

## 非凸多目标优化问题的凸上逼近方法\*

霍紫燕, 唐莉萍

(重庆师范大学 重庆国家应用数学中心, 重庆 401331)

**摘要:**提出一种求解非凸多目标优化问题的凸上逼近方法。首先,通过 $\epsilon$ -约束法将多目标优化问题转化为单目标优化问题;其次,利用一类凸上估计函数对非凸约束函数进行逼近,构造一系列凸松弛子问题,设计了序列参数凸逼近算法;然后,在适当的条件下,证明算法产生的迭代序列收敛到原多目标优化问题的KKT点;最后,通过数值实验来验证算法的可行性。

**关键词:**非凸多目标优化;凸上逼近方法;凸上估计函数;KKT点

**中图分类号:**O221.6

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-6693(2025)02-0068-10

多目标优化在工程设计<sup>[1]</sup>、机器学习<sup>[2-3]</sup>、投资组合优化<sup>[4]</sup>等多个领域有着广泛的应用。然而,由于实际问题存在复杂性,许多多目标优化问题呈现非凸结构。因此,如何有效求解非凸多目标优化问题成为了广受研究者关注的课题。

求解非凸多目标优化问题的常用方法有多种,其中包括标量化方法和凸逼近方法。标量化方法是指将多目标优化问题转化为与之对应的单目标优化问题进行求解,主要包括线性标量化方法和非线性标量化方法。非线性标量化方法主要用于处理非凸多目标优化问题,例如 $\epsilon$ -约束法<sup>[5-6]</sup>、Hybrid法<sup>[7]</sup>、Benson法<sup>[8]</sup>、加权Chebyshev范数法<sup>[9-10]</sup>等。这些方法无需在凸性假设下即能建立多目标优化问题(弱)有效解的标量化结果。凸逼近方法则主要作用于目标空间,通过多面体集序列逼近原多目标问题的(弱)有效(近似)值集。1998年,Benson<sup>[11]</sup>针对多目标线性规划问题提出了一类外部逼近算法。该算法通过线性规划对偶问题的解构造切割超平面,从而构造多面体集序列去逼近弱有效值集。2011年,Ehrgott等人<sup>[12]</sup>将Benson的外部逼近算法推广到求解凸多目标非线性规划问题,提出了一类近似版本的Benson算法。该算法基于可微情况下的一阶线性近似,构造近似的线性多目标优化问题,再借助Benson算法,进而获得内外逼近集序列。2014年,Löhne等人<sup>[13]</sup>考虑凸向量优化问题,推广了Benson外逼近算法并给出相应的对偶变体。该算法给出了上凸的内外逼近集,并且可用于目标函数和约束函数不可微的情况;同时,在每次迭代时,只需求解1个标量凸优化问题,提高了算法效率。2016年,Thang等人<sup>[14]</sup>考虑广义凸多目标优化问题,基于像集的法线方向构造切割超平面,提出一种新型外部逼近法,以获得该问题的近似弱有效值集,并证明了该算法的收敛性。2022年,Dörfler等人<sup>[15]</sup>将Löhne提出的原始算法推广到有界凸向量优化问题,通过求解凸二次子问题获得内外逼近集之间的Hausdorff距离,提出一种高效的选择规则选择顶点。然而,以上讨论的凸逼近方法更适用于凸或广义凸性质的多目标优化问题。

另一种凸逼近方法是将非凸问题转化为一类更易求解的凸优化问题,从而逐步逼近原问题的解。Zhu等人<sup>[16]</sup>针对带盒子约束的非凸多目标优化问题,基于 $\alpha$ BB凸化方法,通过划分盒子构造了一系列凸松弛子问题,实现了非凸多目标优化问题的分段凸化。该工作利用分段凸化问题的近似(弱)有效解集,建立了与原问题全局(弱)有效解集的逼近结果,展现了类似于夹逼定理的良好结构。通过控制盒子的宽度,设计了 $\alpha$ BB凸化算法,并证明了该算法能够获得非凸多目标优化问题的全局有效解子集。此处的 $\alpha$ BB方法用于对原非凸函数的凸下估计。Beck等人<sup>[17]</sup>针对非凸单目标优化问题提出了一种通用的序列参数凸逼近算法,该算法的基本思想是在每

\* 收稿日期:2024-10-11 修回日期:2025-01-25 网络出版时间:2025-04-29T15:43

资助项目:国家自然科学基金——重大项目(No. 11991024),重点项目(No. 12431010),面上项目(No. 12171060);重庆市自然科学基金项目(No. ncsmc2022-msxm01, No. CSTB2024NSCQ-LZX0140);重庆市教育委员会科学技术研究计划重大项目(No. KJZD-M202300504);重庆师范大学博望学者青年拔尖人才项目;重庆师范大学博士启动基金项目(No. 22XLB006)

第一作者简介:霍紫燕,女,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:2578000580@qq.com;通信作者:唐莉萍,女,教授,博士,E-mail:tanglipings@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250429.1304.002

次迭代中,通过使用凸上估计函数代替非凸函数,构造一系列凸松弛子问题,从而利用这些问题的解序列逼近原问题的解。受此启发,本文针对非凸多目标优化问题,结合标量化方法,基于凸上估计思想,构造一系列凸松弛子问题,进而逼近原非凸多目标优化问题的解。

## 1 预备知识

为方便后续讨论,先给出一些符号说明。设  $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2 \in \mathbf{R}^p$ , 序关系  $\mathbf{y}^1 < \mathbf{y}^2$  表示  $y_i^1 < y_i^2 (i=1, \dots, p)$ 。此外,  $\mathbf{y}^1 \leq \mathbf{y}^2$  表示  $y_i^1 \leq y_i^2 (i=1, \dots, p)$  且  $\mathbf{y}^1 \neq \mathbf{y}^2$ , 而  $\mathbf{y}^1 \leq \mathbf{y}^2$  表示  $y_i^1 \leq y_i^2 (i=1, \dots, p)$ 。记:

$$\mathbf{R}_+^p = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p : \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}, \mathbf{R}_{++}^p = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p : \mathbf{y} > \mathbf{0}\}.$$

设  $X, Y$  为集合,  $X$  与  $Y$  的笛卡尔积记作  $X \times Y$ , 表示为  $X \times Y = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\}$ 。

