数学规划与最优性理论专题

DOI:10.11721/cqnuj20250207

群体博弈 Nash 均衡的存在性和 Levitin-Polyak 适定性*

曾　静，彭家玉
(重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067)

摘要:为研究群体博弈 Nash 均衡的存在性以及 Levitin-Polyak 适定性(后简称 LP 适定性)，首先分别借助辅助优化问题以及 Fan-KKM 引理建立群体博弈 Nash 均衡的存在性结果;其次引入 LP 适定性的概念，讨论群体博弈 LP 适定性在近似解集中的度量刻画;最后建立群体博弈 LP 适定性成立的充分性条件。在上 0-水平闭和拟凸的条件下，建立了群体博弈问题 Nash 均衡的存在性和 LP 适定性;在较弱的条件下建立群体博弈问题 Nash 均衡的存在性，提出群体博弈问题 Nash 均衡的 LP 适定性并建立它成立的充分性条件。

关键词:群体博弈;Nash 均衡;Levitin-Polyak 适定性;Fan-KKM 定理

中图分类号:O224　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2025)02-0100-07

博弈论是以数学为基础来研究博弈行为中最优决策问题的一门学科，它不仅是现代数学的一个分支，还是运筹学的重要组成部分[1-3]。在现实生活中，许多博弈问题涉及大规模大群体之间的策略互动情形，而群体博弈则为这一情形提供了一个统一分析框架。群体博弈是分析个体大量竞争环境下博弈问题的有力工具，是博弈论中一个新兴的研究方向，且已被广泛应用于生物学、社会学等多个学科领域的研究中。群体博弈的思想起源于 1950 年 Nash 在博士论文中对混合策略均衡解做了“群体行动”的解释[4]，遗憾的是这一解释直到 Nash 获得诺贝尔经济学奖后才引起博弈论研究者的广泛注意[5-7]。2011 年，Sandholm[8] 正式提出了群体博弈的基本模型，为群体博弈的研究提供了重要的理论依据;2016 年，Yang 等人[9] 在此基础上将群体博弈从单目标情形扩展到多目标情形。2021 年，Zhao 等人[10] 考虑了有限理性下含参群体博弈均衡的稳定性。

解的存在性是许多数学问题研究的重要内容。2011 年，Sandholm[8] 证明了当支付函数连续时，群体博弈至少存在 1 个 Nash 均衡。2017 年，Yang 等人[11] 研究了当支付函数连续时，多目标群体博弈问题的弱 Pareto-Nash 均衡的存在性。2021 年，Zhao 等人[10] 同样在支付函数连续的情况下得到了含参群体博弈 Nash 均衡的存在性。

适定性是许多非线性问题稳定性研究的重要课题之一。非线性数学问题的适定性大致分为 Hadamard 适定性、Tikhonov 适定性和 Levitin-Polyak 适定性(后简称 LP 适定性)。这 3 种类型的适定性已经在许多不同模型情况下得到研究和推广，例如标量优化问题、向量优化问题、平衡问题、不动点问题等[12-16]。近些年来，研究者针对博弈问题提出了适定性的概念。2016 年，Zeng 等人[17] 证明了一类广义多主从博弈弱 Pareto-Nash 均衡的存在性和 LP 适定性。Khanh 等人[18] 研究了含参广义多目标博弈的稳定性及 LP 适定性。2017 年，Yang 等人[19] 研究了具有非空 α-核的抽象经济问题集合的 Hadamard 适定性。2021 年，Jia 等人[20] 对稳定群体博弈 Nash 均衡的存在性进行了研究，并得到了稳定群体博弈的 Tikhonov 适定性和 Hadamard 适定性结果。然而，针对群体博弈问题 Nash 均衡的适定性研究成果目前还较为少见。

受上述研究的启发，本文考虑对群体博弈 Nash 均衡的存在性以及 LP 适定性进行研究，首先借助优化问题以及 Fan-KKM 引理得到了群体博弈 Nash 均衡的存在性结果，然后引入 LP 适定性的概念建立了群体博弈 LP

* **收稿日期**:2023-04-22　**修回日期**:2024-10-16　**网络出版时间**:2025-04-29T16:52
资助项目:国家自然科学基金青年科学基金项目(No. 11401058);重庆市自然科学基金——面上项目(No. cstc2019jcyj-msxmX0605)，一般项目(No. cstc2014jcyjA00004);重庆市教育委员会科学技术研究计划项目青年项目(No. KJQN201800837);重庆市研究生导师团队建设项目(No. yds223010);重庆工商大学创新团队项目(No. ZDPTTD201908)
第一作者简介:曾静，女，教授，博士，研究方向为最优化理论与应用，E-mail:zengjing1983@ctbu.edu.cn
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250429.1619.018

