多目标优化理论与方法专题

DOI:10.11721/cqnuj20250211

具状态属性向量集的标量化方法与缩减性质*

刘宏升，夏远梅，赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:标量化方法是处理多目标优化问题的基本方法之一。考虑状态变量和状态向量均为具正常或故障属性的一类特殊向量集,首先引入标志性函数对向量集中的状态向量进行标量化,引入故障临界参数对状态向量的状态属性进行近似刻画。进一步,在状态向量的状态变量按故障概率的一定排序下研究了具状态属性向量集的缩减性质,并提出了基于标量化方法的向量集缩减算法。最后,以电力系统可靠性领域中的 RBTS 系统为例进行了数值实验。实验结果表明:提出的方法在恰当的故障临界参数下,可对具状态属性向量集进行有效缩减。

关键词:具状态属性向量集;标量化方法;故障临界参数;缩减性质
中图分类号:O221.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2025)02-0078-10

多目标优化理论与方法是数学优化领域中十分重要的研究方向之一。1906 年,经济学家 Pareto[1] 在经济平衡问题的研究中首次提出了多目标优化“最优解”,后来被称为 Pareto 有效解。1951 年,Koopmans[2] 在生产与分配活动分析中首次利用由 n 维欧式空间 $\mathbf{R}^n$ 中的非负象限锥 $\mathbf{R}^n_+$ 诱导的偏序关系 $\leqq_{\mathbf{R}^n_+}$[3] 给出了 Pareto 最优解定义。同年,Kuhn 等人[4] 从数学规划的角度给出了向量极值问题 Pareto 有效解的概念,研究了 Pareto 有效解的充分和必要条件。1968 年,Geoffrion[5] 进一步利用偏序 $\leqq_{\mathbf{R}^n_+}$ 提出了多目标优化问题 Geoffrion 真有效解。

标量化方法是研究多目标优化问题的基本方法之一。它是指通过引入恰当的标量函数将多目标优化问题转化为数值优化问题,进而通过研究数值优化问题获得相应多目标优化问题最优解的一类数学方法。1955 年,Gass 等人[6] 首次提出了线性加权标量化方法。1968 年,Geoffrion[5] 在凸性条件下证明了多目标优化问题的真有效解与对应的线性加权标量化问题最优解的等价性。为处理非凸多目标优化问题,各类非线性标量化方法相继被提出。1971 年,Haimes 等人[7] 提出了 ε-约束法,该方法也称为主要目标法,由决策者选定 1 个主要目标函数进行优化,其他目标函数转化为不等式约束。1976 年,Bowman[8] 提出了加权 Tchebycheff 范数法,一些学者也利用该方法建立了多目标优化问题弱有效解和有效解的标量化结果。1984 年,Pascoletti 等人[9] 提出了 Pascoletti-Serafini 标量化方法,该方法将多目标优化问题的所有目标函数转化为约束条件。近年来,各类标量化方法的改进也相继被提出[10-13]。

具状态属性向量集是一类具有复杂数学结构的向量集合,集合中的元素被称为状态向量,状态向量的分量被称为状态变量。很多实际问题都可以抽象为这类向量集,如电力系统状态空间就是典型的具状态属性向量集,其中系统状态可看作是由电力元件状态变量作为分量构成的状态向量。根据电力元件的正常或故障状态属性,每一个系统状态向量具有正常或故障状态属性[14]。然而,由于电力系统状态空间中的系统状态数量巨大,判断和存储所有系统状态的状态属性几乎不可能。目前,电力领域主要采用 Monte Carlo 抽样法[15] 及其改进方法,筛选部分系统状态来获取状态属性进行可靠性评估。电力系统可靠性领域的奠基人 Billinton[16] 在 1998 年提出了状态扩展法,该方法的思想是从已被判断为故障的部分系统状态中获得更多其他系统状态的故障属性。因此,如何提出具状态属性向量集的有效缩减方法,缩减大量冗余状态向量,对具状态属性向量集的性质及应用

* **收稿日期**:2024-10-22　**修回日期**:2025-01-15　**网络出版时间**:2025-04-30T11:26
资助项目:国家重点研发计划项目(No. 2023YFA1011302);国家自然科学基金——重大项目(No. 11991024),面上项目 (No. 12171063);重庆市高校创新研究群体(No. CXQT20014);重庆英才计划创新领军人才项目(No. cstc2022ycjh-bgzxm0114)
第一作者简介:刘宏升,男,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:hongsheng9812@163.com;**通信作者简介**:赵克全,男,教授,博士生导师,E-mail:kequanz@cqnu.edu.cn
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.n.20250429.1628.020

研究十分重要。

本文考虑状态变量和状态向量均具正常或故障 2 种状态属性的一类特殊向量集。首先，给出具状态属性向量集全红区域，红绿交界区域和全绿区域的概念。然后，定义了具状态属性向量集的标志性函数对状态向量进行标量化处理，同时引入了故障临界参数 α 对状态向量的状态属性进行近似刻画。进一步，定义故障期望函数作为一类特殊的标志性函数，将状态向量的状态变量按故障概率值从大到小进行排序，研究了具状态属性向量集的缩减性质，提出了基于特殊标志性函数的向量集缩减算法。最后，利用电力领域中的 RBTS[17] 系统作为算例进行数值实验。实验结果表明：在恰当的参数 α 下，本文提出的方法可对具状态属性向量集进行有效缩减和估计。

1　预备知识

考虑如下具状态属性向量集：

$$X=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n \mid x_i=0 \text{ 或 } 1, i\in I=\{1,2,\cdots,n\}\},$$

