdot)$ 在 V_j 上是凹函数, $j \in J, s_i = \frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})} \in \mathbf{R}_+, i = 1, 2, \dots, l$, 若 \bar{x} 为问题(NMFP)的鲁棒弱有效解, 则存在 $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j) \in \mathbf{R}_+^l \times \mathbf{R}_+^m \times \mathbf{R}^q$, 其中: $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_l), \bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_m), v_j \in V_j^*, j \in J$, 使得:

$$0 \in \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i (\partial f_i(\bar{x}) - s_i \partial g_i(\bar{x})) + \sum_{j=1}^m \bar{\mu}_j \partial_x h_j(\bar{x}, \bar{v}_j), \tag{1}$$

$$\bar{\mu}_j h_j(\bar{x}, \bar{v}_j) = 0, j \in J. \tag{2}$$

此外, 若问题(RNMF P)在 \bar{x} 处满足非光滑 Extended Mangasarian-Fromovitz 约束, 则存在 $\bar{\lambda} \in \{\mathbf{R}_+^l \setminus 0\}, v_j \in V_j^*, j \in J$ 使得式(1)、(2)成立。

证明 首先说明关于 d 的不等式 $\varphi_i^\circ(\bar{x}; d) < 0, i = 1, 2, \dots, l, \psi_j^\circ(\bar{x}; d) < 0, j \in J(\bar{x})$ 在 \mathbf{R}^n 上无解。采用反证法。假设存在 $\bar{d} \in \mathbf{R}^n$ 使得 $\varphi_i^\circ(\bar{x}; \bar{d}) < 0, i = 1, 2, \dots, l, \psi_j^\circ(\bar{x}; \bar{d}) < 0, j \in J(\bar{x})$ 成立。

对 $\bar{x}^k \rightarrow \bar{x}, \{\bar{x}^k\} \subset \mathbf{R}^n$ 的点列, $\forall \epsilon_i^k > 0$ 必存在 $y^k \in \mathbf{R}^n$ 和 $t_k > 0$, 使得 $\|y^k - \bar{x}^k\| \leq \epsilon_i^k, t_k < \epsilon_i^k$, 且有下式成立:

$$\frac{\varphi_i(y^k + t_k \bar{d}) - \varphi_i(y^k)}{t_k} \geq \varphi_i^\circ(\bar{x}^k; \bar{d}) - \epsilon_i^k. \tag{3}$$

令 $\epsilon_i^k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 有 $y^k \rightarrow \bar{x}$, 且式(3)的右侧收敛于 $\varphi_i^\circ(\bar{x}; \bar{d})$, 可得:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_i(\bar{x} + t_k \bar{d}) - \varphi_i(\bar{x})}{t_k} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup \frac{\varphi_i(\bar{x} + t \bar{d}) - \varphi_i(\bar{x})}{t} \leq \\ \lim_{k \rightarrow \infty, t \rightarrow 0^+} \sup \frac{\varphi_i(y^k + t \bar{d}) - \varphi_i(y^k)}{t} &= \varphi_i^\circ(\bar{x}; \bar{d}) < 0, i = 1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

故存在 $\delta_i^1 > 0$, 使得当 $t \in (0, \delta_i^1)$ 时总有 $\varphi_i(\bar{x} + t \bar{d}) < \varphi_i(\bar{x}), i = 1, 2, \dots, l$ 。因 h 关于 \bar{x} 是正则的, 有 $\psi_j^\circ(\bar{x}; \bar{d}) = \psi_j'(\bar{x}; \bar{d}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi_j(\bar{x} + t \bar{d}) - \psi_j(\bar{x})}{t} < 0$, 则存在 $\delta_j^2 > 0$, 使得当 $t \in (0, \delta_j^2)$ 时总有 $\psi_j(\bar{x} + t \bar{d}) < \psi_j(\bar{x}) = 0, j \in J(\bar{x})$ 。此外, 当 $j \in J \setminus J(\bar{x})$ 时, 同上, 存在 $\delta_j^3 > 0, \forall t \in (0, \delta_j^3)$ 都有 $\psi_j(\bar{x} + t \bar{d}) < 0, j \in J \setminus J(\bar{x})$ 。令 $\delta = \min\{\delta_i^1, \delta_j^2, \delta_j^3; i = 1, 2, \dots, l, j \in J\}$, $\forall t \in (0, \delta)$ 有 $\bar{x} + t \bar{d} \in \mathcal{F}, \varphi_i(\bar{x} + t \bar{d}) < \varphi_i(\bar{x}), i = 1, 2, \dots, l$ 。这与 \bar{x} 为问题(RNMF P) $_s$ 的弱有效解矛盾, 所以关于 d 的不等式 $\varphi_i^\circ(\bar{x}; d) < 0, i = 1, 2, \dots, l, \psi_j^\circ(\bar{x}; d) < 0, j \in J(\bar{x})$ 在 \mathbf{R}^n 上无解。