适定性成立的充分性条件。

1　预备知识

本节主要介绍一些基本的符号、定义和性质，首先介绍群体博弈的模型。

设有群体博弈问题 PG，记为 PG$=(P,X,F)$，其中 $P=\{1,2,\cdots,N\}$ 是由 $N\geqslant 1$ 个群体组成的社会。当 $N=1$ 时，表示单群体博弈。在每个群体 $p\in P$ 中，有大量但有限的个体，这些个体从有限集 $S^p=\{1,2,\cdots,n^p\}$ 中独立选择纯策略，其中 $n^p\in\mathbf{N}_+$ 表示群体 p 中纯策略的总数，n^p 的数量可能因群体而异。群体 p 中个体总量份额为 $m^p>0$，相应的群体状态集为：$X^p=\{\boldsymbol{x}^p=(x_1^p,x_2^p,\cdots,x_{n^p}^p)\in\mathbf{R}_+^{n^p}:x_1^p+x_2^p+\cdots+x_{n^p}^p=m^p\}$，其中：$x_i^p$ 表示群体 p 中选择策略 $i\in S^p$ 的个体份额。令 $n=\sum\limits_{p\in P}n^p$ 表示整个社会的纯策略总数。

此外，$X=\prod\limits_{p\in P}X^p=\{\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,\cdots,x^N)\in\mathbf{R}_+^n:\boldsymbol{x}^p\in X^p\}$ 表示整个社会的状态集，其中 $\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,\cdots,x^N)\in X$ 表示所有群体的一次行动状态。$F:X\to\mathbf{R}^n$ 表示整个社会的支付函数，其中每个群体中的每个策略都有一个支付向量，即：$F(\boldsymbol{x})=(F^1(\boldsymbol{x}),\cdots,F^p(\boldsymbol{x}),\cdots,F^N(\boldsymbol{x}))$，$\forall\boldsymbol{x}\in X$，$\forall p\in P$，且 $F^p:X\to\mathbf{R}^{n^p}$ 表示群体 p 对应于 S^p 的支付向量即 $F^p(\boldsymbol{x})=(F_1^p(\boldsymbol{x}),F_2^p(\boldsymbol{x}),\cdots,F_{n^p}^p(\boldsymbol{x}))$，$F_i^p:X\to\mathbf{R}$ 表示群体 p 中代理人选择策略 $i\in S^p$ 的支付函数。

定义 1[21]　设 PG$=(P,X,F)$是一个群体博弈问题。若社会状态 $\boldsymbol{x}\in X$ 满足：$\forall\boldsymbol{y}\in X$，有$\langle F(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle\leqslant 0$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为群体博弈问题 PG 的 Nash 均衡。群体博弈问题 PG 的 Nash 均衡解集记为 $S(F)$。

注 1　由文献[20]可知，群体博弈问题 PG 的 Nash 均衡 $\boldsymbol{x}$ 可等价定义为：$\forall i,j\in S^p$，$p\in P$，有 $x_i^p\geqslant 0\Rightarrow F_i^p(\boldsymbol{x})\geqslant F_j^p(\boldsymbol{x})$。

定义 2[22]　设 X 是一个 Banach 空间，$g:X\to\overline{\mathbf{R}}$ 是一个扩展实值函数，$\boldsymbol{x}_0\in X$。

1) $g(\boldsymbol{x})>g(\boldsymbol{x}_0)\Rightarrow g(\boldsymbol{x})>\limsup g(\boldsymbol{x}_n)$，$\forall\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}_0$，则称 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是上伪连续的。若 $-g$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是上伪连续的，则称 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是下伪连续的。若 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处既是上伪连续的，又是下伪连续的，则称 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处伪连续。

2) 若对任意的序列$\{\boldsymbol{x}_n\}$，$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}_0$，有 $g(\boldsymbol{x}_n)\geqslant 0$，$\forall n\Rightarrow g(\boldsymbol{x}_0)\geqslant 0$，则称 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是上 0-水平闭的。若 $-g$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是上 0-水平闭的，则称 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是下 0-水平闭的。若 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处既是上 0-水平闭的，又是下 0-水平闭的，则称 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是 0-水平闭的。

3) 若对任意的序列$\{\boldsymbol{x}_n\}$，$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}_0$，$\{\varepsilon_n\}\subset\mathbf{R}_+$，$\varepsilon_n\to 0$ 有 $g(\boldsymbol{x}_n)+\varepsilon_n\geqslant 0$，$\forall n\Rightarrow g(\boldsymbol{x}_0)\geqslant 0$，则称 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是强上 0-水平闭的。若 $-g$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是强上 0-水平闭的，则称 g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是强下 0-水平闭的。

注 2　由文献[22]可知，若 g 是上(下)伪连续的，且 $0\in g(X)$，则 g 是上(下)0-水平闭的。

引理 1[23]　设 K 是一个 Banach 空间 X 的紧子集。若 $g:X\to\mathbf{R}$ 在 K 是上伪连续的，则 g 在 K 中至少存在 1 个极大化点。

定义 3[24]　设 X 是一个 Banach 空间，$g:X\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数。若 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$，$t\in[0,1]$，且：

$$g(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y})\leqslant\max\{g(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{y})\},$$

则称函数 g 是拟凸的。

定义 4[25]　设 A 是 X 的非空子集。集值映射 $T:A\to 2^X$ 被称作 KKM 映射当且仅当对 A 的任意有限子集 $\{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_m\}$，有 $\mathrm{conv}(\{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_m\})\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^m T(\boldsymbol{y}_i)$。

