数学规划与最优性理论专题

DOI:10.11721/cqnuj20250201

基于因子分解法的可穿透全涂层腔体内部反散射问题*

刘立汉，刘　庆
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:通过测量腔体内部曲线或曲面的近场数据来确定腔体的形状。利用因子分解法研究可穿透全涂层腔体的内部反散射问题。首先基于辐射散射场的形式写出该反散射问题的数学模型,其次通过构造在全涂层条件下算子的主因子分解进而研究腔体近场数据算子的分解情况,最后假设构造的算子满足适当的条件下,找到数据算子的值域进而刻画腔体的形状。

关键词:反散射;因子分解法;可穿透全涂层腔体
中图分类号:O29　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2025)02-0107-10

在反散射理论中,定性方法对于研究不均匀介质和障碍物的散射问题是非常重要的,而对于这些方法的研究,具体参见文献[1-2]。然而在最近几十年,腔体内测量数据的反散射问题是研究的热点之一[3-6]。在此类问题中,目标是通过腔体内的曲线或曲面的内部测量来重构腔体的形状。文献[3]讨论了在部分涂层和表面阻抗的条件下,利用线性采样法确定腔体的形状。文献[7]讨论了由紧支集组成的且由不均匀介质包围的可穿透的腔体的散射问题,证明了腔体的支集的唯一性结果,并建立了线性采样法来确定腔体形状。文献[8]考虑了在 Dirichlet 条件下,利用因子分解法重构腔体的形状。文献[9]考虑了在 Dirichlet 条件和阻尼边界条件下,利用因子分解法确定不可穿透的腔体的形状。然而在已有文献中,大多数研究者考虑的是腔体在 Dirichlet 条件、阻尼边界条件或混合边界条件下利用其他方法研究反散射问题,对于腔体在全涂层条件下且利用因子分解法研究反散射问题考虑较少。本文考虑了在全涂层条件下,利用因子分解法研究可穿透的腔体的形状。而在全涂层条件下,由于传导率 η 的存在,导致线性有界算子的构造较为复杂,因此要先构造算子,再利用因子分解法重构可穿透腔体的形状。

1　反散射问题

设 $D\subset\mathbf{R}^d$,$d\in\{2,3\}$是一个单连通的有界区域,其中边界∂D 是 Lipshitz 边界,并且设 $\boldsymbol{\nu}$ 是∂D 的单位向外的法向量。同时,假设 D 内部的介质是均匀的,折射率为 1,并用 k 表示相应的波数。假设 D 外部的介质是不均匀和各向异性的,但在 $D_1\subset\mathbf{R}^d$ 的外部,介质是均匀的,且具有与 D 中的介质相同的波数,其中 $D\subset D_1$。更具体地说,在 $D_1\backslash\overline{D}$ 中介质的物理性质是由 $d\times d$ 对称的复值矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和有界函数 n 描述的,其中 $\boldsymbol{A}$ 的元素都属于 $L^\infty(D_1\backslash\overline{D})$,函数 $n\in L^\infty(D_1\backslash\overline{D})$满足对于所有 $\xi\in\mathbf{C}$ 和一些 $\alpha>0$,有 $\bar{\xi}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})\xi\geqslant\alpha\|\xi\|^2$,$\mathrm{Re}(n)\geqslant n_0\geqslant 0$,$\mathrm{Im}(n)\geqslant 0$。此外,假设在 $\mathbf{R}^d\backslash D_1$ 中 $\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{I}$ 和在 D 中的 $n\equiv 1$。

在声学散射($d=2$)或电磁散射($d=3$)中,D 表示填充物如空气的腔体,假设空气是波数为 k 的参考介质。设 $\Phi(x,y)$是位于腔体内点 $y\in D$ 处的入射点源,它的表达式为:

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k|x-y|),\forall x,y\in\mathbf{R}^2,\\[2ex]\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{|x-y|},\forall x,y\in\mathbf{R}^3。\end{cases}\tag{1}$$

* **收稿日期**:2024-09-30　**修回日期**:2025-03-15　**网络出版时间**:2025-04-29T14:11
资助项目:国家自然科学基金青年科学基金项目(No. 12001075);重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2020jcyj-msxmX0167);重庆市教育委员会科学技术研究计划项目重点项目(No. KJZD-K202300506,No. KJZD-K202100503);重庆市留学人员回国创业创新支持计划项目(No. cx2021061,No. cx2019022);重庆市巴渝学者计划(No. BYQNCS2020002);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014)
第一作者简介:刘立汉,男,教授,博士,研究方向为偏微分方程反问题,E-mail: 20132130@cqnu.edu.cn
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250429.1359.008

并考虑入射点源 $\overline{\Phi(\cdot,y)}$ 在不均匀介质中的散射,注意这是非物理入射波。在腔体 D 内部和腔体 D_1 外部的散射场 $u^s(\cdot,y)$ 都满足 $\Delta_x u^s(x,y)+k^2u^s(x,y)=0, x\in D, x\in\mathbf{R}^d\backslash\overline{D_1}$。不均匀介质在 $D_1\backslash\overline{D}$ 中的总场 $u(\cdot,y)=u(\cdot,y)^s+\overline{\Phi(\cdot,y)}$ 满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x)\nabla u(x,y)+k^2n(x)u(x,y)=0, x\in D_1\backslash\overline{D}$,并且在边界 ∂D 和 ∂D_1 上,总场和它的法向导数都是连续的,即 $\left(u^s(\cdot,y)+\mathrm{i}\eta\dfrac{\partial u^s(\cdot,y)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)+\overline{\Phi(\cdot,y)}=u$ 和 $\dfrac{\partial u^s(\cdot,y)}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\dfrac{\partial\overline{\Phi(x,y)}}{\partial\boldsymbol{\nu}}=\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{A}}}$,其中 $\dfrac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{A}}}:=\boldsymbol{A}\ \nabla\omega\cdot\boldsymbol{\nu}$。曲面传导率 $\eta=\eta(x)\in C(\partial D)$,对 $\forall x\in\partial D, \eta(x)\geqslant\eta_0>0$ 用来描述薄的高传导的涂层的物理性质[10],η_0 为正常数,并且 u^s 满足 Sommerfeld 辐射条件 $\lim\limits_{r\to\infty}r^{\frac{d-1}{2}}\left(\dfrac{\partial u^s}{\partial r}-\mathrm{i}ku^s\right)=0$,它关于 $\hat{x}=\dfrac{x}{r}, r=|x|$ 一致成立。记 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\subset D_1\backslash\overline{D}$ 并且 $(n-1)\subset D_1\backslash\overline{D}$,在 $\mathbf{R}^d$ 上,基于辐射散射场 $u^s(\cdot,y)$ 的形式写出散射问题的数学模型,则:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\ \nabla u^s(\cdot,y)+k^2nu^s(\cdot,y)=\nabla(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\nabla\overline{\Phi(\cdot,y)}+k^2(1-n)\overline{\Phi(\cdot,y)}。\tag{2}$$

假设 $\overline{C}\subset D$,将点源 $\overline{\Phi(\cdot,y)}$ 固定在 $\forall y\in\partial C$ 上并测量 $\forall x\in\partial C$ 的相应散射场 $u^s(x,y)$。(见图1)