由引理 1 可知存在不全为 0 的 $\bar{\lambda}_i \in \mathbf{R}_+, \bar{\mu}_j \in \mathbf{R}_+, j \in J(\bar{x}), \forall d \in \mathbf{R}^n$ 有

$$\sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \varphi_i^\circ(\bar{x}; d) \geq 0 \tag{4}$$

和 $\sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \psi_j^\circ(\bar{x}; \mathbf{d}) \geq 0$ 成立, 从而有

$$\sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \max h_j^\circ(\bar{x}, \mathbf{v}_j; \mathbf{d}) \geq 0 \quad (5)$$

成立。将 $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$ 固定, 令 $H(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) = \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j^\circ(\bar{x}, \mathbf{v}_j; \mathbf{d})$, 取 $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m), (\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_m) \in \prod_{j=1}^m \mathcal{V}_j^*$ 和 $\alpha \in (0, 1)$, 可得:

$$\begin{aligned} & H(\alpha(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) + (1-\alpha)(\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_m)) = \\ & \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j^\circ(\bar{x}, \alpha \mathbf{v}_j + (1-\alpha)\mathbf{v}'_j; \mathbf{d}) = \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h'_j(\bar{x}, \alpha \mathbf{v}_j + (1-\alpha)\mathbf{v}'_j; \mathbf{d}) = \\ & \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x} + t\mathbf{d}, \alpha \mathbf{v}_j + (1-\alpha)\mathbf{v}'_j) - \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x}, \alpha \mathbf{v}_j + (1-\alpha)\mathbf{v}'_j)}{t} \geq \\ & \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x} + t\mathbf{d}, \mathbf{v}_j) + (1-\alpha) \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x} + t\mathbf{d}, \mathbf{v}'_j)}{t} - \\ & \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x}, \mathbf{v}_j) + (1-\alpha) \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x}, \mathbf{v}'_j)}{t} = \\ & \alpha \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x} + t\mathbf{d}, \mathbf{v}_j) - \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x}, \mathbf{v}_j)}{t} + (1-\alpha) \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x} + t\mathbf{d}, \mathbf{v}'_j) - \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x}, \mathbf{v}'_j)}{t} = \\ & \alpha \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h'_j(\bar{x}, \mathbf{v}_j; \mathbf{d}) + (1-\alpha) \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h'_j(\bar{x}, \mathbf{v}'_j; \mathbf{d}) = \alpha \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j^\circ(\bar{x}, \mathbf{v}_j; \mathbf{d}) + \\ & (1-\alpha) \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j^\circ(\bar{x}, \mathbf{v}'_j; \mathbf{d}) = \alpha H(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) + (1-\alpha) H(\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_m)). \end{aligned}$$

因此 $\sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \psi_j^\circ(\bar{x}; \mathbf{d})$ 关于 \mathbf{v}_j 是凹的。将式(4)、(5)相加有 $\sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \varphi_i^\circ(\bar{x}; \mathbf{d}) + \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \max h_j^\circ(\bar{x}, \mathbf{v}_j; \mathbf{d}) \geq 0$, 因

此, $\forall \mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$ 都有: $\inf_{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n} \max_{\mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_j^*} \left[\sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \varphi_i^\circ(\bar{x}; \mathbf{d}) + \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j^\circ(\bar{x}, \mathbf{v}_j; \mathbf{d}) \right] \geq 0$ 。

由引理 4 中的结论 2) 可知 $\sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \varphi_i^\circ(\bar{x}; \mathbf{d}) + \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j^\circ(\bar{x}, \mathbf{v}_j; \mathbf{d})$ 关于第 1 个变量 \bar{x} 是凸的, 且存在 $\bar{\mathbf{v}}_j \in \mathcal{V}_j^*$ 关于第 2 个变量 $\bar{\mathbf{v}}_j$ 是凹的; 由引理 2 可知 $\max_{\bar{\mathbf{v}}_j \in \mathcal{V}_j^*} \inf_{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n} \left[\sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \varphi_i^\circ(\bar{x}; \mathbf{d}) + \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j h_j^\circ(\bar{x}, \bar{\mathbf{v}}_j; \mathbf{d}) \right] \geq 0$; 再由引理 3 和引理 4 中的结论 3) 可知, $\forall \mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$ 有下式成立:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n} \inf_{\left[\sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \max \{ \langle \xi_i - s_i \boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{d} \rangle : \xi_i \in \partial f_i(\bar{x}), \boldsymbol{\eta}_i \in \partial g_i(\bar{x}) \} + \right.} \\ & \left. \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \max \{ \langle \zeta_j, \mathbf{d} \rangle : \zeta_j \in \partial_x h_j(\bar{x}, \bar{\mathbf{v}}_j) \} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