引理 2[25]　(Fan-KKM 引理)设 A 是 X 的非空子集，集值映射 $T:A\to 2^X$ 是一个具有闭值的 KKM 映射。若存在 $\boldsymbol{y}_0\in A$，使得 $T(\boldsymbol{y}_0)$是紧集，则 $\bigcap\limits_{\boldsymbol{y}\in A}T(\boldsymbol{y})\neq\varnothing$。

定义 5　若存在序列$\{\varepsilon_n\}\subseteq\mathbf{R}_+$，且 $\varepsilon_n\to 0$，使得距离函数 $d(\boldsymbol{x}_n,X)\leqslant\varepsilon_n$，且$\langle F(\boldsymbol{x}_n),\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_n\rangle-\varepsilon_n\leqslant 0$，$\forall\boldsymbol{y}\in X$，则称序列$\{\boldsymbol{x}_n\}\subseteq\mathbf{R}_+^n$ 是群体博弈问题 PG 的 Levitin-Polyak 近似解序列(后简称 LP 序列)。

定义 6　若：1) 群体博弈问题 PG 的解集 $S(F)$非空；2) 对任一 LP 序列$\{\boldsymbol{x}_n\}$，存在它的子序列$\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$使得 $\boldsymbol{x}_{n_k}\to\boldsymbol{x}\in S(F)$。则称群体博弈问题 PG 是广义 Levitin-Polyak 适定的(后简称广义 LP 适定的)。

注 3 若群体博弈问题 PG 是广义 LP 适定的,则它的解集是非空紧集。

定义 7[26] 设 K 是一个 Banach 空间 X 的紧子集,$\mu:K\times K\to\mathbf{R}$。$\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\mu(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$,$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in K$,则称 μ 满足三角不等式。

引理 3[27] 设 $g:X\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数。若 g 在 X 上是伪连续的,则有:

$$g(\boldsymbol{x}_1)<g(\boldsymbol{x}_2)\Rightarrow(g(\boldsymbol{x}_1),g(\boldsymbol{x}_2))\cap g(X)\neq\varnothing。$$

引理 4[27] 设 $g:X\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数,则 g 在 X 上是伪连续的当且仅当 $g(\boldsymbol{x})<g(\boldsymbol{z})\Rightarrow$ 存在 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}$ 的邻域 N_x,N_z,使得:$g(\boldsymbol{x}')<g(\boldsymbol{z}')$,$\forall\boldsymbol{x}'\in N_x$,$\forall\boldsymbol{z}'\in N_z$。

定义 8[25] 设 $G:X\to 2^Y$ 是一个集值映射,$\boldsymbol{x}\in X$。

1) 若对 Y 中满足 $G(\boldsymbol{x})\subseteq U$ 的开集 U,存在 $\boldsymbol{x}$ 的开邻域 V,使得 $G(\boldsymbol{x}')\subseteq U$,$\forall\boldsymbol{x}'\in V$,则称集值映射 G 在 $\boldsymbol{x}$ 处是上半连续的。

2) 若对 Y 中满足 $G(\boldsymbol{x})\cap U\neq\varnothing$ 的任意开集 U,存在 $\boldsymbol{x}$ 的开邻域 V,使得 $G(\boldsymbol{x}')\cap U\neq\varnothing$,$\forall\boldsymbol{x}'\in V$,则称集值映射 G 在 $\boldsymbol{x}$ 处是下半连续的。

3) 如果集值映射 G 在 $\boldsymbol{x}$ 处既是上半连续的又是下半连续的,则称集值映射 G 在 $\boldsymbol{x}$ 处是连续的。如果集值映射 G 在每一点 $\boldsymbol{x}\in X$ 处都是连续的,则称集值映射 G 在 X 上是连续的。

引理 5[28] 若 G 是紧值的,则 G 在 $\boldsymbol{x}$ 处是上半连续的当且仅当对 X 中任一满足 $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}$ 的序列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$,且对 $G(\boldsymbol{x}_n)$ 中任一序列 $\{\boldsymbol{y}_n\}$,存在 $\{\boldsymbol{y}_{n_k}\}\subset\{\boldsymbol{y}_n\}$,使得 $\boldsymbol{y}_{n_k}\to\boldsymbol{y}\in G(\boldsymbol{x})$。

2 Nash 均衡的存在性结果

本节在 2 个不同条件下建立群体博弈问题 PG 的 Nash 均衡的存在性定理。首先在伪连续的条件下,借助一个极大化问题,得到群体博弈问题 PG 的 Nash 均衡的存在性定理;然后在拟凸的条件下,借助引理 2,得到群体博弈问题 PG 的 Nash 均衡的另一个存在性结果。

$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$,令函数 $\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\langle F(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle$,$\Phi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=-\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\langle F(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle$。

定理 1 设 X 是非空紧的,若:

1) 对 $\forall\boldsymbol{y}\in X$,$\Phi(\cdot,\boldsymbol{y})$ 在 X 上是伪连续的;