其中：$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示状态向量，x_i 表示状态变量，$x_i=1$ 表示第 i 个状态变量故障，$x_i=0$ 表示第 i 个状态变量正常，n 表示状态变量个数，对于给定的 $n\in\mathbf{Z}^+$，X 也可称为 n 阶具状态属性向量集。将有 k 个分量等于 1 的状态向量称为 k 阶状态向量，记为 $\boldsymbol{x}(k)$，将 k 称为 $\boldsymbol{x}(k)$ 的故障阶数。将所有 k 阶状态向量构成的集合记为 $X(k)$，即：

$$X(k)=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in X \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}x_i=k\right\}。$$

显然，X 中的状态向量数 $\mathrm{card}(X)=2^n$，$X(k)$ 中的状态向量数 $\mathrm{card}(X(k))=\mathrm{C}_n^k$。

假设存在状态函数 $S:X\to\{0,1\}$，$S(\boldsymbol{x})=1$ 表示状态向量 $\boldsymbol{x}$ 具故障属性，$S(\boldsymbol{x})=0$ 表示状态向量 $\boldsymbol{x}$ 具正常属性。一般情况下，$S(\mathbf{0})=0$，$S(\mathbf{1})=1$，其中 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in X$。从不同实际问题中抽象出的具状态属性向量集的状态函数一般具有不同的函数表达式和实际意义。为方便理解，图 1 给出了所有状态向量的状态属性均已知的 6 阶具状态属性向量集示意图。

图 1 中的红色矩形代表对应的状态向量具故障属性，绿色矩形代表对应的状态向量具正常属性，状态向量分层排列，故障阶数相同的状态向量排列在同一水平层。注意到，图 1 按状态向量的故障阶数和状态属性可被划分成 3 个子集合，即全红区域 $PX1$，红绿交界区域 $PX2$，全绿区域 $PX3$，其中：

$$PX1=X(3)\cup X(4)\cup X(5)\cup X(6),\ PX2=X(2),\ PX3=X(0)\cup X(1)。$$

显然，全红区域中各阶状态向量均具故障属性，红绿交界区域中各阶状态向量具故障属性或正常属性，全绿区域中各阶状态向量均具正常属性。在实际应用中抽象出的具状态属性向量集都可按状态向量的故障阶数和状态属性划分成上述 3 类集合。同时，对大规模问题而言，这类向量集的状态向量数量巨大，利用状态函数计算所有状态向量的状态属性并进行存储几乎不可能。因此，如果能定位上述具状态属性向量集的 3 类区域，则不需要利用状态函数对所有状态向量进行判断就能够获得全红区域和全绿区域中状态向量的状态属性，但红绿交界区域中状态向量的状态属性分布情况仍然是复杂且未知的。所以，全红区域和全绿区域中的状态向量可以认为是冗余的状态向量。

令 P_i 表示第 i 个状态变量的故障概率值，$1-P_i$ 表示第 i 个状态变量的正常概率值，对任意的 $i\in I$，都有 $1-P_i>P_i$。令 $P(x_i)$ 表示状态变量 x_i 的概率分布函数，即：

$$P(x_i)=\begin{cases}P_i, & x_i=1,\\ 1-P_i, & x_i=0。\end{cases}$$

在 X 上引入由 n 维欧式空间 $\mathbf{R}^n$ 中的非负象限锥 $\mathbf{R}_+^n$ 诱导的偏序关系 $\leqq_{\mathbf{R}_+^n}$，即对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$，有：

$$\boldsymbol{x}\leqq_{\mathbf{R}_+^n}\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}_+^n\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i, i=1,2,\cdots,n。$$

定义 1　对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$，若函数 $\varphi:X\to\mathbf{R}$ 满足：

1) 单调性：若 $\boldsymbol{x}\leqq_{\mathbf{R}_+^n}\boldsymbol{y}$，则 $\varphi(\boldsymbol{x})\leqslant\varphi(\boldsymbol{y})$；

2) 非负性:$\varphi(\boldsymbol{x})\geqslant 0$;

3) 绝对可靠性:$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\varphi(\boldsymbol{x})=0$;

4) 绝对不可靠性:$\varphi(\boldsymbol{1})=\max\limits_{x\in X}\{\varphi(\boldsymbol{x})\}$。

