数学规划与最优性理论专题

DOI:10.11721/cqnuj20250202

# $E$-半预不变凸区间值函数与区间值规划*

文　铭[1]，彭再云[1]，谭馨悦[1]，邓春艳[1,2]
(1. 重庆交通大学 数学与统计学院，重庆 400074；2. 重庆工商大学派斯学院 软件工程学院，重庆 401520)

**摘要**：在提出 $E$-半预不变凸区间值函数的定义并讨论它的性质基础上，研究不等式约束情形下 $E$-区间值规划的最优性条件，然后举例验证 $E$-半预不变凸区间值函数的存在性，并给出 $E$-半预不变凸区间值函数几点有趣的性质，最后利用约束品性等假设严格推导 $E$-区间值规划的最优性条件。结果得到了 $E$-半预不变凸区间值函数和 $E$-半不变凸区间值函数之间的关系，获得了 $E$-半预不变凸区间值规划的 KKT 最优性充分和必要条件。研究认为 $E$-半预不变凸区间值函数是大量存在的，它在区间值规划研究中具有重要意义，所获结果丰富了区间值规划及相关方向的研究。

**关键词**：$E$-半预不变凸区间值函数；$E$-区间值规划；$E$-KKT 最优性
**中图分类号**：O221　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2025)02-0117-10

在数学规划中，人们通常处理的是精确的数据；然而在许多现实情况下，例如在工程领域数据收集过程中，人们会遇到不确定的数据。因此，如何描述这些不确定的数据是一个非常吸引人且有价值的问题。近些年来，许多学者致力于利用随机变量、模糊数和区间来描述这类不确定性问题。其中，将区间用于描述现实问题中的不确定数据能简单高效地消除误差。文献[1]提到早在 1951 年，有关区间分析的研究成果就以俄文形式发表，其中明确地定义了区间运算的规则。但直到 1966 年 Moore[2] 出版第 1 本关于区间分析的专著后，关于区间分析的相关研究结果才受到学界的大量关注。1979 年，Moore[3] 又系统性地阐述了区间分析的方法和应用。目前，区间分析方法已被广泛应用于航空航天工程、多属性决策、收费运输问题等领域。2007 年，Wu[4] 最早提出了区间值函数和区间值方法；他以区间分析理论为基础，把实值函数的凸性推广到了区间值函数，通过区间值函数的 LU-凸性获得了单目标区间值优化问题的 KKT 最优性条件，区间值规划应运而生。随后，包括 Wu 在内的一些学者对区间值规划进行了大量研究，相关研究成果见文献[5-12]。

同时，在区间值规划问题的研究中，函数的凸性和广义凸性扮演着十分重要的角色。近些年来，函数的广义凸性也得到了很好的拓展，并被广泛用于优化理论、经济学、工程科学和黎曼流形，以解决实际问题。自 1981 年 Hanson[13] 提出了不变凸函数将凸函数推广后，不少学者又提出了函数的($E$-)不变凸性、($E$-)预不变凸性和($E$-)半预不变凸性，并针对其中性质及在数学规划中的应用作了深入且广泛的研究[14-21]。2016 年，杨新民等人[22] 出版国内第 1 本关于广义凸性的专著，其中较深入地介绍了广义凸性基本理论及应用。此后，彭再云等人[23-24] 先后提出了 $G$-$E$-半预不变凸函数和半严格 $G$-$E$-半预不变凸型数，探讨了这 2 类广义凸函数在数学规划中的应用，进一步丰富了非线性多目标规划的研究内容。2019 年，Abdulaleem[25] 在 $E$-不变凸性和 $E$-Guignard 约束品性假设下获得了一类具有不等式和等式约束的 $E$-可微多目标规划问题的 $E$-KKT 最优性必要条件。2020 年，Antczak 等人[26] 给出 $E$-拟凸和 $E$-伪凸区间值函数的概念，并在一定凸性假设下研究了一类含有等式和不等式约束的 $E$-凸多目标区间值优化问题的 $E$-KKT 条件。2022 年，彭志莹等人[27] 提出了 $\alpha$-$D$-半预不变凸映射，研究了此类映射的判定定理、性质以及该类映射在优化问题中的应用；2021 年，邓春艳等人[28] 给出一类广义凸区间值函数——$E$-预不变凸区间值函数，定义了含不等式约束的 $E$-区间值优化问题的 $E$-型解的概念，在

* **收稿日期**：2024-10-04　**修回日期**：2024-12-06　**网络出版时间**：2025-04-29T15:21
**资助项目**：国家自然科学基金面上项目(No. 12271067)；重庆市教育委员会科学技术研究计划项目重点项目(No. KJZD-202200704)；重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT21021)；重庆市自然科学基金面上项目(No. CSTB2024NSCQ-MSX0973)；重庆市研究生联合培养基地建设项目(No. JDLHPYJD2021016)；重庆市研究生教育教学改革研究项目(No. yjg223094)
**第一作者简介**：文铭，男，研究方向为不确定优化理论与方法，E-mail：wenmingcq@163.com；**通信作者简介**：彭再云，男，教授，博士生导师，E-mail：pengzaiyun@126.com
**网络出版地址**：https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250429.1359.006

$E$-预不变凸性假设下研究了这类优化问题的 $E$-KKT 最优性必要和充分条件。2023 年,李慧云等人[29]研究了 $CW$-$E$-对称可微区间值函数及它在广义凸区间值优化问题中的应用。2024 年,彭健益等人[30]推广了文献[28]的结果,定义了 $E$-$\alpha$-预不变凸区间值函数,获得了相关性质及它在 $E$-区间值优化问题中的应用。