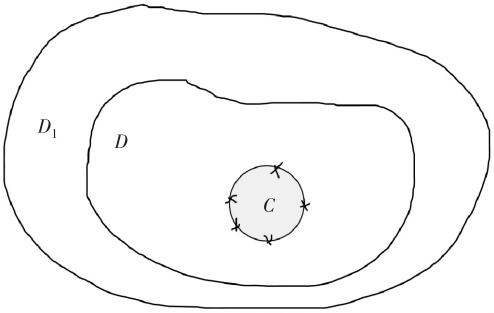

图1 该问题的几何结构示例

Fig. 1 An example of the geometry of the problem

假设1 在开集 C 中,k^2 不是 C 中 $-\Delta$ 的 Dirichlet 特征值。

2 数据算子的因子分解

引入数据集定义的数据算子 $N:L^2(\partial C)\to L^2(\partial C)$ 的形式:

$$(Ng)(x)=\int_{\partial C}u^s(x,y)g(y)\mathrm{d}s(y), g\in L^2(\partial C), g\in L^2(\partial C), x\in\partial C,\tag{3}$$

其中 $u^s(\cdot,y)$ 满足式(2)的辐射解。为了分解数据算子,将定义有界线性算子 $H:L^2(\partial C)\to H^1(D_1\backslash\overline{D})$ 的形式:

$$(Hg)(x):=\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\overline{\Phi(x,y)}g(y)\mathrm{d}s(y), x\in D_1\backslash\overline{D},\tag{4}$$

并且有界线性算子 $G:H^1(D_1\backslash\overline{D})\to L^2(\partial C)$ 将 ω_0 映射到边界 ∂C 上的辐射解 ω_1^* 的迹上,其中 $\omega_1^*=\omega^*+\mathrm{i}\eta\dfrac{\partial\omega^*}{\partial\boldsymbol{\nu}}\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ 是辐射解,且在 $\mathbf{R}^d$ 上满足:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\ \nabla\omega_1^*+k^2n\omega_1^*=\nabla(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\nabla\omega_0+k^2(1-n)\omega_0。\tag{5}$$

通过定义可以知道 $N=GH$。

假设 $D_1\subset B_{\mathbf{R}}$,并设 $T_k:H^{\frac{1}{2}}(\partial B_{\mathbf{R}})\to H^{-\frac{1}{2}}(\partial B_{\mathbf{R}})$ 是外部 Dirichlet 到 Neumann 映射,定义如下:

$$T_k:g\to\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\bigg|_{\partial B_{\mathbf{R}}}, g\in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_{\mathbf{R}}),\tag{6}$$

其中:u 是 Helmholtz 方程 $\Delta u+k^2u=0$ 在 $B_{\mathbf{R}}$ 外的辐射解,边界值 $u=g$ 在 $\partial B_{\mathbf{R}}$ 上,而 $\boldsymbol{\nu}$ 是边界 $\partial B_{\mathbf{R}}$ 的单位向外的法向量[1]。

引理1 伴随算子 $H^*:H^1(D_1\backslash\overline{D})\to L^2(\partial C)$ 由以下给出:

$$(H^{*}\upsilon_0)(x)=\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\int_{\partial C}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}\upsilon(y)\mathrm{d}s(y)-\frac{1}{2}\upsilon(x),x\in\partial C,\tag{7}$$

其中 $\upsilon\in H^1(B_R\backslash\overline{C})$ 由变分公式唯一确定，$\forall\psi\in H^1(B_R\backslash\overline{C})$ 变分公式如下：

$$-\int_{B_R\backslash\overline{C}}\nabla\upsilon\cdot\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x+k^2\int_{B_R\backslash\overline{C}}\upsilon\overline{\psi}\mathrm{d}x+\int_{\partial B_R}T_k\upsilon\overline{\psi}\mathrm{d}x=(\upsilon_0,\psi|_{D_1\backslash\overline{D}})_{H^1(D_1\backslash\overline{D})}。\tag{8}$$

证明　首先，基于 Lax-Milgram 引理和 Dirichlet 到 Neumann 算子 T_k 的性质[1]，式(8)具有唯一解 $\upsilon\in H^1(B_R\backslash\overline{C})$。设在 $B_R\backslash\overline{C}$ 上 $u=\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\Phi(x,y)\overline{g(y)}\mathrm{d}s(y)$，且 $u\in H^1(B_R\backslash\overline{C})$ 满足 $\Delta u+k^2u=0$ 在 $B_R\backslash\overline{C}$ 中、$\frac{\partial u^{+}}{\partial\boldsymbol{\nu}}=\frac{\partial\overline{(Hg)}^{+}}{\partial\boldsymbol{\nu}}$ 在 ∂C 上、$\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}=T_ku$ 在 ∂B_R 上和 $\overline{u}=Hg$ 在 $D_1\backslash\overline{D}$ 中。从式(8)和上述关于 u 的方程，利用格林公式得到：

$$(H^{*}\upsilon_0,g)_{L^2(\partial C)}=(\upsilon_0,Hg)_{H^1(D_1\backslash\overline{D})}=(\upsilon_0,\overline{u})_{H^1(D_1\backslash\overline{D})}=-\int_{B_R\backslash\overline{C}}\nabla\upsilon\cdot\nabla u\mathrm{d}x+k^2\int_{B_R\backslash\overline{C}}\upsilon u\mathrm{d}x+\int_{\partial B_R}T_k\upsilon u\mathrm{d}s=$$

$$\int_{\partial C}\frac{\partial u^{+}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\upsilon\mathrm{d}s=\int_{\partial C}\left[\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\int_{\partial C}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\boldsymbol{\nu}_x}\overline{g(y)}\mathrm{d}s(y)-\frac{1}{2}\overline{g(x)}\right]\upsilon(x)\mathrm{d}s(x)=$$

$$\left(\left((1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\int_{\partial C}\frac{\partial\Phi(x,\cdot)}{\partial\boldsymbol{\nu}_x}\upsilon(x)\mathrm{d}s(x)-\frac{1}{2}\upsilon,g\right)_{L^2(\partial C)},$$

因此 $(H^{*}\upsilon_0)(x)=\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\int_{\partial C}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}\upsilon(y)\mathrm{d}s(y)-\frac{1}{2}\upsilon(x),x\in\partial C$。　证毕

接下来，需在 $H^1(D_1\backslash\overline{D})$ 中再定义算子。对于 $\omega_0\in H^1(D_1\backslash\overline{D})$，考虑第二类积分方程：

$$\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}\varphi(y)\mathrm{d}s(y)-\frac{1}{2}\varphi(x)=\omega_1^{*}(x),x\in\partial C,\tag{9}$$

其中 ω_1^{*} 对应于给定的 ω_0 满足式(5)且是式(5)的辐射解。由于 k^2 不是 C 中 $-\Delta$ 的 Dirichlet 特征值，并且 C 是光滑的，因此上述第二类积分方程具有唯一解 $\varphi\in H^{\frac{1}{2}}(\partial C)$[11]。然后定义 $\upsilon\in H^1(B_R\backslash\overline{C})$（注意这里由跳跃关系知 $\varphi:=\upsilon|_{\partial C}$。）如下：

$$\upsilon(x)=\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}\varphi(y)\mathrm{d}s(y)-\omega_1^{*},x\in B_R\backslash\overline{C}。\tag{10}$$

在定义 $\upsilon\in H^1(B_R\backslash\overline{C})$ 后，通过 Riesz 表示定理定义唯一的 $\upsilon_0\in H^1(D_1\backslash\overline{D})$，如下：

$$(\upsilon_0,\psi)_{H^1(D_1\backslash\overline{D})}=-\int_{D_1\backslash\overline{D}}\nabla\upsilon\cdot\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x+k^2\int_{D_1\backslash\overline{D}}\upsilon\overline{\psi}\mathrm{d}x+\int_{\partial D_1}\frac{\partial\upsilon^{+}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{\psi}\mathrm{d}s-\int_{\partial D}\frac{\partial\upsilon^{-}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{\psi}\mathrm{d}s,\tag{11}$$