2) Φ 满足三角不等式。

则群体博弈问题 PG 的 Nash 均衡解集 $S(F)$ 是非空紧的。

证明 首先证明群体博弈问题 PG 的 Nash 均衡解集 $S(F)$ 是非空的,借助如下优化问题来证明。对 $\overline{\boldsymbol{y}}\in X$ 构造如下优化问题:$\max\limits_{\boldsymbol{x}\in X}\Phi(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}})$。因为 X 是紧集,$\Phi(\cdot,\boldsymbol{y})$ 是伪连续的,所以由引理 1 可知,存在极大化点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in X$,即 $\Phi(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})\geqslant\Phi(\boldsymbol{x}',\overline{\boldsymbol{y}})$,$\forall\boldsymbol{x}'\in X$。又因 Φ 满足三角不等式,所以有 $\Phi(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})\geqslant\Phi(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})-\Phi(\boldsymbol{y},\overline{\boldsymbol{y}})\geqslant 0$,$\forall\boldsymbol{y}\in X$。因此 $\overline{\boldsymbol{x}}\in S(F)$。

下证 $S(F)$ 是紧集。因为 X 是紧集且 $S(F)\subseteq X$,所以只需要证明 $S(F)$ 是闭集。用反证法,假设 $S(F)$ 不是闭集,则存在序列 $\{\boldsymbol{x}_n\}\subset S(F)$,且有:

$$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}_0,\tag{1}$$

但 $\boldsymbol{x}_0\notin S(F)$。因此,存在 $\boldsymbol{y}_0\in X$,使得 $\Phi(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)<0=\Phi(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{y}_0)$。又因为 $\Phi(\cdot,\boldsymbol{y})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是伪连续的,所以 $\Phi(\cdot,\boldsymbol{y})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是上伪连续的,结合 $\{\boldsymbol{x}_n\}\subset S(F)$ 和式(1)有 $0>\limsup\Phi(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_0)\geqslant 0$,从而构成矛盾。故 $\boldsymbol{x}_0\in S(F)$,$S(F)$ 是闭集。 证毕

定理 2 设 X 是非空紧凸集。若:

1) $\forall\boldsymbol{y}\in X$,$\Phi(\cdot,\boldsymbol{y})$ 在 X 是上 0-水平闭的;

2) $\forall\boldsymbol{x}\in X$,$\Phi(\boldsymbol{x},\cdot)$ 在 X 是拟凸的。

则群体博弈问题 PG 的 Nash 均衡解集 $S(F)$ 非空紧。

证明 设 $\boldsymbol{y}\in X$,考虑集合 $\Psi(\boldsymbol{y})=\{\boldsymbol{x}\in X\mid\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0\}$。显然,$\Psi(\boldsymbol{y})\neq\varnothing$,且 $S(F)=\bigcap_{\boldsymbol{y}\in X}\Psi(\boldsymbol{y})$。设 $\{\boldsymbol{x}_n\}\subseteq\Psi(\boldsymbol{y})$ 且 $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}'$。因为 $\Phi(\cdot,\boldsymbol{y})$ 在 X 是上 0-水平闭的,$\Phi(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y})\geqslant 0$,所以有 $\Phi(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})\geqslant 0$,从而 $\boldsymbol{x}'\in\Psi(\boldsymbol{y})$。由此可得 $\Psi(\boldsymbol{y})$ 是闭集。进而由 X 是紧集可得 $\Psi(\boldsymbol{y})$ 是紧集。因为 $S(F)=\bigcap_{\boldsymbol{y}\in X}\Psi(\boldsymbol{y})$,所以 $S(F)$ 是

紧集。下证 $\boldsymbol{y} \longmapsto \Psi(\boldsymbol{y})$ 是一个 KKM 映射。用反证法，假设 $\boldsymbol{y} \longmapsto \Psi(\boldsymbol{y})$ 不是一个 KKM 映射，则存在 X 的有限子集 $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m\}$，且有 $\boldsymbol{y}_0 \in \mathrm{conv}(\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m\})$；但 $\boldsymbol{y}_0 \notin \Psi(\boldsymbol{y}_i)$，$\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$，即有：

$$\Phi(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_i) < 0, \forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}。\tag{2}$$

因为 $\boldsymbol{y}_0 \in \mathrm{conv}(\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m\})$，所以存在 $\lambda_i \geqslant 0$，$\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$，$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$，使得：

$$\boldsymbol{y}_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{y}_i。\tag{3}$$

因为 $\Phi(\boldsymbol{y}_0, \cdot)$ 在 X 是拟凸的，所以有 $\Phi\left(\boldsymbol{y}_0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{y}_i\right) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \{\Phi(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_i)\}$。由式(2)、(3)可得 $0 = \Phi(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_0) = \Phi\left(\boldsymbol{y}_0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{y}_i\right) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \{\Phi(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_i)\} < 0$，从而构成矛盾，所以 $\boldsymbol{y} \longmapsto \Psi(\boldsymbol{y})$ 是一个 KKM 映射。进而由引理 2 可得 $S(F) = \bigcap_{\boldsymbol{y} \in X} \Psi(\boldsymbol{y}) \neq 0$。　　证毕