则称 φ 为具状态属性向量集 X 上的标志性函数。

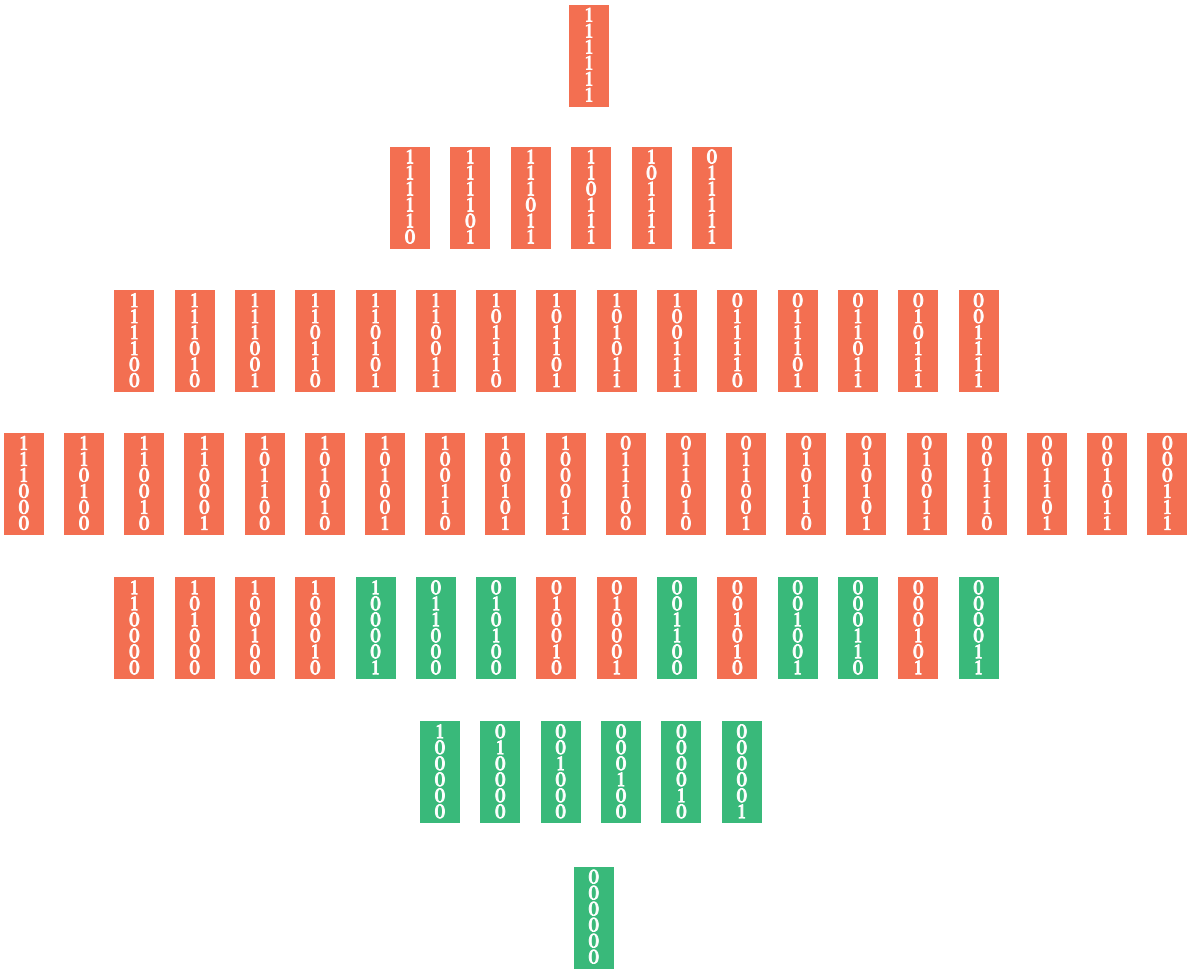

图 1 6 阶具状态属性向量集

Fig. 1 The 6-component vector set with state attributes

定义 2 设 $\alpha\in(0,1)$表示故障临界参数,φ 是 X 上的标志性函数,对任意的状态向量 $\boldsymbol{x}\in X$,有:

1) 如果 $\varphi(\boldsymbol{x})\geqslant\alpha$,则称状态向量 $\boldsymbol{x}$ 在 α 下故障(简称为 α-故障状态向量),记为 $S_\alpha(\boldsymbol{x})=1$;

2) 如果 $\varphi(\boldsymbol{x})<\alpha$,则称状态向量 $\boldsymbol{x}$ 在 α 下正常(简称为 α-正常状态向量),记为 $S_\alpha(\boldsymbol{x})=0$。

注 1 在实际应用中,利用相应的状态函数计算状态向量的状态属性一般是很复杂的。定义标志性函数并引入故障临界参数的目的是代替状态函数,对状态向量的状态属性进行近似刻画。

显然,标志性函数可以看做是 X 上的标量化函数,函数值描述对应状态向量的故障程度。考虑到状态变量故障概率值在一定程度上体现了状态变量间的相对重要性,本文依据状态变量的故障概率值提出如下特殊标志性函数,进而利用该标志性函数对具状态属性向量集进行标量化处理。

定义 3 对任意的状态向量 $\boldsymbol{x}\in X$,将 $\boldsymbol{x}$ 的故障期望函数定义为:

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(x_i)x_i。\tag{1}$$

容易验证,由式(1)定义的函数是 X 上的标志性函数。同时,由定义 1 的 3),4)可知,故障临界参数应满足 $\alpha\in\left(0,\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}P_i\right]$ 才能使得 $S_\alpha(\boldsymbol{0})=0$,$S_\alpha(\boldsymbol{1})=1$。

2　具状态属性向量集的缩减性质

本节根据状态变量的故障概率值对状态向量的状态变量进行排序,在故障期望函数下研究具状态属性向量集的缩减性质,进而对具状态属性向量集的红绿交界区域进行估计。对状态向量的 n 个状态变量按故障概率值从大到小进行排序,排序后的状态变量所对应的故障概率值应满足:

$$P_1\geqslant P_2\geqslant\cdots\geqslant P_n。\tag{2}$$

进一步,令 $J=\{0,1,2,\cdots,n\}$,对于任意的 $k\in J\backslash\{0,n\}$,也可对 $X(k)$ 中的 C_n^k 个状态向量进行标号并排序为 $\boldsymbol{x}^{(1)}(k),\boldsymbol{x}^{(2)}(k),\cdots,\boldsymbol{x}^{(C_n^k)}(k)$,且满足 $\varphi(\boldsymbol{x}^{(1)}(k))\geqslant\varphi(\boldsymbol{x}^{(2)}(k))\geqslant\cdots\geqslant\varphi(\boldsymbol{x}^{(C_n^k)}(k))$。

显然,对任意的 $k\in J\backslash\{0,n\}$,$X(k)$ 中第 1 个元素可表示为:

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(k)=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-k})^{\mathrm{T}},\tag{3}$$

最后一个元素可表示为:

$$\boldsymbol{x}^{(C_n^k)}(k)=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-k},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k})^{\mathrm{T}}。\tag{4}$$