### 1.1 基本概念和定义

本文考虑如下非凸多目标优化问题:

$$\begin{aligned} \text{(MOP)} \quad & \min \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}))^T, \\ & \text{s. t. } g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j=1, \dots, m, \\ & \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

其中:目标函数  $f_i (i=1, \dots, p): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  是连续可微凸函数,约束函数  $g_j: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} (1 \leq j \leq q) (q \leq m)$  是连续可微非凸函数,且约束函数  $g_j: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} (q+1 \leq j \leq m)$  是连续可微凸函数。显然,当  $q=m$  时,所有约束函数  $g_j (1 \leq j \leq m)$  均是非凸函数。为方便,记问题(MOP)的可行集为:

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))^T \leq \mathbf{0}\}.$$

假设可行集  $X$  为非空有界集。

下面给出问题(MOP)的(弱)有效解的概念。

**定义 1**<sup>[16]</sup> 设  $\hat{\mathbf{x}} \in X$ , 有:

- 1) 称  $\hat{\mathbf{x}}$  为问题(MOP)的弱有效解(或弱 Pareto 最优解), 如果不存在  $\mathbf{x} \in X$ , 使得  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) < \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ ;
- 2) 称  $\hat{\mathbf{x}}$  为问题(MOP)的有效解(或 Pareto 最优解), 如果不存在  $\mathbf{x} \in X$ , 使得  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ 。

所有有效解组成的集合称为多目标优化问题的 Pareto 最优解集, Pareto 最优解集中每个解对应的目标值向量组成的集合称为 Pareto 前沿。

**定义 2**<sup>[17]</sup> 称  $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  为非凸函数  $g_i(\mathbf{x})$  的凸上估计函数, 如果存在集合  $Y \subseteq \mathbf{R}^r (r$  为正整数), 以及连续函数  $G_i: \mathbf{R}^n \times Y \rightarrow \mathbf{R}$  满足:

$$g_i(\mathbf{x}) \leq G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \forall \mathbf{y} \in Y,$$

并且存在连续函数  $\phi_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^r$  使得对任意给定的点  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ , 向量  $\mathbf{y} = \phi_i(\mathbf{x}) \in Y$  满足:

$$g_i(\mathbf{x}) = G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \nabla g_i(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (1)$$

其中:对于给定的  $\mathbf{y}$ , 函数  $G_i(\cdot, \mathbf{y})$  是连续可微凸函数。

**定义 3**<sup>[18]</sup> 称问题(MOP)在可行点  $\mathbf{x}^* \in X$  满足 Karush-Kuhn-Tucker 条件, 如果存在  $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbf{R}^p, \boldsymbol{\mu}^* \in \mathbf{R}^m$ , 使得:

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\lambda}^* + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\mu}^* = 0, \\ \boldsymbol{\lambda}^* > \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

满足这一条件的  $\mathbf{x}^*$  称为问题(MOP)的 KKT 点。

**引理 1**<sup>[19]</sup> (Karush-Kuhn-Tucker 必要性条件) 假设  $\mathbf{x}^*$  是如下问题的局部最小值点:

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \min f(\mathbf{x}), \\ & \text{s. t. } g_i(\mathbf{x}) = 0, i \in E = \{1, \dots, q\}, \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I = \{q+1, \dots, m\}, \\ & \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

其中:  $f, g_i$  是  $\mathbf{R}^n$  到  $\mathbf{R}$  上的连续可微函数, 并且假定  $\mathbf{x}^*$  是正则点, 则存在向量  $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_m^*)^T$ , 使得:

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \\ \mu_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0, \mu_i^* \geq 0, i \in I, \\ g_i(\mathbf{x}^*) = 0, i \in E. \end{cases}$$

通常,称上式为问题(P)的 Karush-Kuhn-Tucker 条件,满足这一条件的点  $\mathbf{x}^*$  称为问题(P)的 KKT 点。

## 1.2 $\varepsilon$ -约束法

$\varepsilon$ -约束法是求解多目标优化问题常用的标量化方法之一。基本思想是通过最小化 1 个原始目标函数,并将其余目标函数转化为约束条件,从而构建并求解如下的  $\varepsilon$ -约束问题:

$$\begin{aligned} (P_{l,\varepsilon}) \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} f_l(\mathbf{x}), \\ \text{s. t. } f_k(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_k, k=1, \dots, p, k \neq l, \\ g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j=1, \dots, m. \end{aligned}$$

其中:  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \in \mathbf{R}^p$ 。易知问题  $(P_{l,\varepsilon})$  是非凸单目标优化问题。为了后续讨论方便,记函数:

$$g_{m+k}(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}) - \varepsilon_k (k=1, \dots, l-1), g_{m+k-1}(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}) - \varepsilon_k (k=l+1, \dots, p),$$

由于  $f_k(\mathbf{x}) (k=1, \dots, p)$  是连续可微凸函数,故  $g_j(\mathbf{x}) (j \in \{m+1, \dots, m+p-1\})$  也是连续可微凸函数。从而问题  $(P_{l,\varepsilon})$  可以重新表述为如下形式:

$$\begin{aligned} (P_{l,\varepsilon}) \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} f_l(\mathbf{x}), \\ \text{s. t. } g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j \in \{1, \dots, m, m+1, \dots, m+p-1\}. \end{aligned} \quad (3)$$

**定义 4**<sup>[20]</sup> 若问题  $(P_{l,\varepsilon})$  的一个可行点  $\mathbf{x}^* \in X_\varepsilon$  使得  $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ , 则称不等式约束  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$  为  $\mathbf{x}^*$  的有效约束。反之,若有  $g_i(\mathbf{x}^*) < 0$ , 则称不等式约束  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$  为  $\mathbf{x}^*$  的非有效约束。称所有在  $\mathbf{x}^*$  处的有效约束的下标组成的集合

$$I(\mathbf{x}^*) = \{i \in \{1, \dots, m+p-1\} : g_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$$

为  $\mathbf{x}^*$  处的有效约束指标集,简称  $\mathbf{x}^*$  处的有效集。

**定义 5**<sup>[17]</sup> 称问题  $(P_{l,\varepsilon})$  的可行点  $\mathbf{x}^*$  是正则点,如果有效约束在  $\mathbf{x}^*$  点的梯度集  $\{\nabla g_i(\mathbf{x}^*)\}_{i \in I}$  是线性无关的,其中  $I = \{i \in \{1, \dots, m+p-1\} : g_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$ 。