3　LP 适定性

本节讨论群体博弈问题 PG 的 LP 适定性。首先给出群体博弈问题 PG 广义 LP 适定性的度量刻画，并举例加以说明；然后建立群体博弈问题 PG 的 LP 适定性的充分性条件。下面给定群体博弈问题 PG 的近似解集。

$\forall \varepsilon > 0$，定义群体博弈问题 PG 的近似解集为：

$$M(\varepsilon) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}_+^n \mid \langle F(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \rangle - \varepsilon \leqslant 0, \forall \boldsymbol{y} \in X, d(\boldsymbol{x}, X) \leqslant \varepsilon\},$$

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$，函数 $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \langle F(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle$，函数 $\Omega(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \langle F(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \rangle$。

定理 3　群体博弈问题 PG 是广义 LP 适定的当且仅当它的解集 $S(F)$ 是非空紧的，且当 $\varepsilon \to 0$ 时，函数

$$e(M(\varepsilon), S(F)) \to 0,\tag{4}$$

其中：$e(M(\varepsilon), S(F)) = \sup_{\boldsymbol{a} \in M(\varepsilon)} d(\boldsymbol{a}, S(F))$，$d(\boldsymbol{a}, S(F)) = \inf_{\boldsymbol{b} \in S(F)} \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|$。

证明　先证必要性。设群体博弈问题 PG 是广义 LP 适定的，则 $S(F)$ 是非空紧的。下证式(4)成立。用反证法，假设当 $\varepsilon \to 0$ 时，$e(M(\varepsilon), S(F)) \not\to 0$。因此，存在 $\alpha > 0$，$\varepsilon_n > 0$，$\varepsilon_n \to 0$ 以及 $\boldsymbol{x}_n \in M(\varepsilon_n)$，使得：

$$d(\boldsymbol{x}_n, S(F)) \geqslant \alpha。\tag{5}$$

因为 $\boldsymbol{x}_n \in M(\varepsilon_n)$，所以 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是群体博弈问题 PG 的 LP 近似解序列。因此，存在 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的子序列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$，使得 $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x} \in S(F)$。这与式(5)相矛盾。

再证充分性。设 $S(F)$ 非空紧的且式(4)成立。设 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是群体博弈问题 PG 的 LP 序列，所以存在 $\{\varepsilon_n\} \subseteq \mathbf{R}_+$，$\varepsilon_n \to 0$，使得 $d(\boldsymbol{x}_n, X) \leqslant \varepsilon_n$ 且 $\langle F(\boldsymbol{x}_n), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_n \rangle - \varepsilon_n \leqslant 0$，$\forall \boldsymbol{y} \in X$，所以 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subseteq M(\varepsilon_n)$。由式(4)可知，存在 $\{\boldsymbol{z}_n\} \subseteq S(F)$，使得：

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{z}_n\| \to 0。\tag{6}$$

因为 $S(F)$ 是紧集，所以存在 $\{\boldsymbol{z}_n\}$ 的子序列 $\{\boldsymbol{z}_{n_k}\}$，使得 $\boldsymbol{z}_{n_k} \to \boldsymbol{x}_0 \in S(F)$。因此由式(6)知，存在 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的子序列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$，使得 $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}_0 \in S(F)$。故群体博弈问题 PG 是广义 LP 适定的。　　证毕

例 1　考虑双策略单群体博弈问题，即 $P = \{1\}$，$S^1 = \{1, 2\}$；它的状态集 $X = \{\boldsymbol{x} = (x_1^1, x_2^1) \in \mathbf{R}_+^2 \mid x_1^1 + x_2^1 = 1\}$，$\forall \boldsymbol{x} = (x_1^1, x_2^1) \in X$。设相应于策略 1 和策略 2 的支付函数(向量)分别为 $F(\boldsymbol{x}) = (F_1(\boldsymbol{x}), F_2(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} = (3x_1^1 + 5x_2^1, 4x_1^1 + 2x_2^1)^{\mathrm{T}}$。

显然，上述双策略单群体博弈问题的 Nash 均衡 $S(F) = \left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right\}$，$M(\varepsilon) = \left\{\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{3}{4} - \varepsilon\right)\right\}$，且当 $\varepsilon \to 0$ 时，$e(M(\varepsilon), S(F)) \to 0$。所以由定理 3 知，该单双策略群体博弈问题是广义 LP 适定的。

例 2　考虑双群体博弈问题，其中每个群体博弈都有 2 个纯策略，即 $P = \{1, 2\}$，$p \in P$，$S^p = \{1, 2\}$，它的群体状态集 $X^p = \left\{\boldsymbol{x}^p = (x_1^p, x_2^p) \in \mathbf{R}_+^2 \mid x_1^p + x_2^p = \frac{1}{2}\right\}$，故社会状态集为 $X = X^1 \times X^2$。设 c, k 为 2 个实常数，$\forall \boldsymbol{x} = (x^1, x^2) \in X$，有 $F^1(\boldsymbol{x}) = (F_1^1(\boldsymbol{x}), F_2^1(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} = (c, c)^{\mathrm{T}}$，$F^2(\boldsymbol{x}) = (F_1^2(\boldsymbol{x}), F_2^2(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} = (k, k)^{\mathrm{T}}$。