因此 $\max_{\xi_i \in \partial f_i(\bar{x}), \boldsymbol{\eta}_i \in \partial g_i(\bar{x}), \zeta_j \in \partial_x h_j(\bar{x}, \bar{\mathbf{v}}_j)} \inf_{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n} \left\langle \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \xi_i - \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i s_i \boldsymbol{\eta}_i + \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \zeta_j, \mathbf{d} \right\rangle \geq 0$ 。取 \mathbf{d} 的反方向 $-\mathbf{d}$ 有:

$$\begin{aligned} & \max_{\xi_i \in \partial f_i(\bar{x}), \boldsymbol{\eta}_i \in \partial g_i(\bar{x}), \zeta_j \in \partial_x h_j(\bar{x}, \bar{\mathbf{v}}_j)} \inf_{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n} \left\langle \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \xi_i - \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i s_i \boldsymbol{\eta}_i + \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \zeta_j, -\mathbf{d} \right\rangle = \\ & - \max_{\xi_i \in \partial f_i(\bar{x}), \boldsymbol{\eta}_i \in \partial g_i(\bar{x}), \zeta_j \in \partial_x h_j(\bar{x}, \bar{\mathbf{v}}_j)} \inf_{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n} \left\langle \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \xi_i - \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i s_i \boldsymbol{\eta}_i + \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \zeta_j, \mathbf{d} \right\rangle \geq 0, \end{aligned}$$

所以 $\sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \xi_i - \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i s_i \boldsymbol{\eta}_i + \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \zeta_j = 0$, 因而有 $0 \in \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i (\partial f_i(\bar{x}) - s_i \partial g_i(\bar{x})) + \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \partial_x h_j(\bar{x}, \bar{\mathbf{v}}_j)$ 成立。

但当 $j \notin J(\bar{x})$ 时, 取 $\mu_j = 0$, 从而有 $0 \in \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i (\partial f_i(\bar{x}) - s_i \partial g_i(\bar{x})) + \sum_{j=1}^m \bar{\mu}_j \partial_x h_j(\bar{x}, \bar{\mathbf{v}}_j)$ 和 $\bar{\mu}_j h_j(\bar{x}, \bar{\mathbf{v}}_j) = 0$, $j=1, 2, \dots, m$ 成立。另外, 当 $J(\bar{x}) = \emptyset$ 时, 取 $\bar{\mu}_j \equiv 0$ 。若当在 \bar{x} 处满足 Extended Mangasarian-Fromovitz 约束时, 假设 $\bar{\lambda}_i = 0$, 取 $\bar{\mu}_i \in \mathbf{R}_+$ 且不全为 0, 由引理 4 中的结论 3) 可知:

$$\sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \psi_j^\circ(\bar{x}; \mathbf{d}) = \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \max_{\zeta_j \in \partial_x h_j(\bar{x}, \bar{v}_j)} \{ \langle \zeta_j, \mathbf{d} \rangle \} = \max_{\zeta_j \in \partial_x h_j(\bar{x}, \bar{v}_j)} \left\{ \left\langle \sum_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \zeta_j, \mathbf{d} \right\rangle \right\} < 0. \tag{6}$$

另一方面由于 $\bar{\lambda}_i = 0$, 再由引理 3 有 $0 \in \sum_{j=1}^m \bar{\mu}_j \partial_x h_j(\bar{x}, \bar{v}_j) = \partial_x \sum_{j=1}^m \bar{\mu}_j h_j(\bar{x}, \bar{v}_j)$ 成立, 故存在 $\bar{\zeta}_j \in \partial_x h_j(\bar{x}, \bar{v}_j)$

使得 $\sum_{j=1}^m \bar{\mu}_j \bar{\zeta}_j = 0$, 其中: $\bar{\mu}_j = 0; j \in J \setminus J(\bar{x})$. 这与式(6)矛盾, 故有 $\bar{\lambda}_i \geq 0$, 但不全为 0. 证毕

下面给出 1 个例子验证定理 1 的结论.

例 1 考虑如下不确定非光滑分式优问题(NMFP)₁:

$$\begin{aligned} \min F(x) &= \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \right), \\ \text{s. t. } h(x, v) &\leq 0. \end{aligned}$$

令 $\mathcal{F} = \mathbf{R}, f_i: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g_i: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, i = 1, 2, h: \mathbf{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}$, 其中 $\mathcal{V} = [0, 1]$. 令:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}, g_1(x) = x^2 + 2, f_2(x) = x^2 + 2, g_2(x) = x^2 + 1,$$

$$h(x, v) = vx^2, v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}, h(x, 0) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

当 $\bar{x} = 0$ 时, $\partial f_1(\bar{x}) = \left[\frac{1}{3}, 1 \right], \partial g_1(\bar{x}) = \partial f_2(\bar{x}) = \partial g_2(\bar{x}) = \{0\}, \partial_x h(\bar{x}, v) = \{0\}, v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}, \partial_x h(\bar{x}, 0) = \left[-1, -\frac{1}{2} \right], \mathcal{V}^* = [0, 1]$, 取 $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) = (0, 1) \in \mathbf{R}_+^2, \bar{\mu} = 0 \in \mathbf{R}_+$, 则式(1)、(2)成立, 因此 $\bar{x} = 0$ 为问题(NMFP)₁ 的鲁棒弱有效解; 当 $v = 0$ 时, $\partial_x h(\bar{x}, 0) = \left[-1, -\frac{1}{2} \right], \forall d \in \mathbf{R}_{++}$, 总有 $h_j^\circ(\bar{x}, 0; d) < 0$ 满足非光滑的 Extended Mangasarian-Fromovitz 约束, 此时对 $\bar{\lambda} \in \{\mathbf{R}_+^2 \setminus \{0\}\}$ 都有式(1)、(2)成立, 且 $\bar{x} = 0$ 为鲁棒弱有效解.