基于  $\varepsilon$ -约束法,通过问题  $(P_{l,\varepsilon})$  的最优解,可以获得非凸多目标优化问题(MOP)的(弱)有效解。

**定理 1**<sup>[21]</sup> 1) 如果存在  $l \in \{1, \dots, p\}$  使得  $\hat{\mathbf{x}}$  是问题  $(P_{l,\varepsilon})$  的最优解,则  $\hat{\mathbf{x}}$  是问题(MOP)的弱有效解;

2) 如果存在  $l \in \{1, \dots, p\}$  使得  $\hat{\mathbf{x}}$  是问题  $(P_{l,\varepsilon})$  的唯一最优解,则  $\hat{\mathbf{x}}$  是问题(MOP)的有效解;

3) 可行解  $\hat{\mathbf{x}} \in X$  是问题(MOP)的有效解,当且仅当存在  $\varepsilon \in \mathbf{R}^p$  使得对于所有  $l \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}$  都是问题  $(P_{l,\varepsilon})$  的最优解。

## 2 非凸多目标优化问题的凸上逼近方法

本节研究一种求解非凸多目标优化问题的凸上逼近方法。该方法主要借助  $\varepsilon$ -约束法将多目标优化问题转化为单目标优化问题,并采用一类凸上估计函数替代非凸约束函数,构造一系列凸松弛子问题,再设计序列参数凸逼近算法进行求解。

首先给出序列参数凸逼近算法中常用的一类凸上估计函数  $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。考虑非凸函数  $g_i(\mathbf{x}) (i=1, \dots, q)$  在  $\mathbf{x}_k$  处的如下二次函数逼近:

$$G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = g_i(\mathbf{x}_k) + \nabla g_i(\mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} \alpha_{i,k} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|^2. \quad (2)$$

为了保证  $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$  的凸性以及局部区域上不等式  $g_i(\mathbf{x}) \leq G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$  成立,故可通过在点  $\mathbf{x}_k$  处的两点拟合方法<sup>[22]</sup> 估计因子  $\alpha_{i,k}$ , 即:

$$\alpha_{i,k} = \max\left(\beta, 2 \frac{g_i(\mathbf{x}_{k-1}) - [g_i(\mathbf{x}_k) + \nabla g_i(\mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k)]}{\|\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k\|^2}\right),$$

其中:  $\beta \geq 0$ 。易知,  $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$  满足式(1), 即  $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$  为非凸函数  $g_i(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}_k$  附近的凸上估计函数。

基于 Beck 等人<sup>[17]</sup>提出的单目标序列参数凸逼近算法框架,给出如下求解问题(MOP)的凸上逼近方法。

**算法** 凸上逼近方法(MUCA):

步骤 1, 给定  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}^p$ , 原多目标问题(MOP)转化为单目标优化问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$ 。

步骤 2, 给定问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$  的任意可行初始点  $\mathbf{x}_0, \beta > 0, \rho > 0, \alpha_{i,0} > 0$ 。令  $k := 0$ 。

步骤 3, 计算凸上估计函数  $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ , 由式(2)可得。

步骤 4, 计算如下凸松弛子问题的解  $\mathbf{x}_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} (P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})_k \min & f_l(\mathbf{x}), \\ \text{s. t. } & G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) \leq 0, i=1, \dots, q, \\ & g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j=q+1, \dots, m+p-1, \\ & \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

步骤 5, 若问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$  在  $\mathbf{x}_{k+1}$  处近似满足 KKT 条件, 即:

$$\min_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^n} \{ \|\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda})\|^2 \mid \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}; \text{若 } g_i(\mathbf{x}_{k+1}) < 0, \lambda_i = 0 \} \leq \rho,$$

其中:  $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f_l(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m+p-1} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$  是  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$  的 Lagrangian 函数, 则算法终止; 否则, 令  $k := k+1$ , 返回步骤 3。

**注 1** 在步骤 4, 将非凸约束函数  $g_i(\mathbf{x}) (i=1, \dots, q)$  分别替换为凸上估计函数  $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) (i=1, \dots, q)$ , 从而将非凸问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$  转化为凸子问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})_k$ 。

下面引理表明: MUCA 方法产生的可行点序列的函数值是单调非递增的, 即 MUCA 方法是一个下降方法。为了方便, 记凸子问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})_k$  的可行集为  $X_{\boldsymbol{\varepsilon},k}$ , 问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$  的可行集为  $X_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 。

**引理 2** 给定  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}^p, l \in \{1, \dots, p\}$ 。设  $\{\mathbf{x}_k\}$  是由 MUCA 方法生成的序列。则对每一个  $k \geq 0$ , 都有:

- 1)  $X_{\boldsymbol{\varepsilon},k} \subseteq X_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ;
- 2)  $\mathbf{x}_k \in X_{\boldsymbol{\varepsilon},k-1} \cap X_{\boldsymbol{\varepsilon},k}$ ;
- 3)  $\mathbf{x}_k$  是  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$  的可行点;
- 4)  $f_l(\mathbf{x}_{k+1}) \leq f_l(\mathbf{x}_k)$ 。

**证明** 1) 对于任意  $k \geq 0, i=1, \dots, q$ , 可知  $g_i(\mathbf{x}) \leq G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) \leq 0$ 。这意味着对任意  $\mathbf{x} \in X_{\boldsymbol{\varepsilon},k}$ , 都会满足问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$  中的约束条件, 即  $\mathbf{x} \in X_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 。

2) 由于点  $\mathbf{x}_k$  是问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})_{k-1}$  的最优解, 故  $\mathbf{x}_k \in X_{\boldsymbol{\varepsilon},k-1} \subseteq X_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 。又由于  $G_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k) = g_i(\mathbf{x}_k) \leq 0$ , 因此  $\mathbf{x}_k \in X_{\boldsymbol{\varepsilon},k}$ 。

3) 由 1) 和 2) 可知,  $\mathbf{x}_k \in X_{\boldsymbol{\varepsilon},k} \subseteq X_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , 则  $\mathbf{x}_k$  是问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})_k$  的可行点。