公式里的上标‘+’和‘−’分别表示从封闭区域的外部和内部接近边界。

定义 1　有界线性算子 $S:H^1(D_1\backslash\overline{D})\to H^1(D_1\backslash\overline{D})$ 定义为 $S:\omega_0\longmapsto\upsilon_0$，其中 υ_0 由式(11)给出，对应于式(10)定义的 υ，其中 ω_1^{*} 对应于给定的 ω_0 满足式(5)。

记在 $B_R\backslash\partial C$ 中 $\mathcal{D}(\varphi)(\cdot)=\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}\varphi(y)\mathrm{d}s(y)$，并且对于给定的 ω_0，让 $\omega_1^{*},\upsilon,\upsilon_0$ 满足定义 1，则：

$$(S\omega_0,u_0)_{H^1(D_1\backslash\overline{D})}=-\int_{D_1\backslash\overline{D}}\nabla\upsilon\cdot\nabla\overline{u_0}\mathrm{d}x+k^2\int_{D_1\backslash\overline{D}}\upsilon\overline{u_0}\mathrm{d}x+\int_{\partial D_1}\frac{\partial\upsilon^{+}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{u_0}\mathrm{d}s-\int_{\partial D}\frac{\partial\upsilon^{-}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{u_0}\mathrm{d}s=$$

$$-\int_{\partial D_1}\frac{\partial(\omega_1^{*})^{+}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{u_0}\mathrm{d}s+\int_{\partial D}\frac{\partial(\omega_1^{*})^{-}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{u_0}\mathrm{d}s+\int_{D_1\backslash\overline{D}}\nabla\omega_1^{*}\cdot\nabla\overline{u_0}\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\backslash\overline{D}}\omega_1^{*}\overline{u_0}\mathrm{d}x。\tag{12}$$

定理 1　数据算子 $N:L^2(\partial C)\to L^2(\partial C)$ 可以分解为 $N=H^{*}SH$，其中 $H:L^2(\partial C)\to H^1(D_1\backslash\overline{D})$ 由式(4)定义，$S:H^1(D_1\backslash\overline{D})\to H^1(D_1\backslash\overline{D})$ 由定义 1 给出，$H^{*}:H^1(D_1\backslash\overline{D})\to L^2(\partial C)$ 由引理 1 给出。

证明　设 $g\in L^2(\partial C)$，$Hg=\omega_0$。由式(10)看出 υ 在 $B_R\backslash\overline{D_1}$ 和 $D\backslash\overline{C}$ 中满足 Helmholtz 方程且满足辐射条件，因此对于 $\forall\psi\in H^1(B_R\backslash\overline{C})$ 满足式(11)，则：

$$(\upsilon_0,\psi|_{D_1\backslash\overline{D}})_{H^1(D_1\backslash\overline{D})}=-\int_{D_1\backslash\overline{D}}\nabla\upsilon\cdot\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x+k^2\int_{D_1\backslash\overline{D}}\upsilon\overline{\psi}\mathrm{d}x+\int_{\partial D_1}\frac{\partial\upsilon^{+}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{\psi}\mathrm{d}s-\int_{\partial D}\frac{\partial\upsilon^{-}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{\psi}\mathrm{d}s=$$

$$-\int_{B_R\setminus\overline{C}}\nabla v\cdot\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x+k^2\int_{B_R\setminus\overline{C}}v\overline{\psi}\mathrm{d}x+\int_{\partial B_R}T_k v\overline{\psi}\mathrm{d}s-\int_{\partial C}\frac{\partial v^+}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{\psi}\mathrm{d}s。$$

再由式(9)和跳跃关系 $\varphi:=v|_{\partial C}$ 可知：$\left[\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\Phi(x,y)v(y)\mathrm{d}s(y)\right]^-=\omega_1^*,x\in\partial C$。

因为 ω_1^* 和 $\mathcal{D}(v)(\cdot)$ 在 C 中满足 Helmholtz 方程，所以在 ∂C 上具有相同的 Dirichiet 边界值，即 $\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\Phi(x,y)v(y)\mathrm{d}s(y)=\omega_1^*,x\in C$。又因为 k^2 不是曲线 C 中 $-\Delta$ 的 Dirichiet 特征值，则可得到 $\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}_x}\left[\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\Phi(x,y)v(y)\mathrm{d}s(y)\right]^-=\frac{\partial\omega_1^*(x)}{\partial\boldsymbol{\nu}_x},x\in\partial C$。由于式(10)、$\mathcal{D}(v)(\cdot)$的法向导数连续和 $\eta(x)\geqslant\eta_0>0$ 且 η_0 为正常数，所以在边界∂C 上，有$\frac{\partial v^+}{\partial\boldsymbol{\nu}}=0$，因此：

$$(v_0,\psi|_{D_1\setminus\overline{D}})_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}=-\int_{B_R\setminus\overline{C}}\nabla v\cdot\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x+k^2\int_{B_R\setminus\overline{C}}v\overline{\psi}\mathrm{d}x+\int_{\partial B_R}T_k v\overline{\psi}\mathrm{d}s。\tag{13}$$

从前面的 H^* 的定义可知：在边界∂C 上，有 $H^*v_0(\cdot)=\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\int_{\partial C}\frac{\partial\Phi(\cdot,y)}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}v(y)\mathrm{d}s(y)-\frac{1}{2}v(\cdot)$，最后从式(10)和跳跃关系知：$\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\int_{\partial C}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}v(y)\mathrm{d}s(y)-\frac{1}{2}v(x)=\omega_1^*,x\in\partial C$，即 $H^*v_0=\omega_1^*|_C$。因此 $H^*SHg=H^*S\omega_0=H^*v_0=\omega_1^*|_C=Ng$，故 $N=H^*SH$。 证毕

3 因子分解方法

因子分解方法的理论参见文献[12]，下面将它用于近场测量算子 $N=H^*SH$，但又要确保算子 H、S 和 H^* 满足文献[12]定理的假设，则对波数 k 作如下假设：

假设 2 波数 $k>0$，使得不存在的非零 $\omega_0\in H^1(D_1\setminus\overline{D})$满足：

$$\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\nabla\omega_0\cdot\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-n)\omega_0\overline{\psi}\mathrm{d}x=0,\forall\psi\in H^1(D_1\setminus\overline{D})。$$

定理 2 算子 H，S 和 H^* 满足下面的性质：

1) 算子 H 是紧算子且是单射的。

2) 算子 S 的虚部 $\mathrm{Im}(S)$是非负的。

3) 如果波数 $k>0$ 且满足假设 2，则算子 S 在 $H^1(D_1\setminus\overline{D})$中是单射的。

证明 1) 由于 $H^2(D_1\setminus\overline{D})$到 $H^1(D_1\setminus\overline{D})$的嵌入是紧的，并且从单层势算子和双层势算子到边界$\partial C$ 的正则性可知，算子 H 是紧的。此外，如果令 $Hg=0$，则 Hg 是可求解 Helmholtz 方程，则$Hg|_{\partial C}=0$。又因为 k^2 不是 $-\Delta$ 的 Dirichlet 特征值，并且利用单层势算子和双层势算子的连续性，则可在区域 C 中得到了 $Hg=0$。最后利用跳跃关系可得到 $g=0$，故算子 H 是单射的。