若 $k=0$,则 $X(k)$ 仅有 $C_n^0=1$ 个状态向量,记为 $\boldsymbol{x}^{(1)}(0)=\boldsymbol{x}^{(C_n^0)}(0)$;若 $k=n$,则 $X(k)$ 仅有 $C_n^n=1$ 个状态向量,记为 $\boldsymbol{x}^{(1)}(n)=\boldsymbol{x}^{(C_n^n)}(n)$;显然,当 $k,k'\in J$ 且 $k\leqslant k'$ 时,$\boldsymbol{x}^{(1)}(k)\leqq_{\mathbf{R}_+^n}\boldsymbol{x}^{(1)}(k')$,$\boldsymbol{x}^{(C_n^k)}(k)\leqq_{\mathbf{R}_+^n}\boldsymbol{x}^{(C_n^{k'})}(k')$。

此外,由定义 2 和定义 3 可知,对任意的 $k\in J\backslash\{0,n\}$ 和任意的 $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}P_i\right]$,有:

$$1\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k))\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(2)}(k))\geqslant\cdots\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^k)}(k))\geqslant 0。\tag{5}$$

性质 1　1) $\varphi(\boldsymbol{x}^{(C_n^n)}(n))\geqslant\varphi(\boldsymbol{x}^{(C_n^{n-1})}(n-1))\geqslant\cdots\geqslant\varphi(\boldsymbol{x}^{(C_n^0)}(0))$;

2) $\varphi(\boldsymbol{x}^{(C_n^n)}(n))\geqslant\varphi(\boldsymbol{x}^{(C_n^{n-1})}(n-1))\geqslant\cdots\geqslant\varphi(\boldsymbol{x}^{(C_n^0)}(0))$。

证明　1) 对任意的 $k\in J$,令:

$$\boldsymbol{x}^{(C_n^k)}(k)=(x_1{}^{(C_n^k)}(k),x_2{}^{(C_n^k)}(k),\cdots,x_n{}^{(C_n^k)}(k))^{\mathrm{T}}。$$

则由式(4)和定义 3 可知:

$$\varphi(\boldsymbol{x}^{(C_n^k)}(k))=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(x_i{}^{(C_n^k)}(k))x_i{}^{(C_n^k)}(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=n-k+1}^{n}P_i,\ k\in J\backslash\{0\},\\ 0,\ k=0。\end{cases}$$

进一步,由式(2)可知 $\varphi(\boldsymbol{x}^{(C_n^n)}(n))\geqslant\varphi(\boldsymbol{x}^{(C_n^{n-1})}(n-1))\geqslant\cdots\geqslant\varphi(\boldsymbol{x}^{(C_n^0)}(0))$。

2) 类似于 1)的证明,由式(2),(3)和定义 3 可知结论成立。　　证毕

性质 2　对任意的故障临界参数 $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}P_i\right]$。有:

1) $1\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^n)}(n))\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{n-1})}(n-1))\geqslant\cdots\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^0)}(0))\geqslant 0$;

2) $1\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(n))\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(n-1))\geqslant\cdots\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(0))\geqslant 0$。

证明　由性质 1、定义 2 和定义 3 可知,结论显然成立。　　证毕

性质 3　对任意的故障临界参数 $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}P_i\right]$,若存在 $k',k''\in J$ 使得 $k'>k''$ 且 $S_\alpha(x^{(C_n^{k'})}(k'))=1$,$S_\alpha(x^{(1)}(k''))=0$,则存在 $k_0\in J$ 和 $k_1\in J$ 使得 $k'\geqslant k_0>k_1\geqslant k''$ 且有:

1) $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_0})}(k_0))=1,S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_0-1})}(k_0-1))=0$;

2) $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_1+1))=1,S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_1))=0$。

证明　1) 先证 $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k''})}(k''))=0$。事实上,若 $k''=0$,则 $\boldsymbol{x}^{(C_n^{k''})}(k'')=\boldsymbol{x}^{(1)}(k'')$。从而有:

$$S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k''})}(k''))=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k''))=0。$$

若 $k''\neq 0$,则由 $k''\in J$ 且 $k'>k''$ 可知,$k''\in J\backslash\{0,n\}$。故由 $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k''))=0$ 和式(5)可知 $S_\alpha(x^{(C_n^{k''})}(k''))=0$。

下证 k_0 的存在性。事实上,由 $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k''})}(k''))=0$, $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k'})}(k'))=1$ 和性质2的1)可知:

$$1=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k'})}(k'))\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k'-1})}(k'-1))\geqslant\cdots\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k''})}(k''))=0。$$

此外,由定义2可知,对任意的 $k\in\{k'',k''+1,\cdots,k'\}$, $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k})}(k))\in\{0,1\}$。故必存在 $k_0\in J$ 使得 $k''<k_0\leqslant k'$ 且 $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_0})}(k_0))=1, S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_0-1})}(k_0-1))=0$。

2) 先证 $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_0))=1$。事实上,若 $k_0=n$,则由 $k_0\leqslant k'\leqslant n$ 可知,$k_0=k'=n$。则 $\boldsymbol{x}^{(1)}(k_0)=\boldsymbol{x}^{(1)}(k')=\boldsymbol{x}^{(C_n^{k'})}(k')$。故有 $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_0))=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k'})}(k'))=1$;

若 $k_0\neq n$,则由 $k_0>k''$ 可知,$k_0\in J\backslash\{0,n\}$。故由1)和式(5)可知,$S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_0))=1$。

下证 k_1 的存在性。事实上,由性质2的2)可知 $1=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_0))\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_0-1))\geqslant\cdots\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k''))=0$。又对任意的 $k\in\{k'',k''+1,\cdots,k_0\}$, $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k))\in\{0,1\}$。故一定存在 k_1 使得 $k''\leqslant k_1<k_0$ 且有:

$$S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_1+1))=1, S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_1))=0。$$ 证毕