4) 由 2) 可知,  $\mathbf{x}_k$  是问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})_k$  的可行点, 而  $\mathbf{x}_{k+1}$  是问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})_k$  的最优解, 从而有  $f_l(\mathbf{x}_{k+1}) \leq f_l(\mathbf{x}_k)$ 。

证毕

**推论 1** 给定  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}^p, l \in \{1, \dots, p\}$ 。设  $\{\mathbf{x}_k\}$  是由 MUCA 方法生成的序列, 则函数值序列  $\{f_l(\mathbf{x}_k)\}$  收敛。

**证明** 由引理 2 的 4) 可知, 序列  $\{f_l(\mathbf{x}_k)\}$  是非增的。此外, 由于问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$  的可行集是非空有界集, 且  $f_l(\mathbf{x})$  是连续函数, 从而  $\{f_l(\mathbf{x}_k)\}$  是下有界的。因此,  $\{f_l(\mathbf{x}_k)\}$  是收敛序列。

证毕

### 3 收敛性分析

本节借助标量化问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$ , 在某些正则条件下, MUCA 方法生成的迭代序列收敛到原多目标优化问题(MOP)的 KKT 点。

首先给出关于连续可微函数的重要性质, 这在收敛性证明中起着重要的作用。

**引理 3**<sup>[17]</sup> 设  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  在非空凸紧集  $S \subseteq \mathbf{R}^n$  上是连续可微且严格凸的函数, 那么  $f$  在集合  $S$  上是强凸函数。

为了建立 MUCA 方法的收敛性, 下面给出原多目标问题(MOP)的 KKT 点与标量化问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$  的 KKT 点之间的关系。

**引理 4** 如果标量化问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$  在点  $\mathbf{x}^*$  处满足 KKT 条件, 则原多目标优化问题(MOP)在点  $\mathbf{x}^*$  处也会满足 KKT 条件。

**证明** 如果标量化问题  $(P_{l,\boldsymbol{\varepsilon}})$  在点  $\mathbf{x}^*$  处满足 KKT 条件, 即存在非负数  $\mu_1^*, \dots, \mu_{m+p-1}^* \in \mathbf{R}_+$  使得:

$$\nabla f_l(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m+p-1} \mu_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \quad (3)$$

$$\mu_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, i = 1, \dots, m+p-1. \quad (4)$$

将式(3)展开为:

$$\nabla f_l(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{l-1} \mu_{m+j}^* \nabla(f_j(\mathbf{x}^*) - \varepsilon_j) + \sum_{k=l}^{p-1} \mu_{m+k}^* \nabla(f_{k+1}(\mathbf{x}^*) - \varepsilon_{k+1}) = \mathbf{0},$$

由于  $\varepsilon_j (j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{l\})$  是常数, 因此  $\nabla(f_j(\mathbf{x}^*) - \varepsilon_j) = \nabla f_j(\mathbf{x}^*)$ ,  $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{l\}$ , 故上式可化简为:

$$\nabla f_l(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{l-1} \mu_{m+j}^* \nabla f_j(\mathbf{x}^*) + \sum_{k=l}^{p-1} \mu_{m+k}^* \nabla f_{k+1}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

令  $\boldsymbol{\lambda}^* = (\mu_{m+1}^*, \dots, \mu_{m+l-1}^*, 1, \mu_{m+l}^*, \dots, \mu_{m+p-1}^*)^T \in \mathbf{R}^p$ ,  $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_m^*)^T \in \mathbf{R}^m$ , 易知,  $\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}$ , 因此, 存在非负向量  $\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*$  使得:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\lambda}^* + \nabla g(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{0}. \quad (5)$$

又由式(4)可知:

$$\mu_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, i = 1, \dots, m,$$

即:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\mu}^* = 0. \quad (6)$$

结合式(5), (6)可知, 存在非负向量  $\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*$  使得:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\lambda}^* + \nabla g(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\mu}^* = 0.$$

因此, 原多目标问题(MOP)在点  $\mathbf{x}^*$  处也满足 KKT 条件. 证毕

**注 2** 上述引理表明: 若  $\mathbf{x}^*$  是问题  $(P_{l,\varepsilon})$  的 KKT 点, 则它一定是问题(MOP)的 KKT 点. 但反之并不一定成立, 因为标量化问题  $(P_{l,\varepsilon})$  的约束条件比问题(MOP)多, 因此互补松弛条件并不等价.

**定理 2** 给定  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}^p$ ,  $l \in \{1, \dots, p\}$ , 设  $\{\mathbf{x}_k\}$  是由 MUCA 方法生成的序列. 如果目标函数  $f_l$  在可行集的凸包上是严格凸的, 且序列  $\{\mathbf{x}_k\}$  的聚点  $\mathbf{x}^*$  是正则点, 则点  $\mathbf{x}^*$  是问题(MOP)的 KKT 点.

**证明** 给定  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}^p$ ,  $l \in \{1, \dots, p\}$  后, 问题(MOP)转化为单目标优化问题  $(P_{l,\varepsilon})$ . 下面针对问题  $(P_{l,\varepsilon})$  进行讨论. 由引理 3 可知, 严格凸的目标函数  $f_l$  在凸紧可行集  $X_{k+1}$  上是强凸函数. 因此, 存在  $c > 0$  使得, 对任意  $k \geq 0$ , 都满足:

$$f_l(\mathbf{x}_k) - f_l(\mathbf{x}_{k+1}) \geq \langle \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}, \nabla f_l(\mathbf{x}_{k+1}) \rangle + c \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}\|^2. \quad (7)$$

由引理 2 的结论 2) 可知,  $\mathbf{x}_k$  是问题  $(P_{l,\varepsilon})_k$  的可行点, 且  $\mathbf{x}_{k+1}$  为问题  $(P_{l,\varepsilon})_k$  的最优解, 从而由问题  $(P_{l,\varepsilon})_k$  的最优性条件<sup>[23]</sup> 可得:

$$\langle \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}, \nabla f_l(\mathbf{x}_{k+1}) \rangle \geq 0. \quad (8)$$

结合式(7), (8)可得:

$$f_l(\mathbf{x}_k) - f_l(\mathbf{x}_{k+1}) \geq c \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}\|^2. \quad (9)$$

由推论 1 可知, 序列  $\{f_l(\mathbf{x}_k)\}$  收敛, 因此由式(9)可知  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}\| \rightarrow 0$ , 即序列  $\{\mathbf{x}_k\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的柯西点列. 假设  $\mathbf{x}^*$  是序列  $\{\mathbf{x}_k\}$  的极限点, 易知  $\mathbf{x}^*$  是问题  $(P_{l,\varepsilon})$  的可行点. 下面证明  $\mathbf{x}^*$  是问题  $(P_{l,\varepsilon})$  的 KKT 点.