3 Mond-Weir 型对偶

由于可以通过对偶性来研究原始鲁棒优化问题的最优性条件, 因此具有不确定数据集的鲁棒多目标分式优化问题的对偶性在非线形优化中占据重要位置. 本节给出原多目标鲁棒优化问题(NMFP)的 Mond-Weir 型对偶(ONMFDP)模型:

$$\begin{aligned} \max s &= (s_1, s_2, \dots, s_l), \\ \text{s. t. } 0 &\in \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i (\partial f_i(\mathbf{y}) - s_i \partial g_i(\mathbf{y})) + \sum_{j \in J} \bar{\mu}_j \partial_y h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j), \\ &\bar{\mu}_j h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j) \geq 0, j \in J, \\ &\bar{\lambda}_i \in \mathbf{R}_+^l, \bar{\mu}_j \in \mathbf{R}_+^m, \bar{v}_j \in \mathcal{V}_j^*, \\ &s_i = \frac{f_i(\mathbf{y})}{g_i(\mathbf{y})}, i = 1, 2, \dots, l, \end{aligned}$$

并在广义凸-凹性下讨论问题(ONMFDP)的弱对偶定理和强对偶定理. 它的可行集定义为:

$$\mathcal{F}_D = \left\{ (\mathbf{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j) \in \mathcal{F} \times \mathbf{R}_+^l \times \mathbf{R}_+^m \times \mathcal{V}_j^* : 0 \in \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i (\partial f_i(\mathbf{y}) - s_i \partial g_i(\mathbf{y})) + \sum_{j \in J} \bar{\mu}_j \partial_y h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j), \bar{\mu}_j h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j) \geq 0 \right\}$$

定义 4 令 $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j) \in \mathcal{F}_D$, 1) 若不存在 $(\mathbf{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 使得 $s - \bar{s} \in \mathbf{R}_{++}^l$, 则称 $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 为问题(ONMFDP)的弱有效解; 2) 若不存在 $(\mathbf{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 使得 $s - \bar{s} \in \mathbf{R}_+^l \setminus \{0\}$, 则称 $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 为问题(ONMFDP)的有效解.

定义 5^[18] 1) 若 $\forall x \in \mathbf{R}^n, \xi_i \in \partial f(\bar{x}), \eta_i \in \partial g(\bar{x}), i = 1, \dots, l, \zeta_j \in \partial h_j(\bar{x}, \bar{v}_j), j \in J$, 存在 $d \in \mathbf{R}^n$, 使得 $f_i(x) - f_i(\bar{x}) \geq \langle \xi_i, d \rangle, g_i(x) - g_i(\bar{x}) \leq \langle \eta_i, d \rangle, h_j(x, \bar{v}_j) - h_j(\bar{x}, \bar{v}_j) \geq \langle \zeta_j, d \rangle$ 成立, 则称 (f, g, h) 在 $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$

处是广义凸-凹的; 2) 若 $\forall x \in \mathbf{R}^n, \xi_i \in \partial f(\bar{x}), \eta_i \in \partial g(\bar{x}), i=1, \dots, l, \zeta_j \in \partial h_j(\bar{x}, \bar{v}_j), j \in J$, 存在 $d \in \mathbf{R}^n$, 使得 $f_i(x) - f_i(\bar{x}) > \langle \xi_i, d \rangle, g_i(x) - g_i(\bar{x}) \leq \langle \eta_i, d \rangle, h_j(x, \bar{v}_j) - h_j(\bar{x}, \bar{v}_j) \geq \langle \zeta_j, d \rangle$ 成立, 则称 (f, g, h) 在 $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ 处是严格广义凸-凹的。

定理 2 (弱对偶) 令 $\bar{x} \in \mathcal{F}, (\mathbf{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j) \in \mathcal{F}_D, 1)$ 若 (f, g, h) 在 \mathbf{y} 处是广义凸-凹的, 则 $s - \bar{s} \notin \mathbf{R}_{++}^l$; 2) 若 (f, g, h) 在 \mathbf{y} 处是严格广义凸-凹的, 则 $s - \bar{s} \notin \mathbf{R}_+^l \setminus \{0\}$ 。