2) 对式(5)两边乘以 $\overline{u_0}$ 并且利用格林公式分部积分得：

$$\int_{\partial D_1}\frac{\partial(\omega_1^*)^-}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{A}}}\overline{u_0}\mathrm{d}s-\int_{\partial D}\frac{\partial(\omega_1^*)^+}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{A}}}\overline{u_0}\mathrm{d}s-\int_{D_1\setminus\overline{D}}\boldsymbol{A}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u_0}\mathrm{d}x+k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}n\omega_1^*\overline{u_0}\mathrm{d}x=$$

$$\int_{\partial D_1}\frac{\partial\omega_0^-}{\partial\boldsymbol{\nu}_{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}}\overline{u_0}\mathrm{d}s-\int_{\partial D}\frac{\partial\omega_0^+}{\partial\boldsymbol{\nu}_{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}}\overline{u_0}\mathrm{d}s-\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\nabla\omega_0\cdot\nabla\overline{u_0}\mathrm{d}x+k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-n)\omega_0\overline{u_0}\mathrm{d}x。$$

因为在边界∂D 和边界∂D_1 分别满足如下条件：

$$\frac{\partial(\omega_0)^+}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}}}=\frac{\partial(\omega_1^*)^-}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\frac{\partial(\omega_1^*)^+}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{A}}},\tag{14}$$

$$\frac{\partial(\omega_0)^-}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}}}=-\frac{\partial(\omega_1^*)^+}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\frac{\partial(\omega_1^*)^-}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{A}}},\tag{15}$$

代边界条件式(14)，(15)到上式，则：

$$-\int_{\partial D_1}\frac{\partial(\omega_1^*)^+}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{A}}}\overline{u_0}\mathrm{d}s+\int_{\partial D}\frac{\partial(\omega_1^*)^-}{\partial\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{A}}}\overline{u_0}\mathrm{d}s=-\int_{D_1\setminus\overline{D}}\boldsymbol{A}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u_0}\mathrm{d}x+k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}n\omega_1^*\overline{u_0}\mathrm{d}x+$$

$$\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\ \nabla\omega_0\cdot\nabla\overline{u_0}\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-n)\omega_0\overline{u_0}\mathrm{d}x\ 。$$

设 u^* 是式(5)的解，且对应于式子右边的 u_0，将上面的表达式代入式(12)，则：

$$(S\omega_0,u_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}=-\int_{D_1\setminus\overline{D}}\boldsymbol{A}\ \nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u_0}\mathrm{d}x+k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}n\omega_1^*\overline{u_0}\mathrm{d}x+\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\ \nabla\omega_0\cdot\nabla\overline{u_0}\mathrm{d}x-$$
$$k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-n)\omega_0\overline{u_0}\mathrm{d}x+\int_{D_1\setminus\overline{D}}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u_0}\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}\omega_1^*\overline{u_0}\mathrm{d}x\ ,\tag{16}$$

再把式(16)变形得：

$$(S\omega_0,u_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}=-\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\ \nabla(\omega_1^*+\omega_0)\cdot\nabla\overline{(u^*+u_0)}\mathrm{d}x+\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\ \nabla(\omega_1^*+\omega_0)\cdot\nabla\overline{u^*}\mathrm{d}x+$$
$$k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(n-1)(\omega_1^*+\omega_0)\overline{(u^*+u_0)}\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(n-1)(\omega_1^*+\omega_0)\overline{u^*}\mathrm{d}x\ 。\tag{17}$$

接下来，由于在 $D_1\setminus\overline{D}$ 中，有 $-\nabla\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\nabla(\omega_1^*+\omega_0)-k^2(n-1)(\omega_1^*+\omega_0)=\Delta\omega_1^*+k^2\omega_1^*$。对上式两端乘以 $\overline{u^*}$ 并利用格林公式分部积分，那么：

$$\int_{\partial D}\frac{\partial(\omega_1^*)^-}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{u^*}\mathrm{d}s-\int_{\partial D_1}\frac{\partial(\omega_1^*)^+}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{u^*}\mathrm{d}s-\int_{D_1\setminus\overline{D}}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\mathrm{d}x+k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}\omega_1^*\overline{u^*}\mathrm{d}x=$$
$$-\int_{\partial D_1}\frac{\partial(\omega_1^*+\omega_0)^-}{\partial\boldsymbol{\nu}_{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})}}\overline{u^*}\mathrm{d}s+\int_{\partial D}\frac{\partial(\omega_1^*+\omega_0)^+}{\partial\boldsymbol{\nu}_{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})}}\overline{u^*}\mathrm{d}s+\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\ \nabla(\omega_1^*+\omega_0)\cdot\nabla\overline{u^*}\mathrm{d}x-$$
$$k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(n-1)(\omega_1^*+\omega_0)\cdot\overline{u^*}\mathrm{d}x\ ,\tag{18}$$

再利用边界条件式(14)和式(15)代入到式(18)得：

$$(S\omega_0,u_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}=-\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\ \nabla(\omega_1^*+\omega_0)\cdot\nabla\overline{(u^*+u_0)}\mathrm{d}x+$$
$$k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(n-1)(\omega_1^*+\omega_0)\overline{(u^*+u_0)}\mathrm{d}x-\int_{D_1\setminus\overline{D}}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\mathrm{d}x+$$
$$k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}\omega_1^*\overline{u^*}\mathrm{d}x+\int_{\partial D_1}\frac{\partial(\omega_1^*)^+}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{u^*}\mathrm{d}s-\int_{\partial D}\frac{\partial(\omega_1^*)^-}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{u^*}\mathrm{d}s\ 。$$

因为 ω_1^* 在 D 内和 D_1 之外满足 Helmholtz 方程，则：

$$(S\omega_0,u_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}=-\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\ \nabla(\omega_1^*+\omega_0)\cdot\nabla\overline{(u^*+u_0)}\mathrm{d}x+$$
$$k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(n-1)(\omega_1^*+\omega_0)\overline{(u^*+u_0)}\mathrm{d}x-\int_{B_{\mathbf{R}}\setminus\overline{D_1}}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\mathrm{d}x-\int_{D_1\setminus\overline{D}}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\mathrm{d}x+$$
$$k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}\omega_1^*\overline{u^*}\mathrm{d}x+\int_{\partial B_{\mathbf{R}}}T_k\omega_1^*\overline{u^*}\mathrm{d}s+k^2\int_{B_{\mathbf{R}}\setminus\overline{D_1}}\omega_1^*\overline{u^*}\mathrm{d}x-$$
$$\int_D\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\mathrm{d}x+k^2\int_D\omega_1^*\overline{u^*}\mathrm{d}x=-\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\ \nabla(\omega_1^*+\omega_0)\cdot\nabla\overline{(u^*+u_0)}\mathrm{d}x+$$
$$k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(n-1)(\omega_1^*+\omega_0)\overline{(u^*+u_0)}\mathrm{d}x-\int_{B_{\mathbf{R}}}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\mathrm{d}x+k^2\int_{B_{\mathbf{R}}}\omega_1^*\overline{u^*}\mathrm{d}x+\int_{\partial B_{\mathbf{R}}}T_k\omega_1^*\overline{u^*}\mathrm{d}s\ 。\tag{19}$$