因  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^*$ , 故:

$$\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}^*, \text{ 且 } \mathbf{x}_{k-1} \rightarrow \mathbf{x}^*. \quad (10)$$

设  $I$  表示问题  $(P_{l,\varepsilon})$  在  $\mathbf{x}^*$  处的有效约束指标集,  $I_k$  表示问题  $(P_{l,\varepsilon})_{k-1}$  在  $\mathbf{x}_k$  处的有效约束指标集, 即:

$$I = \{i \in \{1, \dots, m+p-1\} : g_i(\mathbf{x}^*) = 0\},$$

$$I_k = \{i \in \{1, \dots, q\} : G_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) = 0\} \cup \{j \in \{q+1, \dots, m+p-1\} : g_j(\mathbf{x}_k) = 0\}.$$

令  $k \rightarrow \infty$ , 由式(10)及  $g_j, G_i$  的连续性, 可得:

$$g_j(\mathbf{x}_k) \rightarrow g_j(\mathbf{x}^*), j = q+1, \dots, m+p-1,$$

$$G_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) \rightarrow G_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) = g_i(\mathbf{x}^*), i = 1, \dots, q.$$

由以上 2 式可知, 存在正整数  $K_1$  使得:

$$I_k \subseteq I, \forall k \geq K_1. \quad (11)$$

因为  $\nabla f_l, \nabla_x G_i, \nabla g_j (i = 1, \dots, q, j = q+1, \dots, m+p-1)$  都是连续函数, 故当  $k \rightarrow \infty$  时, 可得:

$$\begin{aligned}\nabla f_l(\mathbf{x}_k) &\rightarrow \nabla f_l(\mathbf{x}^*), \\ \nabla_x G_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) &\rightarrow \nabla_x G_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) = \nabla g_i(\mathbf{x}^*), i=1, \dots, q, \\ \nabla g_j(\mathbf{x}_k) &\rightarrow \nabla g_j(\mathbf{x}^*), j=q+1, \dots, m+p-1.\end{aligned}$$

上述式子表明,问题 $(P_{l,\varepsilon})_{k-1}$ 的所有约束函数的梯度都会收敛到对应的问题 $(P_{l,\varepsilon})$ 的约束函数梯度。由于 $\mathbf{x}^*$ 是正则点,再结合包含关系式(11),这意味着存在正整数 $K_2 > K_1$ ,使得对任意的 $k > K_2$ , $\mathbf{x}_k$ 为问题 $(P_{l,\varepsilon})_{k-1}$ 的正则点。因此,对任意的 $k > K_2$ ,问题 $(P_{l,\varepsilon})_{k-1}$ 在点 $\mathbf{x}_k$ 处满足 KKT 条件,即存在非负数 $\mu_1^k, \dots, \mu_{m+p-1}^k \in \mathbf{R}_+$ 使得:

$$\begin{aligned}\nabla f_l(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^q \mu_i^k \nabla_x G_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) + \sum_{j=q+1}^{m+p-1} \mu_j^k \nabla g_j(\mathbf{x}_k) &= \mathbf{0}, \\ \mu_i^k G_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) &= 0, i=1, \dots, q, \\ \mu_j^k g_j(\mathbf{x}_k) &= 0, j=q+1, \dots, m+p-1.\end{aligned}\quad (12)$$

记 $\mathbf{v}_k := -\nabla f_l(\mathbf{x}_k)$  ( $k > K_2$ ),且定义矩阵 $\mathbf{A}_k$ 中的列向量对应指标集 $I$ 的约束函数梯度,即:

$$\{\nabla_x G_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1})\}_{i \in \{1, \dots, q\} \cap I} \cup \{\nabla g_j(\mathbf{x}_k)\}_{j \in \{q+1, \dots, m+p-1\} \cap I}.$$

由式(11)和问题 $(P_{l,\varepsilon})_{k-1}$ 的互补松弛条件可知 $\mu_i^k = 0, \forall i \notin I$ 。

因此,式(12)可简化为 $\mathbf{A}_k \boldsymbol{\eta}^k = \mathbf{v}_k$ ,其中 $\boldsymbol{\eta}^k = (\mu_i^k)_{i \in I}$ 是对应 $I$ 的所有乘子向量。记 $\mathbf{v} := -\nabla f_l(\mathbf{x}^*)$ ,并且定义矩阵 $\mathbf{A}$ 的列向量为 $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)_{j \in \{1, \dots, m+p-1\} \cap I}$ ,那么可知 $\mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{A}$ ,且 $\mathbf{v}_k \rightarrow \mathbf{v}$ 。此外,由于 $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*$ 是正则点,故 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}_k$  ( $\forall k > K_2$ )都是列满秩的,因此,有 $\boldsymbol{\eta}^k = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k)^{-1} \mathbf{A}_k^T \mathbf{v}_k$ 。

易知, $\boldsymbol{\eta}^k \rightarrow (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{v}$ 。由于:

$$\mu_i^k = \begin{cases} \eta_j^k, & i \in I, \\ 0, & i \notin I. \end{cases}$$

故 $\mu_i^k$ 存在极限,记为 $\mu_i^* \geq 0$ ,并且令 $k \rightarrow \infty$ ,从而问题 $(P_{l,\varepsilon})_{k-1}$ 的 KKT 条件的极限为:

$$\nabla f_l(\mathbf{x}^*) + \sum_{i \in I} \mu_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \mu_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, i \in I.$$

记 $\mu_i^* = 0, i \notin I$ ,故有:

$$\nabla f_l(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m+p-1} \mu_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \mu_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, i=1, \dots, m+p-1.$$

因此, $\mathbf{x}^*$ 是问题 $(P_{l,\varepsilon})$ 的 KKT 点。再由引理 4, $\mathbf{x}^*$ 是问题(MOP)的 KKT 点。证毕