证明 采用反证法, 首先证明 1)。假设 $s - \bar{s} \in \mathbf{R}_{++}^l$, 即:

$$F(\mathbf{y}) - F(\bar{x}) \in \mathbf{R}_{++}^l. \quad (7)$$

由于 $(\mathbf{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j) \in \mathcal{F}_D$, 则有: $0 \in \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i (\partial f_i(\mathbf{y}) - s_i \partial g_i(\mathbf{y})) + \sum_{j \in J} \bar{\mu}_j \partial_y h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j)$, 因此存在 $\xi_i^* \in \partial f_i(\mathbf{y}), \eta_i^* \in \partial g_i(\mathbf{y}), \zeta_j^* \in \partial_y h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j)$, 使得 $0 = \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i (\xi_i^* - s_i \eta_i^*) + \sum_{j \in J} \bar{\mu}_j \zeta_j^*$ 。

由于 (f, g, h) 在 \mathbf{y} 处是广义凸-凹的, 则对 $\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_j^*, d \in \mathbf{R}^n$, 有:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i (\xi_i^* - s_i \eta_i^*) + \sum_{j \in J} \bar{\mu}_j \zeta_j^*, d \right\rangle \leq \\ &= \sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i (f(\bar{x}) - f(\mathbf{y})) - s_i (g(\bar{x}) - g(\mathbf{y}))] + \sum_{j \in J} [\bar{\mu}_j (h_j(\bar{x}, \bar{v}_j) - h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j))] = \\ &= \sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i (f(\bar{x}) - s_i (g(\bar{x}))) - \sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i (f(\mathbf{y}) - s_i (g(\mathbf{y}))) + \sum_{j \in J} [\bar{\mu}_j (h_j(\bar{x}, \bar{v}_j) - h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j))] = \\ &= \sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i (f(\bar{x}) - s_i (g(\bar{x}))) + \sum_{j \in J} [\bar{\mu}_j (h_j(\bar{x}, \bar{v}_j) - h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j))], \end{aligned}$$

因此

$$0 \leq \sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i (f(\bar{x}) - s_i (g(\bar{x}))) + \sum_{j \in J} [\bar{\mu}_j (h_j(\bar{x}, \bar{v}_j) - h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j))]. \quad (8)$$

又因 $\bar{x} \in \mathcal{F}, (\mathbf{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j) \in \mathcal{F}_D$, 总有 $\sum_{j \in J} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x}, \bar{v}_j) \leq 0, \sum_{j \in J} \bar{\mu}_j h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j) \geq 0$, 结合式(8)有 $0 \leq \sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i (f(\bar{x}) - s_i (g(\bar{x})))]$ 。则至少存在 1 个 $k_0 \in \{1, 2, \dots, l\}$, 使得 $0 \leq f_{k_0}(\bar{x}) - s_{k_0} (g_{k_0}(\bar{x}))$, 也即 $\frac{f_{k_0}(\mathbf{y})}{g_{k_0}(\mathbf{y})} \leq \frac{f_{k_0}(\bar{x})}{g_{k_0}(\bar{x})}$ 。这与式(7)矛盾, 故假设不成立, 所以对 $\bar{x} \in \mathcal{F}, s - \bar{s} \notin \mathbf{R}_{++}^l$ 是成立的。

接下来证明 2)。假设 $s - \bar{s} \in \mathbf{R}_+^l \setminus \{0\}$, 有:

$$F(\mathbf{y}) - F(\bar{x}) \in \mathbf{R}_+^l \setminus \{0\}, \quad (9)$$

且存在 $\xi_i^* \in \partial f_i(\mathbf{y}), \eta_i^* \in \partial g_i(\mathbf{y}), \zeta_j^* \in \partial_y h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j)$, 使得 $0 = \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i (\xi_i^* - s_i \eta_i^*) + \sum_{j \in J} \bar{\mu}_j \zeta_j^*$ 。根据 (f, g, h) 在 \mathbf{y} 处的严格广义凸-凹性, 与以上证明方法类似, 可以得到:

$$0 < \sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i (f(\bar{x}) - s_i (g(\bar{x}))) + \sum_{j \in J} [\bar{\mu}_j (h_j(\bar{x}, \bar{v}_j) - h_j(\mathbf{y}, \bar{v}_j))]$$

和

$$0 < \sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i (f(\bar{x}) - s_i (g(\bar{x})))].$$

则至少存在 1 个 $k_0 \in \{1, 2, \dots, l\}$, 使得:

$$0 < f_{k_0}(\bar{x}) - s_{k_0} (g_{k_0}(\bar{x})),$$

也即 $\frac{f_{k_0}(\mathbf{y})}{g_{k_0}(\mathbf{y})} < \frac{f_{k_0}(\bar{x})}{g_{k_0}(\bar{x})}$ 。这与式(9)矛盾, 故假设不成立, 因而对于 $\forall \bar{x} \in \mathcal{F}$ 有 $s - \bar{s} \notin \mathbf{R}_+^l \setminus \{0\}$ 。证毕

以例 1 中的问题(NMFP)₁ 为例, 考虑它对应的 Mond-Weir 型对偶(ONMFDP)₁。

例 2 问题(NMFP)₁ 的 Mond-Weir 型对偶(ONMFDP)₁ 为:

$$\max F(\mathbf{y}) = \left(\frac{f_1(\mathbf{y})}{g_1(\mathbf{y})}, \frac{f_2(\mathbf{y})}{g_2(\mathbf{y})} \right),$$

$$\text{s. t. } (y, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}) \in \mathcal{F}_D.$$