又因为 $\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})\leqslant 0$，$\mathrm{Im}(n)\geqslant 0$ 且其中辐射解 ω_1^* 的远场模式 ω_∞^* 由渐近展开定义，即 $\omega_1^*(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{ikr}}{r^{\frac{d-1}{2}}}\omega_\infty^*(\hat{x})+O(r^{-\frac{d+1}{2}})$，$r=|x|$，$\hat{x}=\dfrac{x}{|x|}$，取 S 的虚部 $\mathrm{Im}(S)$，则：

$$(\mathrm{Im}(S)\omega_0,\omega_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}=\mathrm{Im}(-\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\ \nabla(\omega_1^*+\omega_0)\cdot\nabla\overline{(\omega_1^*+\omega_0)}\mathrm{d}x+$$
$$k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(n-1)(\omega_1^*+\omega_0)\overline{(\omega_1^*+\omega_0)}\mathrm{d}x+\int_{\partial B_{\mathbf{R}}}T_k\omega_1^*\overline{\omega_1^*}\mathrm{d}s)\geqslant$$
$$-\int_{D_1\setminus\overline{D}}\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})\ \nabla(\omega_1^*+\omega_0)\cdot\nabla\overline{(\omega_1^*+\omega_0)}\mathrm{d}x+k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}\mathrm{Im}(n)\,|\omega_1^*+\omega_0|^2\mathrm{d}x+k\int_{S^2}|\omega_\infty^*|^2\mathrm{d}s\geqslant 0。$$

3) 假设 $S\omega_0=0$，则对于式(12)中的任意 $\psi\in H^1(D_1\setminus\overline{D})$，有：

$$-\int_{\partial D_1}\frac{\partial(\omega_1^*)^+}{\partial \boldsymbol{\nu}}\overline{\psi}\mathrm{d}s+\int_{\partial D}\frac{\partial(\omega_1^*)^-}{\partial \boldsymbol{\nu}}\overline{\psi}\mathrm{d}s+\int_{D_1\setminus\overline{D}}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}\omega_1^*\overline{\psi}\mathrm{d}x=0。$$

那么 ω_1^* 也满足 Helmholtz 方程和传输条件即 $\Delta\omega_1^*+k^2\omega_1^*=0$ 在 $D_1\setminus\overline{D}$ 中、$\frac{\partial(\omega_1^*)^+}{\partial \boldsymbol{\nu}}=\frac{\partial(\omega_1^*)^-}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ 在 ∂D_1 上和 $\frac{\partial(\omega_1^*)^+}{\partial \boldsymbol{\nu}}=\frac{\partial(\omega_1^*)^-}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ 在 ∂D 上。又从式(5)知,$\omega_1^*\in H^d_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ 是在 $\mathbf{R}^d$ 中 Helmholtz 方程的辐射解,因此 $\omega_1^*=0$。对式(5)的两边乘以 $\overline{\psi}$ 并利用格林公式进行分部积分,则 ω_0 满足:

$$\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\nabla\omega_0\cdot\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-n)\omega_0\overline{\psi}\mathrm{d}x=0,\forall\psi\in H^1(D_1\setminus\overline{D})。$$

又假设波数 $k>0$,则满足假设 2,即 $\omega_0=0$,故在假设 2 下,算子 S 是单射的。 证毕

定理 3 算子 S 还满足以下性质:

1) 如果 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})>\boldsymbol{I}$,那么 $-\mathrm{Re}(S)$ 是紧算子和自伴随正定算子的和。

2) 如果对于一些 $\alpha>0$,$\boldsymbol{I}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\alpha|\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})|>0$ 且 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\frac{1}{\alpha}|\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})|\geqslant 0$,那么 $\mathrm{Re}(S)$ 是紧算子和自伴随正定算子的和。

证明 1) 从式(19)取算子 S 的实部,则:

$$(\mathrm{Re}(S)\omega_0,u_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}=-\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\boldsymbol{I})\nabla(\omega_1^*+\omega_0)\cdot\nabla\overline{(u^*+u_0)}\mathrm{d}x+$$

$$k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\mathrm{Re}(n)-1)(\omega_1^*+\omega_0)\overline{(u^*+u_0)}\mathrm{d}x-\int_{B_{\mathbf{R}}}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\mathrm{d}x+k^2\int_{B_{\mathbf{R}}}\omega_1^*\overline{u^*}\mathrm{d}x+\int_{\partial B_{\mathbf{R}}}\mathrm{Re}(T_k)\omega_1^*\overline{u^*}\mathrm{d}s。$$

当 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})>\boldsymbol{I}$ 时,定义一个算子 $K:H^1(D_1\setminus\overline{D})\to H^1(D_1\setminus\overline{D})$

$$(K\omega_0,u_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}=-\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\boldsymbol{I})\nabla(\omega_1^*+\omega_0)\cdot\nabla\overline{(u^*+u_0)}\mathrm{d}x-$$

$$\int_{B_{\mathbf{R}}}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\mathrm{d}x+\int_{\partial B_{\mathbf{R}}}\mathrm{Re}(T_k)\omega_1^*\overline{u^*}\mathrm{d}s-\int_{D_1\setminus\overline{D}}\omega_0\overline{u_0}\mathrm{d}x。\tag{20}$$

由算子 K 的定义知,它是自伴随算子。又因为 Dirichlet 到 Neumann 算子 $\mathrm{Re}(T_k)$ 的实部是非正的[13-14],并利用 Young 不等式:

$$(-K\omega_0,\omega_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}\geqslant(1-\alpha)((\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\boldsymbol{I})\nabla\omega_0,\nabla\omega_0)_{L^2(D_1\setminus\overline{D})}+(\omega_0,\omega_0)_{L^2(D_1\setminus\overline{D})}+$$

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)((\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\boldsymbol{I})\nabla\omega_1^*,\nabla\omega_1^*)_{L^2(D_1\setminus\overline{D})}+(\nabla\omega_1^*,\nabla\omega_1^*)_{L^2(B_{\mathbf{R}})}\geqslant c\|\omega_0\|^2_{H^1(D_1\setminus\overline{D})},$$

其中 $0<\alpha<1$ 使得 $\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\sup_{D_1\setminus\overline{D}}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\boldsymbol{I})+1>0$,$c$ 是依赖 $\boldsymbol{A}$ 的一些正常数。因为 $H^1(D_1\setminus\overline{D})$ 紧嵌入 $L^2(D_1\setminus\overline{D})$,则 $\mathrm{Re}(S)-K$ 是紧的。故 $-\mathrm{Re}(S)$ 是紧算子和自伴随正定算子的和。

2) 当 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})<\boldsymbol{I}$ 时,由式(16)可推导:

$$(S\omega_0,u_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}=\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u_0}\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-n)\omega_1^*\overline{u_0}\mathrm{d}x+$$

$$\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\nabla\omega_0\cdot\nabla\overline{u_0}\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-n)\omega_0\overline{u_0}\mathrm{d}x。\tag{21}$$

设 u^* 是式(5)的解,且对应于式(5)右边的 $u_0\in H^1(D_1\setminus\overline{D})$ 并在 $\mathbf{R}^d$ 上满足:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\nabla u^*+k^2nu^*=\nabla(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\nabla u_0+k^2(1-n)u_0,$$