**注 3** 由以上讨论可知,当问题(MOP)的目标函数中,除了第 $l$ 个外,其余都是非凸函数时,也可以通过 MUCA 方法获得问题(MOP)的 KKT 点。

## 4 数值实验

本节所有数值实验均在一台配置为 Intel(R) Core(TM) i5-13500H CPU@ 2.60 GHz,16 GB 运行内存的 64 位 Windows 11 操作系统笔记本电脑上运行。实验环境采用 MATLAB R2023a。

在所有例子中参数设置如下:取允许误差 $\beta = 10^{-5}$ , $\rho = 10^{-20}$ , $\alpha_{i,0} = 10^{-5}$ 。NSGA-II 算法在问题 1、问题 2、问题 4 及问题 5 的种群大小为 500,最大迭代次数为 100。问题 3 的种群大小为 1 500,最大迭代次数为 300。

**例 1** 考虑如下非凸多目标优化问题(问题 1)<sup>[24]</sup>:

$$\begin{aligned}\min f_1(x_1, x_2) &= (x_1 + x_2 - 7.5)^2 + \frac{(x_2 - x_1 + 3)^2}{4}, \\ f_2(x_1, x_2) &= \frac{(x_1 - 1)^2}{4} + \frac{(x_2 - 4)^2}{2}, \\ \text{s. t. } g_1(x_1, x_2) &= \frac{(x_1 - 2)^3}{2} + x_2 - 2.5 \leq 0, \\ g_2(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 - 8(x_2 - x_1 + 0.65)^2 - 3.85 \leq 0, \\ 0 &\leq x_1 \leq 5; 0 \leq x_2 \leq 3.\end{aligned}$$

其中:目标函数 $f_1, f_2$ 均为凸函数,约束函数 $g_1, g_2$ 为非凸函数。

现选取指标 $l=1$ ,问题 $(P_{l,\varepsilon})$ 的初始点 $\mathbf{x}_0 = (1, 3)^T$ 。图 1 红色部分是在区间 $[0.5, 2.5]$ 中均匀选取参数 $\varepsilon$

下,由 MUCA 方法生成的数值结果;绿色部分是由 NSGA-II 算法生成的数值结果。NSGA-II 算法给出了 Pareto 前沿面,图 1 表明,MUCA 方法生成的结果会与 NSGA-II 算法的部分解相同,因此 MUCA 算法可以得到该问题的近似有效解。

**例 2** 考虑如下具有非凸目标函数的非凸多目标优化问题(问题 2)<sup>[25]</sup>:

$$\begin{aligned} \min f_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{4}[(x_1 - 1)^4 + 2(x_2 - 2)^4], \\ f_2(x_1, x_2) &= (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2, \\ \text{s. t. } x &\in \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

其中:目标函数  $f_1$  为凸函数,  $f_2$  为非凸函数。

现选取指标  $l=1$ ,问题  $(P_{l,\epsilon})$  的初始点  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$ 。图 2 红色部分是在区间  $[0, 2]$  中均匀选取参数  $\epsilon$  下,由 MUCA 方法生成的数值结果;绿色部分是由 NSGA-II 算法生成的数值结果。NSGA-II 算法给出了 Pareto 前沿面,图 2 表明,MUCA 方法生成的结果会与 NSGA-II 算法的部分解相同,因此,针对含有非凸目标函数的非凸多目标优化问题,MUCA 算法依然可以获得它的近似有效解。

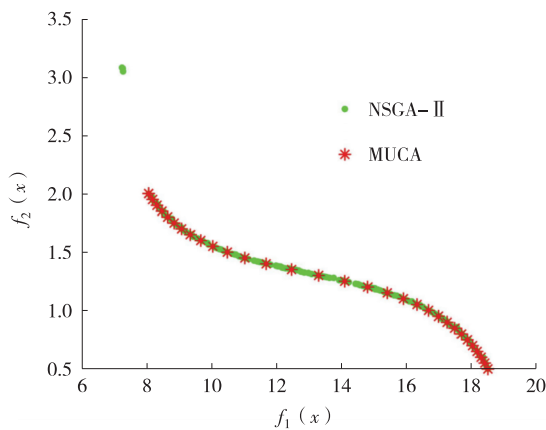


图 1 MUCA 方法和 NSGA-II 算法在问题 1 上获得的近似 Pareto 前沿面

Fig. 1 The approximate Pareto front obtained by the MUCA method and the NSGA-II algorithm for problem 1

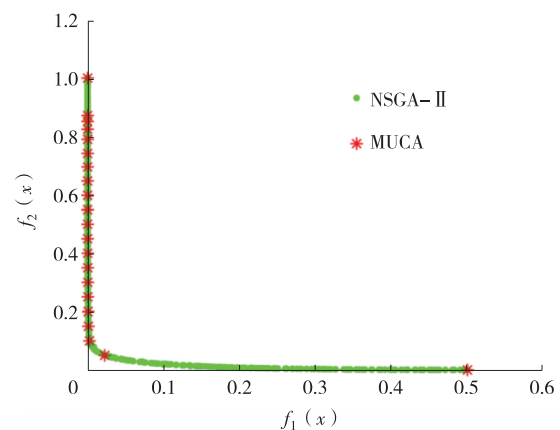


图 2 MUCA 方法和 NSGA-II 算法在问题 2 上获得的近似 Pareto 前沿面

Fig. 2 The approximate Pareto front obtained by the MUCA method and the NSGA-II algorithm for problem 2

**例 3** 考虑如下具有 3 个目标函数的非凸多目标优化问题(问题 3):

$$\begin{aligned} \min f_1(x_1, x_2) &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2, \\ f_2(x_1, x_2) &= 2x_1 + 3x_2, \\ f_3(x_1, x_2) &= \sin x_1 + x_2^3, \\ \text{s. t. } 0 &\leq x_1, x_2 \leq 5. \end{aligned}$$

其中:目标函数  $f_1, f_2$  为凸函数,  $f_3$  为非凸函数。

现选取目标函数为凸函数的指标  $l=1$ ,问题  $(P_{l,\epsilon})$  的初始点  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$ 。图 3 展示了在区间  $[0, 9]$  中均匀选取参数  $\epsilon$  的情况下, MUCA 算法生成的数值结果。图 4 中增加了由 NSGA-II 算法生成的数值结果,给出了 Pareto 前沿面。由图 4 可见, MUCA 方法生成的结果会与 NSGA-II 算法的部分解相同,因此, MUCA 算法同样可以获得该问题的近似有效解。