当 $y=0$ 时,取 $\bar{\lambda}=(\lambda_1, \lambda_2)=(0, 1) \in \mathbf{R}_+^2, \bar{\mu}=0 \in \mathbf{R}_+, \forall \bar{v} \in \mathcal{V}$, 有式(1)和式(2)成立,因此有 $(y, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}) \in \mathcal{F}_D$. 但取 $\bar{x}=-1 \in \mathcal{F}$ 时,有 $s=\left(\frac{1}{2}, 2\right)-\bar{s}=\left(\frac{2}{9}, \frac{3}{2}\right) \in \mathbf{R}_{++}^2$. 在 $y=0$ 处,有 $\eta_2=0 \in \partial g_2(y), \forall d \in \mathbf{R}$ 总有 $g_2(\bar{x})-g_2(y)=1>0=\langle \eta_2, d \rangle$,也即 (f, g, h) 在 y 处不满足广义凸-凹性,所以定理 2 不成立。

定理 3 (强对偶)设 $\bar{x} \in \mathcal{F}$ 为问题(NMFP)的鲁棒弱有效解,满足假设(A)和(B), $h_j(\bar{x}, \cdot)$ 关于 \mathcal{V}_j 是凹函数,则存在 $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j) \in \mathbf{R}_+^l \times \mathbf{R}_+^m \times \mathbf{R}^n$ 使得:1) 若 (f, g, h) 在 y 处是广义凸-凹的,则 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 是问题(ONMFDP)的弱有效解;2) 若 (f, g, h) 在 y 处是严格广义凸-凹的,则 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 是问题(ONMFDP)的有效解。

证明 由于 \bar{x} 满足假设(A)和(B), $h_j(\bar{x}, \cdot)$ 关于 \mathcal{V}_j 是凹函数且为鲁棒弱有效解,由定理 1 可知:

$$0 \in \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i (\partial f_i(\bar{x}) - s_i \partial g_i(\bar{x})) + \sum_{j=1}^m \bar{\mu}_j \partial_x h_j(\bar{x}, \bar{v}_j),$$

$$\bar{\mu}_j h_j(\bar{x}, \bar{v}_j) = 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

从而总有 $\bar{x} \in \mathcal{F}_D$.

1) 由 (f, g, h) 在 y 处的广义凸-凹性,结合定理 2 中的 1)可知,对 $\forall (y, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j) \in \mathcal{F}_D$, 有 $s - \bar{s} \notin \mathbf{R}_{++}^l$, 由定义 3 可得 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 是问题(ONMFDP)的弱有效解。

2) 由 (f, g, h) 在 y 处的严格广义凸-凹性,结合定理 2 中的 2)可知, $\forall (y, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j) \in \mathcal{F}_D$, 有 $s - \bar{s} \notin \mathbf{R}_+^l \setminus \{0\}$.

所以 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 是问题(ONMFDP)的有效解。

证毕

定理 4 (逆对偶)令 $\forall x \in \mathcal{F}, (\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j) \in \mathcal{F}_D$, 1) 若 (f, g, h) 在 \bar{x} 处是广义凸-凹的,则 \bar{x} 是问题(NMFP)的鲁棒弱有效解, $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 是问题(ONMFDP)的弱有效解;2) 若 (f, g, h) 在 \bar{x} 处是严格广义凸-凹的,则 \bar{x} 是问题(NMFP)的鲁棒有效解, $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 是问题(ONMFDP)的有效解。

证明 使用反证法,首先证明 1)。假设 \bar{x} 不是问题(NMFP)的鲁棒弱有效解,则存在 $\tilde{x} \in \mathcal{F}$ 使得 $h_j(\tilde{x}, \bar{v}_j) \leq 0, F(\tilde{x}) - F(\bar{x}) \in -\mathbf{R}_{++}^l$, 也即 $\varphi(\tilde{x}) \in -\mathbf{R}_{++}^l$. 由 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j) \in \mathcal{F}_D$ 可知:

$$\sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i (f(\tilde{x}) - \bar{s}_i (g(\tilde{x}))) < 0. \tag{10}$$

根据 $\tilde{x} \in \mathcal{F}, (\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j) \in \mathcal{F}_D$ 可得 $\sum_{j \in J} \bar{\mu}_j h_j(\tilde{x}, \bar{v}_j) \leq 0$ 和 $\sum_{j \in J} \bar{\mu}_j h_j(\bar{x}, \bar{v}_j) \geq 0$, 因此有:

$$\sum_{j \in J} [\bar{\mu}_j (h_j(\tilde{x}, \bar{v}_j) - h_j(\bar{x}, \bar{v}_j))] \leq 0. \tag{11}$$