显然，每个 $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2) \in X$ 都是上述双群体博弈问题的 Nash 均衡，即 $S(F) = X$，而且 $M(\varepsilon) = X'$（$\forall \boldsymbol{x}' \in$

X', $d(\boldsymbol{x}', X) \leqslant \varepsilon$)。因为 X 是紧集,且当 $\varepsilon \to 0$ 时,$e(M(\varepsilon), S(F)) \to 0$。所以由定理 3 知,该双群体博弈问题是广义 LP 适定的。

定理 4 设 X 是非空紧集。若:

1) $\forall \boldsymbol{y} \in X$, $\Phi(\cdot, \boldsymbol{y})$在 X 上是伪连续的;

2) Φ 满足三角不等式。

则群体博弈问题 PG 是广义 LP 适定的。

证明 由定理 1 可知,$S(F) \neq \varnothing$。设$\{\overline{\boldsymbol{x}}_n\}$是 LP 序列,下证存在$\{\overline{\boldsymbol{x}}_n\}$的子序列$\{\overline{\boldsymbol{x}}_{n_k}\}$,使得$\overline{\boldsymbol{x}}_{n_k} \to \overline{\boldsymbol{x}} \in S(F)$。因为$\{\overline{\boldsymbol{x}}_n\}$是 LP 序列,所以存在$\{\varepsilon_n\} \subseteq \mathbf{R}_+$,且 $\varepsilon_n \to 0$,使得:

$$d(\overline{\boldsymbol{x}}_n, X) \leqslant \varepsilon_n, \tag{7}$$

且$\langle F(\overline{\boldsymbol{x}}_n), \boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{x}}_n \rangle - \varepsilon_n \leqslant 0$, $\forall \boldsymbol{y} \in X$。

因为 X 是紧集,所以 $\forall n \in \mathbf{N}$,存在 $\hat{\boldsymbol{x}}_n \in X$,使得 $d(\overline{\boldsymbol{x}}_n, \hat{\boldsymbol{x}}_n) = d(\boldsymbol{x}_n, X)$。不失一般性,设 $\hat{\boldsymbol{x}}_n \to \overline{\boldsymbol{x}}$。由式(7)可得 $d(\overline{\boldsymbol{x}}_n, \overline{\boldsymbol{x}}) \leqslant d(\overline{\boldsymbol{x}}_n, \hat{\boldsymbol{x}}_n) + d(\hat{\boldsymbol{x}}_n, \overline{\boldsymbol{x}}) \leqslant \varepsilon_n + d(\hat{\boldsymbol{x}}_n, \overline{\boldsymbol{x}})$。因为当 $n \to \infty$时,$\hat{\boldsymbol{x}}_n \to \overline{\boldsymbol{x}}$,所以对上式取极限可得$\overline{\boldsymbol{x}}_n \to \overline{\boldsymbol{x}}$。从而对$\{\overline{\boldsymbol{x}}_n\}$的任意子序列$\{\overline{\boldsymbol{x}}_{n_k}\}$,有$\overline{\boldsymbol{x}}_{n_k} \to \overline{\boldsymbol{x}}$。因此,只需证$\overline{\boldsymbol{x}} \in S(F)$。

用反证法,假设$\overline{\boldsymbol{x}}$ 不是群体博弈问题 PG 的解,则存在$\overline{\boldsymbol{y}} \in X$,使得 $\Phi(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}) = \langle F(\overline{\boldsymbol{x}}), \overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}} \rangle < 0$。又因为 $\Phi(\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{y}}) = 0$,所以 $\Phi(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}) < \Phi(\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{y}})$。因为 $\forall \boldsymbol{y} \in X$, $\Phi(\cdot, \boldsymbol{y})$在 X 上是伪连续的,所以由引理 3 可知,存在 $\overline{\boldsymbol{z}} \in X$,使得 $\Phi(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}) < \Phi(\overline{\boldsymbol{z}}, \overline{\boldsymbol{y}}) < \Phi(\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{y}})$。由引理 4 可知,存在$\overline{\boldsymbol{x}}$ 的邻域 O,使得 $\Phi(\boldsymbol{x}', \overline{\boldsymbol{y}}) < \Phi(\overline{\boldsymbol{z}}, \overline{\boldsymbol{y}}) < \Phi(\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{y}})$, $\forall \boldsymbol{x}' \in O$。这意味着:

$$\Omega(\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{x}') > \Omega(\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{z}}) > \Omega(\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{y}}), \forall \boldsymbol{x}' \in O。 \tag{8}$$

因为$\overline{\boldsymbol{x}}_n \to \overline{\boldsymbol{x}}$,所以存在正整数 K_1,使得当 $n > K_1$ 时,有$\overline{\boldsymbol{x}}_n \in O$。结合式(8)可得 $\Omega(\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}_n) - \Omega(\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{y}}) > 0$。又因为$\{\varepsilon_n\} \subseteq \mathbf{R}_+$,且 $\varepsilon_n \to 0$,所以存在正整数 $K > K_1$,使得当 $n > K$ 时,有 $\Omega(\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}_n) - \Omega(\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{y}}) > \varepsilon_n$,即有:

$$\langle F(\overline{\boldsymbol{x}}_n), \overline{\boldsymbol{y}} - \overline{\boldsymbol{x}}_n \rangle - \varepsilon_n > 0,$$