**例 4** 考虑如下非凸多目标优化问题<sup>[26]</sup>(问题 4):

$$\begin{aligned} \min f_1(x_1, x_2) &= x_1^2 + 3x_2^2 + 1, \\ f_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \\ \text{s. t. } -3 &\leq x_1, x_2 \leq 3. \end{aligned}$$

其中:目标函数  $f_1$  为凸函数,  $f_2$  为非凸函数。

现选取指标  $l=1$ , 问题  $(P_{l,\epsilon})$  的初始点  $x_0 = (3, 3)^T$ 。图 5 红色部分是在区间  $[0, 1, 2]$  中均匀选取参数  $\epsilon$  下, 由 MUCA 方法生成的数值结果; 绿色部分是由 NSGA-II 算法生成的数值结果。NSGA-II 算法给出了 Pareto 前沿面, 图 5 表明, MUCA 方法生成的结果会与 NSGA-II 算法的部分解相同。因此, MUCA 算法可以获得它的近似有效解。

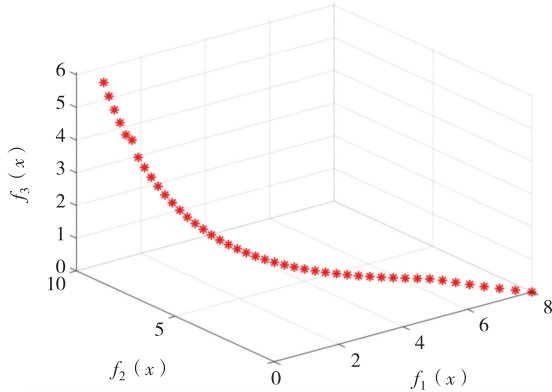


图 3 MUCA 方法在问题 3 上获得的近似 Pareto 前沿面

Fig. 3 The approximate Pareto front obtained by the MUCA method for problem 3

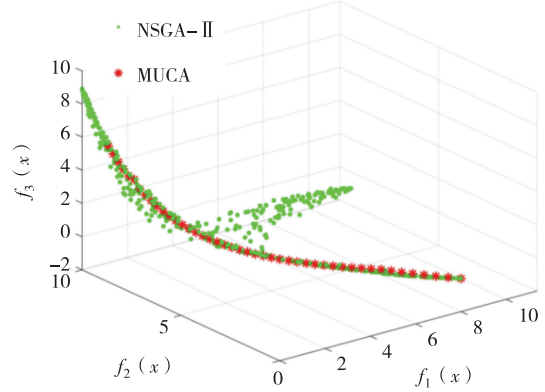


图 4 MUCA 方法 NSGA-II 算法在问题 3 上获得的近似 Pareto 前沿面

Fig. 4 The approximate Pareto front obtained by the MUCA method and the NSGA-II algorithm for problem 3

例 5 考虑如下非凸多目标优化问题<sup>[27]</sup> (问题 5):

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(x_1, x_2) = x_1, \\ & f_2(x_1, x_2) = \frac{1+x_2}{x_1}, \\ \text{s. t.} \quad & g_1(x_1, x_2) = -9x_1 - x_2 + 6 \leq 0, \\ & g_2(x_1, x_2) = -9x_1 + x_2 + 1 \leq 0, \\ & 0.1 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 5. \end{aligned}$$

其中: 目标函数  $f_1$  为凸函数,  $f_2$  为非凸函数, 约束函数  $g_1, g_2$  均为凸函数。

现选取指标  $l=1$ , 问题  $(P_{l,\epsilon})$  的初始点  $x_0 = (1, 0)^T$ 。图 6 红色部分是在区间  $[1, 7]$  中均匀选取参数  $\epsilon$  下, 由 MUCA 方法生成的数值结果; 绿色部分是由 NSGA-II 算法生成的数值结果。NSGA-II 算法给出了 Pareto 前沿面, 图 6 表明, MUCA 方法生成的结果会与 NSGA-II 算法的部分解相同, 因此, MUCA 算法可以获得它的近似有效解。

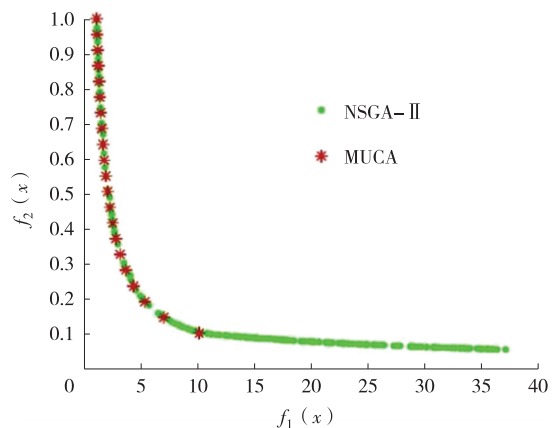


图 5 MUCA 方法和 NSGA-II 算法在问题 4 上获得的近似 Pareto 前沿面

Fig. 5 The approximate Pareto front obtained by the MUCA method and the NSGA-II algorithm for problem 4

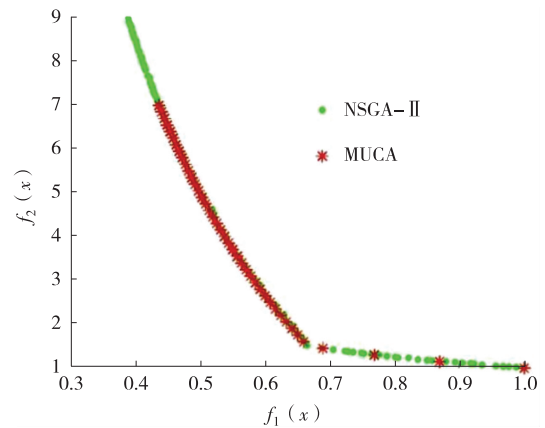


图 6 MUCA 方法和 NSGA-II 算法在问题 5 上获得的近似 Pareto 前沿面

Fig. 6 The approximate Pareto front obtained by the MUCA method and the NSGA-II algorithm for problem 5