对上式两边同乘 $\overline{\omega_1^*}$ 并利用格林公式进行分部积分得:

$$\int_{\partial D_1}\frac{\partial(u^*)^-}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{A}}}\overline{\omega_1^*}\mathrm{d}s-\int_{\partial D}\frac{\partial(u^*)^+}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{A}}}\overline{\omega_1^*}\mathrm{d}s-\int_{D_1\setminus\overline{D}}\boldsymbol{A}\nabla u^*\cdot\nabla\overline{\omega_1^*}\mathrm{d}x+k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}nu^*\overline{\omega_1^*}\mathrm{d}x=$$

$$\int_{\partial D_1}\frac{\partial u_0^-}{\partial \boldsymbol{\nu}_{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}}\overline{\omega_1^*}\mathrm{d}s-\int_{\partial D}\frac{\partial u_0^+}{\partial \boldsymbol{\nu}_{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}}\overline{\omega_1^*}\mathrm{d}s-\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\nabla u_0\cdot\nabla\overline{\omega_1^*}\mathrm{d}x+k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-n)u_0\overline{\omega_1^*}\mathrm{d}x。$$

因此,根据 u^* 和 u_0 的传输条件式(14),(15),则:

$$\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\nabla u_0\cdot\nabla\overline{\omega_1^*}\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-n)u_0\overline{\omega_1^*}\mathrm{d}x=$$

$$-\int_{\partial D_1}\frac{\partial (u^*)^+}{\partial \boldsymbol{\nu}}\overline{\omega_1^*}\,\mathrm{d}s+\int_{\partial D}\frac{\partial (u^*)^-}{\partial \boldsymbol{\nu}}\overline{\omega_1^*}\,\mathrm{d}s+\int_{D_1\setminus\overline{D}}\boldsymbol{A}\,\nabla u^*\cdot\nabla\overline{\omega_1^*}\,\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}n u^*\overline{\omega_1^*}\,\mathrm{d}x=$$
$$-\int_{\partial B_{\mathbf{R}}}T_k u^*\overline{\omega_1^*}\,\mathrm{d}s+\int_{B_{\mathbf{R}}}\nabla u^*\cdot\nabla\overline{\omega_1^*}\,\mathrm{d}x-k^2\int_{B_{\mathbf{R}}}u^*\overline{\omega_1^*}\,\mathrm{d}x+$$
$$\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\,\nabla u^*\cdot\nabla\overline{\omega_1^*}\,\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(n-1)u^*\overline{\omega_1^*}\,\mathrm{d}x,$$

其中 $T_k:H^{\frac{1}{2}}(\partial B_{\mathbf{R}})\to H^{-\frac{1}{2}}(\partial B_{\mathbf{R}})$ 是外部 Dirichlet 到 Neumann 算子。接下来对上式求共轭，则

$$\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{A}})\,\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u_0}\,\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-n)\omega_1^*\overline{u_0}\,\mathrm{d}x=-\int_{\partial B_{\mathbf{R}}}\overline{T_k u^*}\,\omega_1^*\,\mathrm{d}s+\int_{\partial B_{\mathbf{R}}}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\,\mathrm{d}s-$$
$$k^2\int_{B_{\mathbf{R}}}\omega_1^*\overline{u^*}\,\mathrm{d}x+\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\overline{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{I})\,\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\,\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\overline{n}-1)\omega_1^*\overline{u^*}\,\mathrm{d}x,\tag{22}$$

并且将式(22)代入式(21)中，得到：

$$(S\omega_0,u_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}=\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\nabla\omega_0\cdot\nabla\overline{u_0}\,\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-n)\omega_0\overline{u_0}\,\mathrm{d}x+\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{A}})\,\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u_0}\,\mathrm{d}x-$$
$$k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-\overline{n})\omega_1^*\overline{u_0}\,\mathrm{d}x+\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\overline{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{A})\,\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u_0}\,\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\overline{n}-n)\omega_1^*\overline{u_0}\,\mathrm{d}x=$$
$$\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\nabla\omega_0\cdot\nabla\overline{u_0}\,\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-n)\omega_0\overline{u_0}\,\mathrm{d}x-\int_{\partial B_{\mathbf{R}}}\overline{T_k u^*}\,\omega_1^*\,\mathrm{d}s+\int_{B_{\mathbf{R}}}\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\,\mathrm{d}x-$$
$$k^2\int_{B_{\mathbf{R}}}\omega_1^*\overline{u^*}\,\mathrm{d}x+\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\overline{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{I})\,\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\,\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\overline{n}-1)\omega_1^*\overline{u^*}\,\mathrm{d}x+$$
$$\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\overline{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{A})\,\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u_0}\,\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\overline{n}-n)\omega_1^*\overline{u_0}\,\mathrm{d}x。$$

因此，通过计算$(S+S^*)/2$ 得到算子 S 的实部，即：

$$(\mathrm{Re}(S)\omega_0,u_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}=\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{A}))\,\nabla\omega_0\cdot\nabla\overline{u_0}\,\mathrm{d}x-k^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(1-\mathrm{Re}(n))\omega_0\overline{u_0}\,\mathrm{d}x+$$
$$\mathrm{i}\int_{D_1\setminus\overline{D}}(-\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})\,\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u_0}+\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})\,\nabla\overline{u^*}\cdot\nabla\omega_0)\,\mathrm{d}x-ik^2\int_{D_1\setminus\overline{D}}(-\mathrm{Im}(n)\omega_1^*\overline{u_0}+\mathrm{Im}(n)\overline{u^*}\omega_0)\,\mathrm{d}x+$$
$$\int_{B_{\mathbf{R}}}\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})\,\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\,\mathrm{d}x-k^2\int_{B_{\mathbf{R}}}\mathrm{Re}(n)\omega_1^*\overline{u^*}\,\mathrm{d}x-\int_{\partial B_{\mathbf{R}}}\overline{\mathrm{Re}(T_k)u^*}\,\omega_1^*\,\mathrm{d}s。$$

现在定义一个算子 $K_1:H^1(D_1\setminus\overline{D})\to H^1(D_1\setminus\overline{D})$，

$$(K_1\omega_0,u_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}=\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\boldsymbol{I}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{A}))\,\nabla\omega_0\cdot\nabla\overline{u_0}\,\mathrm{d}x+\int_{D_1\setminus\overline{D}}\omega_0\overline{u_0}\,\mathrm{d}x+$$
$$\mathrm{i}\int_{D_1\setminus\overline{D}}(-\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})\,\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u_0}+\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})\,\nabla\overline{u^*}\cdot\nabla\omega_0)\,\mathrm{d}x+\int_{B_{\mathbf{R}}}\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})\,\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{u^*}\,\mathrm{d}x-\int_{\partial B_{\mathbf{R}}}\overline{\mathrm{Re}(T_k)u^*}\,\omega_1^*\,\mathrm{d}s,$$

由算子 K_1 的定义可知，它是自伴随算子。又因为：Dirichlet 到 Neumann 算子 $\mathrm{Re}(T_k)$ 的实部是非正的[13-14]，并利用 Young 不等式：

$$(K_1\omega_0,\omega_0)_{H^1(D_1\setminus\overline{D})}\geqslant\int_{D_1\setminus\overline{D}}(I-\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\alpha\,|\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})|)\,\nabla\omega_0\cdot\nabla\overline{\omega_0}\,\mathrm{d}x+$$
$$\int_{D_1\setminus\overline{D}}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\frac{1}{\alpha}|\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})|)\,\nabla\omega_1^*\cdot\nabla\overline{\omega_1^*}\,\mathrm{d}x+\int_{D_1\setminus\overline{D}}\omega_0\overline{\omega_0}\,\mathrm{d}x\geqslant c\,\|\omega_0\|^2_{H^1(D_1\setminus\overline{D})},$$