这与$\{\overline{\boldsymbol{x}}_n\}$是 LP 序列矛盾,由此定理 4 得证。 证毕

引理 6 设 X 是非空紧的。若:

1) $\forall \boldsymbol{y} \in X$, $\Phi(\cdot, \boldsymbol{y})$在 X 是强上 0-水平闭的;

2) $\forall \boldsymbol{x} \in X$, $\Phi(\boldsymbol{x}, \cdot)$在 X 是拟凸的。

则 M 在 0 处是上半连续且是紧值的。

证明 用反证法。假设 M 在 0 处不是上半连续,则存在满足 $M(0) \subseteq U$ 的开集 U, $\forall \varepsilon_n \to 0$,存在 $\boldsymbol{x}_n \in M(\varepsilon_n)$,但 $\boldsymbol{x}_n \notin U$。因为 $\boldsymbol{x}_n \in M(\varepsilon_n)$,所以有:

$$d(\boldsymbol{x}_n, X) \leqslant \varepsilon_n, \tag{9}$$

且有:

$$\langle F(\boldsymbol{x}_n), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_n \rangle - \varepsilon_n \leqslant 0, \forall \boldsymbol{y} \in X。 \tag{10}$$

由式(9)可知,存在 $\boldsymbol{x}_n' \in X$,使得 $d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n') \leqslant d(\boldsymbol{x}_n, X) + \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon_n + \dfrac{1}{n}$。因为 X 是紧集,所以不失一般性,设 $\boldsymbol{x}_n' \to \boldsymbol{x}' \in X$,则有 $d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}') \leqslant d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n') + d(\boldsymbol{x}_n', \boldsymbol{x}') \leqslant \varepsilon_n + \dfrac{1}{n} + d(\boldsymbol{x}_n', \boldsymbol{x}')$。对上式取极限可得:$\lim\limits_{n \to \infty} d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}') \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} \left(\varepsilon_n + \dfrac{1}{n} + d(\boldsymbol{x}_n', \boldsymbol{x}')\right) = 0$,所以 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}' \in X$。

下证 $\boldsymbol{x}' \in M(0)$。用反证法,假设 $\boldsymbol{x}' \notin M(0)$,则存在 $\boldsymbol{y}' \in X$,使得:

$$\Phi(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') = -\Omega(\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}') = \langle F(\boldsymbol{x}'), \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}' \rangle < 0。 \tag{11}$$

因为 $\forall \boldsymbol{y} \in X$, $\Phi(\cdot, \boldsymbol{y})$在 X 是强上 0-水平闭的,所以由式(10)可得$\langle F(\boldsymbol{x}'), \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y} \rangle \geqslant 0$, $\forall \boldsymbol{y} \in X$,即$\langle F(\boldsymbol{x}'), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}' \rangle \leqslant 0$, $\forall \boldsymbol{y} \in X$,这与式(11)矛盾。故 $\boldsymbol{x}' \in M(0) \subseteq U$,这与 $\boldsymbol{x}_n \notin U$ 矛盾。因此,M 在 0 处是上半连续。因为 $M(0) = S(F)$,所以由定理 2 可知,M 在 0 处是紧值的。 证毕

定理 5 设 X 是非空紧的,若:

1）$\forall \boldsymbol{y} \in X, \Phi(\cdot, \boldsymbol{y})$在 X 是强上 0-水平闭的；

2）$\forall \boldsymbol{x} \in X, \Phi(\boldsymbol{x}, \cdot)$在 X 是拟凸的。

则群体博弈问题 PG 是 LP 适定的。

证明　由定理 2 可知，$S(F)$是非空紧的。设$\{\boldsymbol{x}_n\}$是群体博弈问题 PG 的 LP 序列，则存在序列$\{\varepsilon_n\} \subseteq \mathbf{R}_+$，$\varepsilon_n \to 0$，使得 $d(\boldsymbol{x}_n, X) \leqslant \varepsilon_n$，且$\langle F(\boldsymbol{x}_n), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_n \rangle - \varepsilon_n \leqslant 0$，$\forall \boldsymbol{y} \in X$，进而可得，$\boldsymbol{x}_n \in M(\varepsilon_n)$。又由引理 5 和引理 6 可知，存在$\{\boldsymbol{x}_n\}$的子序列$\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$，使得 $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}_0 \in M(0) = S(F)$。故群体博弈问题 PG 是 LP 适定的。　　证毕

参考文献：

[1] SMITH J M. The theory of games and the evolution of animal conflicts[J]. Journal of Theoretical Biology，1974，47(1)：209-221.

[2] MYERSON R B. Game theory：analysis of conflict[M]. Cambridge：Harvard University Press，1997.

[3] FUDENBERG D，TIROLE J. Game theory[M]. Cambridge：MIT Press，1991.

[4] NASH J. Non-cooperative games[D]. Princeton：Princeton University，1950.

[5] WEIBULL J W. The mass-action interpretation of Nash equilibrium[R]. Stockholm：Research Institute of Industrial Economics，1994.