注2 显然,只要故障临界参数 $\alpha\in\left(0,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P_i\right]$,则 k' 和 k'' 必存在。

由性质3的证明可知,保证结论成立的 k_0, k_1 分别是 J 中唯一的元素。此外,k_0, k_1 可等价表示为:

$$k_0=\min\{k\in J\mid S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k})}(k))=1\}, k_1=\max\{k\in J\mid S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k))=0\}。$$

显然,$k_0>k_1$,即 $k_0\geqslant k_1+1$。称 k_0 为最小故障阶,k_1 为最大正常阶。

性质4 假定 $k_0=\min\{k\in J\mid S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k})}(k))=1\}, k_1=\max\{k\in J\mid S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k))=0\}$,满足 $k_0>k_1+1$。则对任意的 $k\in\{k_1+1,k_1+2,\cdots,k_0-1\}$,存在 $m_k\in\{1,2,\cdots,C_n^k\}$ 使得:

$$S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(m)}(k))=\begin{cases}1, & m\in\{1,2,\cdots,m_k\},\\ 0, & m\in\{m_k+1,m_k+2,\cdots,C_n^k\}。\end{cases}$$

证明 由 $k_0=\min\{k\in J\mid S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k})}(k))=1\}, k_1=\max\{k\in J\mid S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k))=0\}$ 可知:

$$S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_0-1})}(k_0-1))=0, S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_1+1))=1。\tag{6}$$

再由 $k_0>k_1+1$,式(6)和性质2可得:

$$0\leqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_1+1})}(k_1+1))\leqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_1+2})}(k_1+2))\leqslant\cdots\leqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_0-1})}(k_0-1))=0,$$
$$1=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_1+1))\leqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_1+2))\leqslant\cdots\leqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_0-1))\leqslant 1。$$

因此有:

$$S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_1+1})}(k_1+1))=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_1+2})}(k_1+2))=\cdots=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_0-1})}(k_0-1))=0,$$
$$S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_1+1))=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_1+2))=\cdots=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_0-1))=1。$$

由式(5)可知,对任意的 $k\in\{k_1+1,k_1+2,\cdots,k_0-1\}$,有:

$$1=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k))\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(2)}(k))\geqslant\cdots\geqslant S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k})}(k))=0。\tag{7}$$

又由定义2可知,对任意的 $m\in\{1,2,\cdots,C_n^k\}$, $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(m)}(k))\in\{0,1\}$。

因此,由式(7)可知,存在 $m_k\in\{1,2,\cdots,C_n^k\}$ 使得:

$$S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(m)}(k))=\begin{cases}1, & m\in\{1,2,\cdots,m_k\},\\ 0, & m\in\{m_k+1,m_k+2,\cdots,C_n^k\}。\end{cases}$$ 证毕

注3 由定义2、定义3、式(5)、性质3、注2和性质4可知,在故障期望函数和给定的故障临界参数 α 下,当某状态向量的故障阶数大于等于 k_0 时,该向量是 α-故障状态向量;当某状态向量的故障阶数小于等于 k_1 时,该向量是 α-正常状态向量;当某状态向量的故障阶数大于 k_1 且小于 k_0 时,该向量可能是 α-故障或 α-正常状态向量。将具状态属性向量集全红区域的估计区域、红绿交界区域的估计区域和全绿区域的估计区域分别记为:

$$PX1(\alpha)=\bigcup_{k=k_0}^{n}X(k),PX2(\alpha)=\bigcup_{k=k_1+1}^{k_0-1}X(k),PX3(\alpha)=\bigcup_{k=0}^{k_1}X(k)。$$

值得注意的是,当 $k_0=k_1+1$ 时,由性质 3 可知,有:

$$S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_0})}(k_0))=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_1+1))=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_0))=1,$$

$$S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_1})}(k_1))=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_0-1})}(k_0-1))=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_1))=0。$$

则由式(5)可知,有:

$$S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_0))=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(2)}(k_0))=\cdots=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_0})}(k_0))=1,$$

$$S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k_0-1))=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(2)}(k_0-1))=\cdots=S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^{k_0-1})}(k_0-1))=0。$$

显然,在这种情况下,有 $PX1(\alpha)=\bigcup_{k=k_0}^{n}X(k),PX2(\alpha)=\varnothing,PX3(\alpha)=\bigcup_{k=0}^{k_1}X(k)$。

下面基于二分搜索思想提出最小故障阶最大正常阶搜索算法,以获得具状态属性向量集的全红区域、红绿交界区域和全绿区域的估计区域,算法流程见表 1。

表 1　最小故障阶最大正常阶搜索算法

Tab. 1　Miaimal fault set's and maximal normal sets search algorithm

行号	伪代码
1	输入:状态变量故障概率值 $P_1,P_2,\cdots,P_n$,其中 $P_1\geqslant P_2\geqslant\cdots\geqslant P_n$,故障临界参数 α;
2	初始化:$L_1=L_2=0,R_1=R_2=n$;
3	while $L_1\leqslant R_1$ do
4	$k=\left\lceil\frac{L_1+R_1}{2}\right\rceil$;
5	if $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(C_n^k)}(k))=1$ then
6	$R_1=k$;
7	else
8	$L_1=k$;
9	end if
10	if $L_1=R_1-1$ then
11	break;
12	end if
13	end while
14	while $L_2\leqslant R_2$ do
15	$k=\left\lceil\frac{L_2+R_2}{2}\right\rceil$;
16	if $S_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)}(k))=1$ then
17	$R_2=k$;
18	else
19	$L_2=k$;
20	end if
21	if $L_2=R_2-1$ then
22	break;
23	end if
24	end while
25	输出:$k_0=R_1,k_1=L_2$;