其中 α 使得 $\boldsymbol{I}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\alpha\,|\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})|>0$ 和 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\frac{1}{\alpha}|\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})|\geqslant 0$，并且 c 是仅取决于 $\boldsymbol{A}$，n 的常数。因为 $H^1(D_1\setminus\overline{D})$ 紧嵌入 $L^2(D_1\setminus\overline{D})$，则 $\mathrm{Re}(S)-K_1$ 是紧的。　　证毕

推论 1　在定理 2 和 3 的假设下，算子 $N_\sharp^{\frac{1}{2}}:L^2(\partial C)\to L^2(\partial C)$ 的值域和 $H^*:H^1(D_1\setminus\overline{D})\to L^2(\partial C)$ 的值域相等，其中 $N_\sharp:=|\mathrm{Re}(N)|+\mathrm{Im}(N)$。

注 1　本文最后用腔体 D 的支集来表征 $H^*:H^1(D_1\setminus\overline{D})\to L^2(\partial C)$ 的值域。因此，需要引入外传输特征值问题，设入射场是点源的复共轭，即本文的问题是找到 $\omega\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d\setminus\overline{D})$，$v\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d\setminus\overline{D})$ 使得：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\nabla\omega+k^2n\omega=0,x\in\mathbf{R}^d\setminus\overline{D},\tag{23}$$
$$\nabla v+k^2v=0,x\in\mathbf{R}^d\setminus\overline{D},\tag{24}$$

$$\omega-\left(v+\mathrm{i}\eta\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)=f,x\in\partial D, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{\nu}_A}-\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}=h,x\in\partial D, \tag{26}$$

$$\lim_{r\to+\infty}r^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{\partial\left(\omega-\left(v+\mathrm{i}\eta\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right)}{\partial r}-\mathrm{i}k\left(\omega-\left(v+\mathrm{i}\eta\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right)\right)=0, \tag{27}$$

$$\lim_{r\to+\infty}r^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\mathrm{i}kv\right)=0。 \tag{28}$$

其中:$f\in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$,$h\in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$。由文献[8]可知,如果 $k>0$ 不是外传输特征值,则式(23)~(28)有一个唯一的解 $\omega\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d\backslash\overline{D})$,$v\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d\backslash\overline{D})$,它连续依赖于 f 和 h。

假设 3 波数 $k>0$ 不是对应于式(23)~(28)的外部传输特征值。

定理 4 当假设 3 成立,那么对于 $z\in\mathbf{R}^d\backslash\overline{C}$,有 $\Phi(\cdot,z)$ 在 H^* 的值域当且仅当 $z\in\mathbf{R}^d\backslash\overline{D}$。

证明 当 $z\in\mathbf{R}^d\backslash\overline{D}$ 时,因为 k 不是外部传输特征值,则构造式(23)~(28)的唯一解 $\omega_z\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d\backslash\overline{D})$,$v_z\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d\backslash\overline{D})$,其中 $f:=\Phi(\cdot,z)+\mathrm{i}\eta\frac{\partial\Phi(\cdot,z)}{\partial \boldsymbol{\nu}}$,$h:=\frac{\partial\Phi(\cdot,z)}{\partial \boldsymbol{\nu}}$。

设 $u_z=\omega_z-\left(v_z+\mathrm{i}\eta\frac{\partial v_z}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)$,从式(28)得到 u_z 是一个外传辐射解,即在 $\mathbf{R}^d\backslash\overline{D}$ 中满足:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\nabla u_z+k^2nu_z=\nabla(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\nabla v_Z+k^2(1-n)v_Z。$$

又从式(25),(26)得出 u_z 在边界∂D 满足:

$$u_z:=\Phi(\cdot,z)+\mathrm{i}\eta\frac{\partial\Phi(\cdot,z)}{\partial \boldsymbol{\nu}},\frac{\partial u_z}{\partial \boldsymbol{\nu}}:=\frac{\partial\left(\Phi(\cdot,z)+\mathrm{i}\eta\frac{\partial\Phi(\cdot,z)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)}{\partial \boldsymbol{\nu}}。$$

接下来,在 $\mathbf{R}^d\backslash\overline{D}$ 中定义 $u:=u_z$,在 D 中定义 $u:=\Phi(\cdot,z)$,Cauchy 数据的连续性保证了 $u\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$。此外,$u$ 也是辐射解,在 $\mathbf{R}^d$ 中有$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\nabla u+k^2nu=\nabla(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\nabla v_Z+k^2(1-n)v_Z$ 成立。

根据 $G:H^1(D_1\backslash\overline{D})\to L^2(\partial C)$的定义可知$\Phi(\cdot,z)|_{\partial C}=Gv_z$,又 $v_z\in H^1(D_1\backslash\overline{D})$满足 Helmholtz 方程和入射辐射条件,因此它在算子 H 值域的闭包中。最后,由于 $G=H^*S$,则 $\Phi(\cdot,z)$在算子 H^* 的值域内。

现在假设 $z\in\overline{D}\backslash\overline{C}$,设 $v_0\in H^1(D_1\backslash\overline{D})$使得 $H^*v_0=\Phi(\cdot,z)$,则由式(8)可知,存在唯一确定的$v\in H^1(\mathbf{R}^d\backslash\overline{C})$,使得 $(H^*v_0)(x)=\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\int_{\partial C}\frac{\partial\Phi(\cdot,y)}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}v(y)\mathrm{d}s(y)-\frac{1}{2}v(x),x\in\partial C$。从跳跃关系可知:

$$\left[\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\Phi(\cdot,y)v(y)\mathrm{d}s(y)\right]^-=\Phi(\cdot,z),x\in\partial C,$$

由式(8)可知,v 在 $D\backslash\overline{C}$ 中满足的 Helmholtz 方程且$\left.\frac{\partial v^+}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_{\partial C}=0$。现在定义:

$$\omega(\cdot)=\begin{cases}\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\Phi(x,y)v(y)\mathrm{d}s(y),x\in C,\\ \left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}v(y)\mathrm{d}s(y)-v(\cdot),x\in D\backslash\overline{C}。\end{cases}$$

那么 $\omega\in H^1(D)$在 D 中满足 Helmholtz 方程,且在边界∂C 上$\omega^-=\Phi(\cdot,z)$。因此,假设 1 保证了 C 中的 $\omega=\Phi(\cdot,z)$。因为两者在 C 中都满足 Helmholtz 方程的 Dirichlet 边值问题,如果 $z\in D$,通过解析延拓,就得到 $D\backslash z$ 中的$\omega=\Phi(\cdot,z)$,但由于 $\Phi(x,z)$在 $x=z$ 处有奇点,而 ω 是解析的,故矛盾;如果 $z\in\partial D$,那么 ω 与 $\Phi(\cdot,z)$直到边界∂D 上的相等的话就要求 $\Phi(\cdot,z)\in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$,由迹定理可知,矛盾。因此,$z\in\overline{D}\backslash\overline{C}$,$\Phi(\cdot,z)$不在算子 H^* 的值域内。换言之,$z\in\mathbf{R}^d\backslash\overline{D}$,有 $\Phi(\cdot,z)$在算子 H^* 的值域。 证毕

定理 5 对于 $z\in D_1\backslash\overline{C}$,有 $\Phi(\cdot,z)$在 H^* 的值域内当且仅当 $z\in D_1\backslash\overline{D}$。

证明 充分条件对波数没有限制的情况下成立,并且定理 4 的第 2 部分中已经证明。下面证明必要条件,对于 $z\in D_1\backslash\overline{D}$,则证明存在 $v_0\in H^1(D_1\backslash\overline{D})$使得 $H^*v_0=\Phi(\cdot,z)$。将 ε 固定得足够小,并考虑,其中