[6] BLUME L E. Population games[R]. Santa Fe：Santa Fe Institute，1995.

[7] LAHKAR R，SANDHOLM W H. The projection dynamic and the geometry of population games[J]. Games and Economic Behavior，2008，64(2)：565-590.

[8] SANDHOLM W H. Population games and evolutionary dynamics[J]. Cambridge：MIT Press，2011.

[9] YANG G H，YANG H，SONG Q Q. Stability of weighted Nash equilibrium for multiobjective population games[J]. Journal of Nonlinear Sciences and Applications，2016，9(6)：4167-4176.

[10] ZHAO W，YANG H，DENG X C，et al. Stability of equilibria for population games with uncertain parameters under bounded rationality[J]. Journal of Inequalities and Applications，2021，2021(1)：15.

[11] YANG G H，YANG H. Stability of weakly Pareto-Nash equilibria and Pareto-Nash equilibria for multiobjective population games[J]. Set-Valued and Variational Analysis，2017，25(2)：427-439.

[12] PENG Z Y，WANG J J，ZHAO Y，et al. Stability on parametric strong symmetric quasi-equilibrium problems via nonlinear scalarization[J]. Journal of Nonlinear and Variational Analysis，2022，6(4)：393-406.

[13] PENG Z Y，CHEN X J，ZHAO Y B，et al. Painlevé-Kuratowski convergence of minimal solutions for set-valued optimization problems via improvement sets[J]. Journal of Global Optimization，2023，87(2)：759-781.

[14] ZENG J，LI S J，ZHANG W Y，et al. Hadamard well-posedness for a set-valued optimization problem[J]. Optimization Letters，2013，7(3)：559-573.

[15] LONG X J，PENG Z Y，SUN X K. Levitin-Polyak well-posedness for generalized semi-infinite multiobjective programming problems[J]. Journal of Inequalities and Applications，2016，2016(1)：12.

[16] HUANG X X，YANG X Q. Generalized levitin：polyak well-posedness in constrained optimization[J]. SIAM Journal on Optimization，2006，17(1)：243-258.

[17] ZENG J，ZHANG W Y. Existence and levitin-polyak well-posedness for a class of generalized multiobjective multi-leader-follower games[J]. Pacific Journal of Optimization，2016，12(4)：717-726.

[18] KHANH P Q，LUU L M，MINH SON T T. On the stability and Levitin-Polyak well-posedness of parametric multiobjective generalized games[J]. Vietnam Journal of Mathematics，2016，44(4)：857-871.

[19] YANG Z，MENG D W. Hadamard well-posedness of the α-core[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2017，452(2)：957-969.

[20] JIA W S，QIU X L，PENG D T. The generic uniqueness and well-posedness of Nash equilibria for stable population games[J]. Journal of the Operations Research Society of China，2021，9(2)：455-464.

[21] HOFBAUER J，SANDHOLM W H. Stable games and their dynamics[J]. Journal of Economic Theory，2009，144(4)：1665-1693.

[22] MORGAN J，SCALZO V. Pseudocontinuity in optimization and nonzero-sum games[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2004，120(1)：181-197.

[23] MORGAN J, SCALZO V. New results on value functions and applications to MaxSup and MaxInf problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 300(1): 68-78.

[24] KONNOV I V, SCHAIBLE S. Duality for equilibrium problems under generalized monotonicity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 104(2): 395-408.

[25] XU Y D, ZHANG P P. Connectedness of solution sets of strong vector equilibrium problems with an application[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2018, 178(1): 131-152.

[26] BIANCHI M, KONNOV I V, PINI R. Lexicographic and sequential equilibrium problems[J]. Journal of Global Optimization, 2010, 46(4): 551-560.

[27] SCALZO V. Hadamard well-posedness in discontinuous non-cooperative games[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 360(2): 697-703.

[28] ANH L Q, HUNG N V. Levitin-Polyak well-posedness for strong bilevel vector equilibrium problems and applications to traffic network problems with equilibrium constraints[J]. Positivity, 2018, 22(5): 1223-1239.

Mathematical Programming and Optimality Theory

Existence and Levitin-Polyak Well-Posedness for Population Games

ZENG Jing, PENG Jiayu

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The existence of Nash equilibrium and sufficient conditions of Levitin-Polyak well-posedness for population games (LP well-posedness, for short) are investigated. Firstly, by taking advantage of an auxiliary optimization problem and Fan-KKM lemma respectively, existence results of Nash equilibrium for population games are obtained. Secondly, LP well-posedness for population games is introduced, and the metric characterization of LP well-posedness in the behavior of approximate solution set for population games is discussed. Finally, the sufficient conditions of LP well-posedness for population games are established. The existence and LP well posedness of Nash equilibrium for group game problems are established under the conditions of upper 0-level closure and quasi convexity. The existence of Nash equilibrium for group game problems is established under weaker conditions. LP well-posedness of Nash equilibrium for group game problems is proposed and sufficient conditions for it is established.

Keywords: population games; Nash equilibrium; Levitin-Polyak well-posedness; Fan-KKM theorem

(责任编辑 方 兴)