3　数值实验

本节利用电力系统可靠性领域中的 RBTS[17] 作为算例进行数值实验,在不同的故障临界参数 α 下,利用本文算法得到从 RBTS 中抽象出的具状态属性向量集全红区域、红绿交界区域以及全绿区域的估计区域,并与实际区域分布进行比较,获得了不同 α 下本文算法的计算精确度。所有结果和分析均是利用 Python 3.10 编程实现且运行环境为:移动工作站(处理器:INTEL core i9-13900H 2.60 GHz,RAM:64 GB)。RBTS 包含 11 台发电机组和 9 条线路,所有电力元件均只有故障或正常 2 种状态,并且由电力元件状态变量构成的电力系统状态也只有故障或正常 2 种状态。则 RBTS 电力系统状态空间可以抽象为含 20 个状态变量的状态向量集:

$$X=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_{20})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{20}\mid x_i=0\text{ 或 }1,\ i\in I=\{1,2,\cdots,20\}\},$$

此时,对任意的 $k\in J=\{0,1,2,\cdots,20\}$,有:

$$X(k)=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_{20})^{\mathrm{T}}\in X\,\middle|\,\sum_{i=1}^{20}x_i=k\right\}。$$

判断该状态向量集中任一向量的状态属性需要求解一个最优负荷削减模型[18],这是非常复杂的非线性优化模型。为简化计算,本文考虑基于直流潮流的最优负荷削减模型情形。对任意的状态向量 $\boldsymbol{x}\in X$,令 $F(\boldsymbol{x})$是将 $\boldsymbol{x}$ 代入基于直流潮流的最优负荷削减模型进行求解得到的目标函数值,则 X 上的状态函数为:

$$S(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & F(\boldsymbol{x})>0,\\ 0, & F(\boldsymbol{x})=0。\end{cases}\tag{8}$$

将状态变量按故障概率值从大到小进行排序后的相关数据见表 2。

表2 状态变量故障概率排序

Tab. 2 Ranking of failure probability of state variables

状态变量	故障概率值	状态变量	故障概率值
x_1	$P_1=0.03$	x_{11}	$P_{11}=0.01$
x_2	$P_2=0.03$	x_{12}	$P_{12}=0.005\ 675\ 368\ 898\ 978\ 46$
x_3	$P_3=0.025$	x_{13}	$P_{13}=0.005\ 675\ 368\ 898\ 978\ 46$
x_4	$P_4=0.02$	x_{14}	$P_{14}=0.005\ 675\ 368\ 898\ 978\ 46$
x_5	$P_5=0.02$	x_{15}	$P_{15}=0.001\ 709\ 401\ 709\ 401\ 7$
x_6	$P_6=0.02$	x_{16}	$P_{16}=0.001\ 709\ 401\ 709\ 401\ 7$
x_7	$P_7=0.02$	x_{17}	$P_{17}=0.001\ 140\ 250\ 855\ 188\ 1$
x_8	$P_8=0.02$	x_{18}	$P_{18}=0.001\ 140\ 250\ 855\ 188\ 1$
x_9	$P_9=0.02$	x_{19}	$P_{19}=0.001\ 140\ 250\ 855\ 188\ 1$
x_{10}	$P_{10}=0.01$	x_{20}	$P_{20}=0.001\ 140\ 250\ 855\ 188\ 1$

由表2可知,故障临界参数值 $\alpha\in\left(0,\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}P_i\right]=(0,0.012\ 500\ 295\ 676\ 824\ 6]$。计算精确度定义为:

$$\varepsilon_1=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{card}(PX1(\alpha))}{\mathrm{card}(PX1)}, & \mathrm{card}(PX1(\alpha))<\mathrm{card}(PX1),\\ \dfrac{\mathrm{card}(PX1)}{\mathrm{card}(PX1(\alpha))}, & \mathrm{card}(PX1)<\mathrm{card}(PX1(\alpha)),\\ 1, & \mathrm{card}(PX1)=\mathrm{card}(PX1(\alpha))。\end{cases}$$

$$\varepsilon_2=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{card}(PX2(\alpha))}{\mathrm{card}(PX2)}, & \mathrm{card}(PX2(\alpha))<\mathrm{card}(PX2),\\ \dfrac{\mathrm{card}(PX2)}{\mathrm{card}(PX2(\alpha))}, & \mathrm{card}(PX2)<\mathrm{card}(PX2(\alpha)),\\ 1, & \mathrm{card}(PX2)=\mathrm{card}(PX2(\alpha))。\end{cases}$$

$$\varepsilon_3=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{card}(PX3(\alpha))}{\mathrm{card}(PX3)}, & \mathrm{card}(PX3(\alpha))<\mathrm{card}(PX3),\\ \dfrac{\mathrm{card}(PX3)}{\mathrm{card}(PX3(\alpha))}, & \mathrm{card}(PX3)<\mathrm{card}(PX3(\alpha)),\\ 1, & \mathrm{card}(PX3)=\mathrm{card}(PX3(\alpha))。\end{cases}$$

其中:$\mathrm{card}(PX1(\alpha))$表示本文算法在给定故障临界参数值 α 下计算得到的 X 的全红区域中状态向量的个数,$\mathrm{card}(PX1)$表示 X 实际的全红区域中状态向量的个数,ε_1 表示本文算法的全红区域计算精确度。同理,ε_2 则表示本文算法的红绿交界区域计算精确度,ε_3 则表示本文算法的全绿区域计算精确度。已知 X 在式(8)下的全红区域,红绿交界区域和全绿区域分别为:

$$PX1=\bigcup_{k=10}^{20}X(k),PX2=\bigcup_{k=1}^{9}X(k),PX3=X(0),$$

且

$$\mathrm{card}(PX1)=616\ 666,\mathrm{card}(PX2)=431\ 909,\mathrm{card}(PX3)=1。$$