$\omega_1^* := \Phi(\cdot,z)\chi_\varepsilon$ 是一个截止函数，使得 $B(z,\varepsilon)$ 中 $\chi=0$，在 $B(z,2\varepsilon)$ 之外 $\chi=1$，其中 $B(z,\varepsilon)$ 是一个以 z 为圆心 ε 为半径的球，$B(z,2\varepsilon)\subset D_1\backslash\overline{D}$。显然，$\omega_1^* \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$。设 $v\in H^1(B_R\backslash\overline{C})$ 由式(10)定义，$v_0\in H^1(D_1\backslash\overline{D})$ 由式(11)定义，则需要证明 v，v_0 满足式(8)。通过构造 ω_1^* 满足 $D\backslash\overline{C}$ 和 $\mathbf{R}^d\backslash\overline{D_1}$ 中的 Helmholtz 方程，v 满足 $D\backslash\overline{C}$ 和 $\mathbf{R}^d\backslash\overline{D_1}$ 中的 Helmholtz 方程。因此

$$\int_{\partial D_1}\frac{\partial v^+}{\partial \boldsymbol{\nu}}\overline{\psi}\mathrm{d}s=\int_{\partial B_R}T_k v\overline{\psi}\mathrm{d}s-\int_{B_R\backslash\overline{D_1}}\nabla v\cdot\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x+k^2\int_{B_R\backslash\overline{D_1}}v\overline{\psi}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\partial D}\frac{\partial v^-}{\partial \boldsymbol{\nu}}\overline{\psi}\mathrm{d}s=\int_{\partial C}\frac{\partial v^+}{\partial \boldsymbol{\nu}}\overline{\psi}\mathrm{d}s+\int_{D\backslash\overline{C}}\nabla v\cdot\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x-k^2\int_{D\backslash\overline{C}}v\overline{\psi}\mathrm{d}x。$$

将上式代入式(11)，则 $\forall\,\psi\in H^1(B_R\backslash\overline{C})$ 有：

$$(v_0,\psi)_{H^1(D_1\backslash\overline{D})}=-\int_{B_R\backslash\overline{C}}\nabla v\cdot\nabla\overline{\psi}\mathrm{d}x+k^2\int_{B_R\backslash\overline{C}}v\overline{\psi}\mathrm{d}x+\int_{\partial B_R}T_k v\overline{\psi}\mathrm{d}s-\int_{\partial C}\frac{\partial v^+}{\partial \boldsymbol{\nu}}\overline{\psi}\mathrm{d}s。$$

从 v 的定义和利用跳跃性质，则 $\left[\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\Phi(x,y)v(y)\mathrm{d}s(y)\right]^-=\omega_1^*(x),x\in\partial C$，那么：

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}\left[\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\Phi(\cdot,y)v(y)\mathrm{d}s(y)\right]^-=\frac{\partial\omega_1^*}{\partial \boldsymbol{\nu}},x\in\partial C,$$

且利用跳跃性质的另一个应用表明：

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}\left[\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}(x)}\right)\int_{\partial C}\Phi(\cdot,y)v(y)\mathrm{d}s(y)\right]^+=\frac{\partial\omega_1^*}{\partial \boldsymbol{\nu}},x\in\partial C,$$

故在边界 ∂C 上 $\frac{\partial v^+}{\partial \boldsymbol{\nu}}=0$。

因此 v 和 v_0 满足式(8)，定义 H^* 成立。从 v 的构造和跳跃性质可知：

$$\left(1+\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\int_{\partial C}\frac{\partial\Phi(\cdot,y)}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}v(y)\mathrm{d}s(y)-\frac{1}{2}v(x)=\omega_1^*(x),x\in\partial C,$$

故 $H^*v_0=\omega_1^*$。又因为在 D 内 $\omega_1^*=\Phi(\cdot,z)$，故在边界 ∂C 上 $H^*v_0=\Phi(\cdot,z)$。　　证毕

定理 6　假设对波数 $k>0$ 时假设 1 和 2 都有效，对于某些 $\alpha>0$，$\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})>\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{I}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\alpha|\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})|>0$ 和 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})-\frac{1}{\alpha}|\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})|\geqslant 0$ 都有效。那么对于 $z\in D_1\backslash\overline{C}$，有：

$$z\in D_1\backslash\overline{D}\Leftrightarrow\sum_j\frac{|(\Phi_z,\varphi_j)|^2}{\lambda_j}<\infty,$$

其中：$\Phi_z := \Phi(\cdot,z)|_{\partial C}$，$\Phi(\cdot,z)$ 为式(1)给出的 Helmholtz 方程的基本解。

参考文献：

[1] CAKONI F，COLYON D. A qualitative approach to inverse scattering theory[M]. New York：Springer，2014.

[2] KIRSCH A，GRINBERG N. The factorization method for inverse problems[M]. Oxford：Oxford University，2007.

[3] HU Y，CAKONI F，LIU J. The inverse scattering problem for a partially coated cavity with interior measurements[J]. Applicable Analysis，2014，93(5)：936-956.

[4] IKEHATA M. An inverse acoustic scattering problem inside a cavity with dynamical back-scattering data[J]. Inverse Problems，2012，28(9)：095016.

[5] YE J G，YAN G Z. The inverse scattering problem for an inhomogeneous two-layered cavity[J]. Journal of Inverse and Ill-posed Problems，2024，32(2)：161-181.

[6] QIN H H，COLTON D. The inverse scattering problem for cavities[J]. Applied Numerical Mathematics，2012，62(6)：699-708.

[7] CAKONI F，COLTON D，MENG S. The inverse scattering problem for a penetrable cavity with internal measurements[J]. AMS Contemporary Mathematics，2014(615)：71-88.

[8] MENG S X，HADDAR H，CAKONI F. The factorization method for a cavity in an inhomogeneous medium[J]. Inverse Problems，2014，30(4)：045008.

[9] LIU X D. The factorization method for cavities[J]. Inverse Problems，2013，30(1)：015006.

[10] ANGELL T S，KIRSCH A. Optimization methods in electromagnetic radiation[M]. New York：Springer，2004.

[11] KRESS R, MAZYA V, KOZLOV V. Linear integral equations[M]. Berlin: Springer, 1989.

[12] LECHLEITER A. The factorization method is independent of transmission eigenvalues[J]. Inverse Problems Imaging, 2009, 3(1): 123-138.

[13] NÉDÉLEC J C. Acoustic and electromagnetic equations: integral representations for harmonic problems[M]. New York: Springer, 2001.

[14] COLTON D, KRESS R, KRESS R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory[M]. Berlin: Springer, 1998.

Mathematical Programming and Optimality Theory

The Factorization Method for the Inverse Scattering Problem of a Fully Coated Penetrable Cavity with Interior Measurements

LIU Lihan, LIU Qing

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The shape of the cavity is determined by measuring the near-field data of the curve or surface inside the cavity. The inverse scattering problem of a fully coated penetrable cavity with interior measurements is studied by the factorization method. First, the mathematical model of the inverse scattering problem is presented in the form of radiation scattering field. Next, the decomposition of the cavity near-field data operator is studied by constructing the principal factorization of the operator under the condition of full coating, Finally, assuming that the constructed operator satisfies the appropriate conditions, the range of the data operator is found and the shape of the cavity is described.

Keywords: inverse scattering; the factorization method; a fully coated penetrable cavity

(责任编辑 陈 乔)