与定理 2 中 1)的证明类似,用 \bar{x} 替换 y , 将 \bar{x} 换成 \tilde{x} , 结合式(11)和 (f, g, h) 在 \bar{x} 处的广义凸-凹性,对 $\xi_i^* \in \partial f_i(\bar{x}), \eta_i^* \in \partial g_i(\bar{x}), \zeta_j^* \in \partial_{\bar{x}} h_j(\bar{x}, \bar{v}_j), \forall d \in \mathbf{R}^n$, 有:

$$\sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i (f(\tilde{x}) - \bar{s}_i (g(\tilde{x}))) \geq$$

$$\sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i (f(\tilde{x}) - \bar{s}_i (g(\tilde{x}))) + \sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i (f(\bar{x}) - \bar{s}_i (g(\bar{x}))) + \sum_{j \in J} [\bar{\mu}_j (h_j(\tilde{x}, \bar{v}_j) - h_j(\bar{x}, \bar{v}_j))] =$$

$$\sum_{i=1}^l [\bar{\lambda}_i ((f(\tilde{x}) - f(\bar{x})) - \bar{s}_i (g(\tilde{x}) - g(\bar{x}))) + \sum_{j \in J} [\bar{\mu}_j (h_j(\tilde{x}, \bar{v}_j) - h_j(\bar{x}, \bar{v}_j))] \geq$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i (\xi_i^* - s_i \eta_i^*) + \sum_{j \in J} \bar{\mu}_j \zeta_j^*, d \right\rangle = 0.$$

这与式(10)矛盾,从而有 \bar{x} 是(NMFP)的鲁棒弱有效解。

另一方面,假设 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 不是问题(ONMFDP)的弱有效解,因此存在 $(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 使得 $s - \bar{s} \in \mathbf{R}_{++}^l$, 由定理 2 中的 1)可知 $s - \bar{s} \notin \mathbf{R}_{++}^l$, 因而 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{v}_j)$ 是问题(ONMFDP)的弱有效解。

类似于 1)的证明方法可以得到 2)中的结论。

证毕

4 结束语

本文主要研究了不确定非光滑多目标分式优化问题。使用鲁棒优化和 Bector 等人^[27]的方法,将多目标分式优化问题转化为整式优化问题,再借助 Gordan 择一定理和极大极小定理建立了最优性必要条件,并在非光滑的 Extended Mangasarian-Fromovitz 约束下建立最优性必要条件;引入 Hong 等人在文献[18]中定义的广义凸-凹函数,在广义凸性的假设下研究了对偶问题与原问题的对偶性,推广了该文献中的结果。这些结论不仅使得优化理论内容更加丰富,也为求解多目标优化问题提供了新的算法依据。

参考文献:

- [1] JEAN M. Cours d'économie politique[M]. 4th edition. Paris: Librairie de Médicis, 1964.
- [2] 郭文贤, 郭萍, 潘琦, 等. 基于 Pareto 解集的治沙区非线性分式多目标水土资源优化配置模型[J]. 中国农业大学学报, 2023, 28(2): 172-185.
GUO W X, GUO P, PAN Q, et al. A nonlinear fractional multi-objective optimal allocation model of water and land resources in desert region based on Pareto solution set[J]. Journal of China Agricultural University, 2023, 28(2): 172-185.
- [3] 陈雪静, 彭再云, 邵重阳, 等. α - E -半预不变凸型函数的性质与多目标规划的最优性条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2020, 37(1): 91-98.
CHEN X J, PENG Z Y, SHAO C Y, et al. Properties of α - E -semi-preinvex convex functions and optimality conditions for multi-objective programming[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2020, 37(1): 91-98.
- [4] 彭再云, 秦南南, 李科科. G - E -半预不变凸型多目标规划的 Wolfe 型对偶[J]. 应用数学学报, 2015, 38(6): 1103-1114.
PENG Z Y, QIN N N, LI K K. Wolf type duality of G - E -semi-preinvex type multiobjective programming problems[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2015, 38(6): 1103-1114.
- [5] PENG Z Y, LI K K, ZHOU J T. Semi-prequasi-invex type multiobjective optimization and generalized fractional programming problems[J]. Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 2016, 9(12): 6142-6152.
- [6] PENG Z Y, DENG C Y, ZHAO Y, et al. Optimality conditions and duality for E -differentiable fractional multiobjective interval valued optimization problems with E -invexity[J]. Applied Set-Valued Analysis and Optimization, 2024, 6(3): 295-307.
- [7] 肖圆圆. 基于分式规划的农业用水资源优化配置不确定性模型研究[D]. 哈尔滨: 东北农业大学, 2017.
XIAO Y Y. Study on uncertainty model of optimal allocation of agricultural water resources based on fractional programming [D]. Harbin: Northeast Agricultural University, 2017.
- [8] 陈志远. 基于分式规划的智能波束赋形优化方法研究[D]. 南京: 南京邮电大学, 2023.
CHEN Z Y. Research on intelligent beamforming optimization method based on fractional programming[D]. Nanjing: Nanjing University of Posts and Telecommunications, 2023.
- [9] 冯欣怡. 约束分式优化问题的 Farkas 引理和鲁棒近似解研究[D]. 重庆: 重庆工商大学, 2022.
FENG X Y. Farkas lemmas and robust approximate solutions for constrained fractional optimization problems[D]. Chongqing: Chongqing Technology and Business University, 2022.
- [10] GORISSEN B L. Robust fractional programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2015, 166(2): 508-528.
- [11] PRÉKOPA A. Stochastic programming[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013.
- [12] BERTSIMAS D, GUPTA V, KALLUS N. Data-driven robust optimization[J]. Mathematical Programming, 2018, 167(2): 235-292.
- [13] 周婉娜, 霍永亮. 二层多目标随机规划逼近有效解集的上半收敛性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2021, 38(1): 39-45.
ZHOU W N, HUO Y L. The upper semi-convergence of the sets of approximation efficient solutions for bi-level multi-objective stochastic programming[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2021, 38(1): 39-45.
- [14] MULVEY J M, VANDERBEI R J, ZENIOS S A. Robust optimization of large-scale systems[J]. Operations Research, 1995, 43(2): 264-281.
- [15] 李艳艳, 赵洁, 林安. 不确定多目标优化的鲁棒解及强弱 Kuhn-Tucker 条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2020, 37(1): 130-134.
LI Y Y, ZHAO J, LIN A. Robust solutions and the weak and strong Kuhn-Tucker conditions in uncertain multi-objective optimization[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2020, 37(1): 130-134.
- [16] 张晓青, 赵克全. 一类鲁棒多目标优化问题的标量化性质[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2018, 35(2): 16-20.