根据 α 的取值范围,本文在几组 α 的取值下利用本文算法对 X 的3类区域进行了计算,结果见表3。与传统的电力系统可靠性评估方法——枚举法[18]的计算结果(表4)进行了对比,将利用枚举法计算得到的最小故障阶和最大正常阶分别记为:

$$\tilde{k}_0=\min\{k\in J\mid S(\boldsymbol{x}^{(C_n^k)}(k))=1\},\tilde{k}_1=\max\{k\in J\mid S(\boldsymbol{x}^{(1)}(k))=0\},$$

并且,将枚举法的计算精确度类似定义为:

$$\widetilde{\varepsilon}_1=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{card}(PX1(\mathrm{SE}))}{\mathrm{card}(PX1)}, & \mathrm{card}(PX1(\mathrm{SE}))<\mathrm{card}(PX1),\\ \dfrac{\mathrm{card}(PX1)}{\mathrm{card}(PX1(\mathrm{SE}))}, & \mathrm{card}(PX1)<\mathrm{card}(PX1(\mathrm{SE})),\\ 1, & \mathrm{card}(PX1)=\mathrm{card}(PX1(\mathrm{SE}))。\end{cases}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_2=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{card}(PX2(\mathrm{SE}))}{\mathrm{card}(PX2)}, & \mathrm{card}(PX2(\mathrm{SE}))<\mathrm{card}(PX2),\\ \dfrac{\mathrm{card}(PX2)}{\mathrm{card}(PX2(\mathrm{SE}))}, & \mathrm{card}(PX2)<\mathrm{card}(PX2(\mathrm{SE})),\\ 1, & \mathrm{card}(PX2)=\mathrm{card}(PX2(\mathrm{SE}))。\end{cases}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_3=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{card}(PX3(\mathrm{SE}))}{\mathrm{card}(PX3)}, & \mathrm{card}(PX3(\mathrm{SE}))<\mathrm{card}(PX3),\\ \dfrac{\mathrm{card}(PX3)}{\mathrm{card}(PX3(\mathrm{SE}))}, & \mathrm{card}(PX3)<\mathrm{card}(PX3(\mathrm{SE})),\\ 1, & \mathrm{card}(PX3)=\mathrm{card}(PX3(\mathrm{SE}))。\end{cases}$$

其中:$PX1(\mathrm{SE})$,$PX2(\mathrm{SE})$,$PX3(\mathrm{SE})$分别表示由枚举法计算得到的 X 的全红区域、红绿交界区域和全绿区域。

表 3　数值实验结果

Tab. 3　Numerical experimental results

α	k_0	k_1	$\mathrm{card}(PX1(\alpha))$	$\mathrm{card}(PX2(\alpha))$	$\mathrm{card}(PX3(\alpha))$	ε_1	ε_2	ε_3	计算时间/s
0.000 1	2	0	1 048 555	20	1	0.588 1	4.630 6e−05	1	0.19
0.000 5	7	0	988 116	6045 9	1	0.624 1	0.140 0	1	0.21
0.000 8	8	0	910 596	137 979	1	0.677 2	0.319 5	1	0.20
0.004	3	2	137 980	910 385	211	0.223 8	0.474 4	0.004 7	0.19
0.006	5	4	21 700	1 020 680	6196	0.035 2	0.423 2	0.000 2	0.19
0.008	7	6	1351	986 765	60 460	0.002 2	0.437 7	1.654 0e−05	0.23
0.010 9	9	0	21	431 889	616 666	3.405 4e−05	9.999 5e−01	1.621 6e−06	0.20
0.011 5	0	1	1	263 949	784 626	1.621 6e−06	0.611 1	1.274 5e−06	0.20
0.012 5	20	9	1	0	1 048 575	1.621 6e−06	0	9.536 8e−07	0.20
0.001 3	10	0	616 666	431 909	1	1	1	1	0.19
0.001 4	10	0	616 666	431 909	1	1	1	1	0.21
0.001 5	10	0	616 666	431 909	1	1	1	1	0.21

表 4　枚举法计算结果

Tab. 4　Calculation results of enumeration method

$\widetilde{k}_0$	$\widetilde{k}_1$	$\mathrm{card}(PX1(\mathrm{SE}))$	$\mathrm{card}(PX2(\mathrm{SE}))$	$\mathrm{card}(PX3(\mathrm{SE}))$	$\widetilde{\varepsilon}_1$	$\widetilde{\varepsilon}_2$	$\widetilde{\varepsilon}_3$	计算时间/s
10	0	616 666	431 909	1	1	1	1	5 983.24

由数值实验结果可知,在参数 α 的恰当取值下,本文算法可对从 RBTS 抽象出的具状态属性向量集的全红区域、红绿交界区域及全绿区域进行有效估计,并且与枚举法相比,本文算法在计算速度方面体现出更大的优势。图 2 给出了在参数 α 以 0.000 1 为步长,从 0.000 1 增大至 0.012 5,本文算法的计算精确度受 α 影响的变化趋势情况。