## 5 结论

目前,针对非凸多目标优化问题,现有文献大多采用通过凸下估计函数构造凸松弛问题的求解方法。因此,本文提出了一种新的思路,通过利用凸上估计函数构造一系列凸松弛问题,建立了一种凸上逼近方法。该方法通过标量化手段将多目标问题转化为单目标问题,进而利用凸上估计函数将非凸问题转化为凸问题。在适当条件下,本文证明了所构造的凸松弛子问题的解序列收敛至原多目标优化问题的 KKT 点。此外,数值实验表明,通过 MUCA 方法可以有效获得非凸多目标优化问题的近似有效解。

### 参考文献:

- [1] COELLO COELLO C A, PULIDO G T. Multiobjective structural optimization using a microgenetic algorithm[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005, 30(5): 388-403.
- [2] JAIN P, KAR P. Non-convex optimization for machine learning[J]. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 2017, 10(3/4): 142-336.
- [3] NGUYEN B H, XUE B, ANDREAE P, et al. Multiple reference points-based decomposition for multiobjective feature selection in classification: static and dynamic mechanisms[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 24(1): 170-184.
- [4] BABAEI S, SEPEHRI M M, BABAEI E. Multi-objective portfolio optimization considering the dependence structure of asset returns [J]. *European Journal of Operational Research*, 2015, 244(2): 525-539.
- [5] MAVROTAS G, FLORIOS K. An improved version of the augmented  $\epsilon$ -constraint method (AUGMECON2) for finding the exact Pareto set in multi-objective integer programming problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(18): 9652-9669.
- [6] GRANDINETTI L, PISACANE O, SHEIKHALISHAHI M. An approximate  $\epsilon$ -constraint method for a multi-objective job scheduling in the cloud[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2013, 29(8): 1901-1908.
- [7] HUANG X X, YANG X Q. On characterizations of proper efficiency for nonconvex multiobjective optimization[J]. *Journal of Global Optimization*, 2002, 23(3): 213-231.
- [8] BUREŠ M, MAJER V, ZÁBRANSKÝ M. Modification of Benson method for estimation of ideal-gas heat capacities [J]. *Chemical Engineering Science*, 1981, 36(3): 529-537.
- [9] JR BOWMAN V J. On the relationship of the Tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives[M]// THIRIEZ H, ZIONTS S. *Multiple criteria decision making*. Berlin: Springer, 1976: 76-86.
- [10] STEUER R E, CHOO E U. An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming [J]. *Mathematical Programming*, 1983, 26(3): 326-344.
- [11] BENSON H P. An outer approximation algorithm for generating all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear programming problem[J]. *Journal of Global Optimization*, 1998, 13(1): 1-24.
- [12] EHRGOTT M, SHAO L Z, SCHÖBEL A. An approximation algorithm for convex multi-objective programming problems[J]. *Journal of Global Optimization*, 2011, 50(3): 397-416.
- [13] LÖHNE A, RUDLOFF B, ULUS F. Primal and dual approximation algorithms for convex vector optimization problems[J]. *Journal of Global Optimization*, 2014, 60(4): 713-736.
- [14] THANG T N, KIM N T B. Solving generalized convex multiobjective programming problems by a normal direction method[J]. *Optimization*, 2016, 65(12): 2269-2292.
- [15] DÖRFLER D, LÖHNE A, SCHNEIDER C, et al. A Benson-type algorithm for bounded convex vector optimization problems with vertex selection[J]. *Optimization Methods and Software*, 2022, 37(3): 1006-1026.
- [16] ZHU Q, TANG L P, YANG X M. A piecewise convexification method for non-convex multi-objective optimization programs with box constraints[EB/OL]. (2022-06-26)[2024-10-11]. <https://arXiv.org/abs/2206.12767>.
- [17] BECK A, BEN-TAL A, TETRUASHVILI L. A sequential parametric convex approximation method with applications to nonconvex truss topology design problems [J]. *Journal of Global Optimization*, 2010, 47(1): 29-51.
- [18] SAWARAGI Y, NAKAYAMA H, TANINO T. *Theory of multiobjective optimization*[M]. New York: Academic Press, 1985.
- [19] BERTSEKAS D P. *Nonlinear programming*[M]. 3rd edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2018.
- [20] 倪勤. 最优化方法与程序设计[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- NI Q. *Optimization method and program design* [M]. Beijing: Science Press, 2009.

- [21] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin:Springer-Verlag,2005.
- [22] ZHANG W H, FLEURY C. A modification of convex approximation methods for structural optimization[J]. Computers & Structures,1997,64(1/2/3/4):89-95.
- [23] BERTSEKAS D P. Nonlinear programming[J]. 2nd edition, Belmont; Athena Scientific,1999.
- [24] SHAN S Q, WANG G G. An efficient Pareto set identification approach for multiobjective optimization on black-box functions [J]. Journal of Mechanical Design,2005,127(5):866-874.
- [25] ANSARY M A T, PANDA G. A modified quasi-Newton method for vector optimization problem[J]. Optimization,2015,64(11):2289-2306.
- [26] HUBAND S, HINGSTON P, BARONE L, et al. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation,2006,10(5):477-506.
- [27] DEB K, PRATAP A, AGARWAL S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation,2002,6(2):182-197.

## Theory and Methods of Multi-Objective Optimization

### An Convex Upper Approximation Method for Non-Convex Multi-Objective Optimization Programs

HUO Ziyang, TANG Liping

(National Center for Applied Mathematics in Chongqing, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** A convex upper approximation method for non-convex multi-objective optimization problems is presented. First, the multi-objective optimization problem is transformed into a single-objective optimization problem using the  $\epsilon$ -constraint method. Second, a class of convex upper estimation function is used to approximate the non-convex constraint function, and a series of convex relaxation subproblems are constructed. A sequential parametric convex approximation algorithm is designed. Third, under appropriate conditions, it is proven that the iterative sequence generated by the algorithm converges to the KKT point of the original multi-objective optimization problem. Finally, numerical experiments are conducted to verify the feasibility of the algorithm.

**Keywords:** nonconvex multi-objective optimization; convex upper approximation method; convex upper estimate function; KKT points

(责任编辑 黄 颖)