- ZHANG X Q, ZHAO K Q. Scalarization characterizations for a class of robust multi-objective optimization problems[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2018, 35(2): 16-20.
- [17] CHUONG T D, KIM D S. A class of nonsmooth fractional multiobjective optimization problems[J]. Annals of Operations Research, 2016, 244(2): 367-383.
- [18] HONG Z, JIAO L G, KIM D S. On a class of nonsmooth fractional robust multi-objective optimization problems, part I: optimality conditions[J]. Applied Set-Valued Analysis and Optimization, 2020, 2(1): 109-121.
- [19] THU THUY N T, SU T V. Robust optimality conditions and duality for nonsmooth multiobjective fractional semi-infinite programming problems with uncertain data[J]. Optimization, 2023, 72(7): 1745-1775.
- [20] SUN X K, LONG X J, FU H Y, et al. Some characterizations of robust optimal solutions for uncertain fractional optimization and applications[J]. Journal of Industrial & Management Optimization, 2017, 13(2): 803-824.
- [21] 冯欣怡, 孙祥凯. 不确定信息下分式半无限优化问题的近似最优性刻画[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(6): 682-689.
- FENG X Y, SUN X K. Characterizations of approximate optimality conditions for fractional semi-infinite optimization problems with uncertainty[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2022, 43(6): 682-689.
- [22] 龚田甜. 非光滑多目标规划鲁棒解的最优性条件和鞍点定理[D]. 银川: 北方民族大学, 2020.
- GONG T T. Optimality conditions and saddle-point theorems for robust solutions to nonsmooth multiobjective programmings [D]. Yinchuan: North Minzu University of Nationalities, 2020.
- [23] MANGASARIAN O L. Nonlinear programming[M]. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [24] ROCKAFELLAR R T. Convex analysis[M]. Princeton: Princeton University Press, 1970.
- [25] FUKUSHIMA M. 非线性最优化基础[M]. 林贵华, 译. 北京: 科学出版社, 2011.
- FUKUSHIMA M. Foundations of nonlinear optimization[M]. LIN G H, translation. Beijing: Science Press, 2011.
- [26] BEN-TAL A, EL GHAOU L, NEMIROVSKIĬ A S. Robust optimization[M]. Princeton: Princeton University Press, 2009.
- [27] BECTOR C R, CHANDRA S, SINGH C. Duality in multiobjective fractional programming[M]//CAMBINI A, CASTAGNOLI E, MARTEIN L, et al. Generalized convexity and fractional programming with economic applications. Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1990: 232-241.

Theory and Methods of Multi-Objective Optimization

Optimality Conditions and Mond-Weir Type Duality for Nonsmooth Multiobjective Fractional Robust Optimization Programming

WU Hao, LI Xiangyou

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi 716000, China)

Abstract: The nonsmooth multiobjective fractional robust optimization problem is investigated. By employing the Gordan alternative theorem and minimax theorem, necessary optimality conditions are established under nonsmooth Extended Mangasarian-Fromovitz constraint qualifications. Subsequently, generalized convex-concave functions are introduced. A Mond-Weir type dual model is then proposed. Under generalized convexity assumptions, strong duality, weak duality, and converse duality theorems between the dual problem and the original problem are derived. These results enrich the theoretical framework of optimization theory and provide new algorithmic foundations for solving multiobjective optimization problems.

Keywords: multiobjective optimization; optimality conditions; weakly efficient solutions; dual

(责任编辑 方 兴)