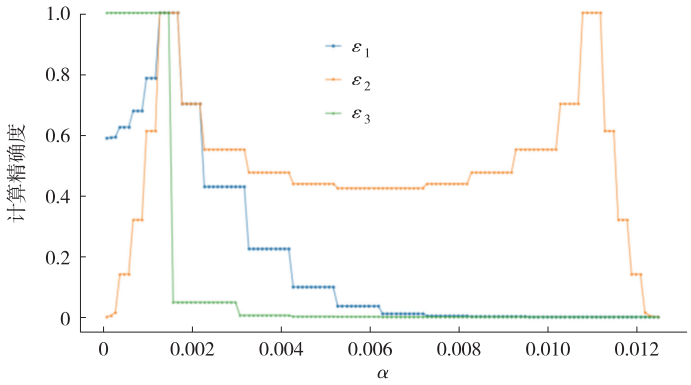

图 2 计算精度随 α 变化趋势

Fig. 2 The trend of the calculation accuracy changing with α

图 2 表明:当 α 在[0.001 3, 0.001 5]范围内取某些值时,本文算法对从 RBTS 抽象出的具状态属性向量集的全红区域、红绿交界区域及全绿区域的估计效果最好。

4 结论

本文利用线性标量化方法的思想定义了具状态属性向量集 X 上的标志性函数,考虑了状态变量故障概率值和状态向量的故障状态变量数对状态向量属性的影响,并利用故障临界参数代替状态函数对状态向量的状态属性进行近似刻画。本文所提出的标量化方法不仅提升了状态向量属性判断速度,还能使具状态属性向量集具有一定的排序性质,同时也可以利用该性质快速估计状态向量的属性分布。如何进一步研究故障期望函数的性质,进而对大规模具状态属性向量集进行高效精准缩减是今后研究的重要课题。

参考文献:

[1] PARETO V. Manuale di economic politica[M]. Milano:Societ a Editrice Linraria,1906.

[2] KOOPMANS T C. Activity analysis of production and allocation[M]. New York:John Wiley and Sons,1951.

[3] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin:Springer-Verlag,2005.

[4] KUHN H W,TUCKER A W. Nonlinear programming[M]//NEYMAN J. Proceedings of the second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability. Berkeley:University of California Press,1951:481-492.

[5] GEOFFRION A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1968,22(3):618-630.

[6] GASS S,SAATY T. The computational algorithm for the parametric objective function[J]. Naval Research Logistics Quarterly,1955,2(1/2):39-45.

[7] HAIMES Y Y,LASDON L S,WISMER D A. On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization[J]. IEEE Transactions on Systems,Man,and Cybernetics,1971,SMC-1(3):296-297.

[8] Jr BOWMAN V J. On the relationship of the Tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives[C]// THIRIEZ H,ZIONTS S. Multiple Criteria Decision Making. Berlin:Springer,1976:76-86.

[9] PASCOLETTI A,SERAFINI P. Scalarizing vector optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1984,42(4):499-524.

[10] 唐莉萍,李飞,赵克全,等.关于向量优化问题的 Δ 函数标量化刻画的某些注记[J].应用数学和力学,2015,36(10):1095-1106.
TANG L P,LI F,ZHAO K Q,et al. Some notes on the scalarization of function Δ for vector optimization problems[J]. Applied Mathematics and Mechanics,2015,36(10):1095-1106.

[11] EHRGOTT M,RUZIKA S. Improved ε-constraint method forMultiobjective programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2008,138(3):375-396.

[12] 赵克全,杨新民,夏远梅.多目标优化问题的完全标量化[J].中国科学:数学,2021,51(2):411-424.
ZHAO K Q,YANG X M,XIA Y M. Complete scalarization of multi-objective optimization problems[J]. Scientia Sinica (Mathematica),2021,51(2):411-424.

[13] 夏远梅,赵克全,高英. 多目标优化的广义 Pascoletti-Serafini 标量化[J]. 中国科学:数学,2024,54(2):231-244.
XIA Y M,ZHAO K Q,GAO Y. Generalized Pascoletti-Serafini scalarization for multi-objective optimization[J]. Scientia Sinica (Mathematica),2024,54(2):231-244.

[14] 程林,何剑. 电力系统可靠性原理和应用[M]. 2 版. 北京:清华大学出版社,2015.
CHENG L,HE J. Principles and applications of power system reliability[M]. 2nd edition. Beijing:Tsinghua University Press,2015.

[15] BILLINTON R,LI W Y. Reliability assessment of electric power systems using Monte Carlo methods[M]. New York:Plenum Press,1994.

[16] BILLINTON R,ZHANG W. State extension in adequacy evaluation of composite power systems:concept and algorithm[J]. Electric Power Systems Research,1998,47(3):189-195.

[17] BILLINTON R,KUMAR S,CHOWDHURY N,et al. A reliability test system for educational purposes-basic data[J]. IEEE Transactions on Power Systems,1989,4(3):1238-1244.

[18] FELDER F. Risk assessment of power systems:models,methods,and applications[J]. Interfaces,2006,36(2):179-180.

Theory and Methods of Multi-Objective Optimization

Scalarization Methods and Reduction Properties of Vector Sets with State Attributes

LIU Hongsheng, XIA Yuanmei, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Scalarization methods are among the basic approaches for dealing with multi-objective optimization problems. A class of special vector sets is considered, in which both the state variables and state vectors have availability or failure attribute. Firstly, the characteristic function is introduced to carry out scalarization processing on the state vectors in the vector sets, and the critical failure parameter is introduced to approximately characterize the state attributes of the state vectors. Further, under a certain ordering of the state variables of the state vectors according to the failure probability, the reduction properties of the vector sets with state attributes are studied and a reduction algorithm for the vector sets is proposed by means of the scalarization method. Finally, numerical experiments are carried out by taking the RBTS system in the field of power system reliability as an example. The experimental results show that under the appropriate critical failure parameter, the method proposed has a very good reduction effect on the vector sets with state attributes.

Keywords: vector sets with state attributes; scalarization methods; critical failure parameter; reduction properties

(责任编辑 黄 颖)