受文献[21,27-28]启发,本文提出了 $E$-半预不变凸区间值函数的概念,并举例对 $E$-半预不变凸区间值函数的存在性进行了验证,对该函数的性质及它在 $E$-区间值规划中的应用进行了研究,获得了 $E$-半预不变凸区间值规划的 KKT 最优性充分和必要条件。

## 1 预备知识

设 $\mathbf{R}^n$ 为 $n$ 维欧几里得空间,用 $\mathcal{I}$ 表示 $\mathbf{R}$ 中所有闭区间构成的集族,设 $A=[a^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{U}}],B=[b^{\mathrm{L}},b^{\mathrm{U}}]\in\mathcal{I}$ 分别表示 $\mathcal{I}$ 中的 2 个闭区间,定义以下运算:

$$A+B=[a^{\mathrm{L}}+b^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{U}}+b^{\mathrm{U}}],-A=[-a^{\mathrm{U}},-a^{\mathrm{L}}],A\times B=[\min_{ab},\max_{ab}],$$

其中:$\min_{ab}=\min\{a^{\mathrm{L}}b^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{L}}b^{\mathrm{U}},a^{\mathrm{U}}b^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{U}}b^{\mathrm{U}}\},\max_{ab}=\max\{a^{\mathrm{L}}b^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{L}}b^{\mathrm{U}},a^{\mathrm{U}}b^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{U}}b^{\mathrm{U}}\}$。由此可以定义:

$$A-B=A+(-B)=[a^{\mathrm{L}}-b^{\mathrm{U}},a^{\mathrm{U}}-b^{\mathrm{L}}],kA=\{ka:a\in A\}=\begin{cases}[ka^{\mathrm{L}},ka^{\mathrm{U}}],k\geqslant 0\\ [ka^{\mathrm{U}},ka^{\mathrm{L}}],k<0\end{cases}(k\in\mathbf{R})。$$

特别地,实数 $a\in\mathbf{R}$ 可以看作是一个闭区间 $A_a=[a,a]$,此时 $a+B$ 与 $A_a+B$ 是等价的,关于区间值的更多分析可参见文献[2-3]。

为便于讨论,设 $A=[a^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{U}}]\in\mathcal{I}$ 是一个闭区间,并记 $A^{\mathrm{L}}=a^{\mathrm{L}},A^{\mathrm{U}}=a^{\mathrm{U}}$。2007 年,Wu[4]给出了区间值函数的概念。函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathcal{I}$ 被称为区间值函数,如果 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,f(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbf{R}$ 中的闭区间。也可记 $f(\boldsymbol{x}):=[f^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}),f^{\mathrm{U}}(\boldsymbol{x})]$,其中 $f^{\mathrm{L}}$ 与 $f^{\mathrm{U}}$ 均为 $\mathbf{R}^n$ 上的实值函数,且满足 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,都有 $f^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})\leqslant f^{\mathrm{U}}(\boldsymbol{x})$,同时,$(f(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{L}}=f^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})$ 且 $(f(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{U}}=f^{\mathrm{U}}(\boldsymbol{x})$。

假设 $A=[a^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{U}}]$ 与 $B=[b^{\mathrm{L}},b^{\mathrm{U}}]$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 2 个闭区间,记 $A\preceq_{\mathrm{LU}}B$ 当且仅当 $a^{\mathrm{L}}\leqslant b^{\mathrm{L}}$ 且 $a^{\mathrm{U}}\leqslant b^{\mathrm{U}}$ 成立,记 $A\prec_{\mathrm{LU}}B$ 当且仅当 $A\preceq_{\mathrm{LU}}B$ 且 $A\neq B$ 成立,也即下列情况之一成立:1) $a^{\mathrm{L}}<b^{\mathrm{L}}$ 且 $a^{\mathrm{U}}\leqslant b^{\mathrm{U}}$,2) $a^{\mathrm{L}}\leqslant b^{\mathrm{L}}$ 且 $a^{\mathrm{U}}<b^{\mathrm{U}}$,3) $a^{\mathrm{L}}<b^{\mathrm{L}}$ 且 $a^{\mathrm{U}}<b^{\mathrm{U}}$。

下面介绍几类不同的区间值函数可微性的描述。

**定义 1**[4] 设 $K$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集,$f(\boldsymbol{x})=[f^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}),f^{\mathrm{U}}(\boldsymbol{x})]$ 是 $K$ 上的区间值函数,$\boldsymbol{x}_0\in K$,如果实值函数 $f^L$ 与 $f^U$ 均在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微,则称 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是弱可微的。

**定义 2**[4] 设集合 $X\subseteq\mathbf{R}^n$,映射 $E:X\to\mathbf{R}^n$,$f$ 是 $X$ 上的区间值函数,$\boldsymbol{x}_0\in X$,如果实值函数 $f^{\mathrm{L}}(E(\cdot))$ 与 $f^{\mathrm{U}}(E(\cdot))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续可微,则称 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是弱连续 $E$-可微的。

**定义 3**[26] 设集合 $X\subseteq\mathbf{R}^n$,映射 $E:X\to\mathbf{R}^n$,$f$ 是 $X$ 上的区间值函数,$\boldsymbol{x}_0\in X$,如果实值函数 $f^{\mathrm{L}}(E(\cdot))$ 与 $f^{\mathrm{U}}(E(\cdot))$ 是可微的,并且:

$$f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}))=f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}_0))+\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\theta^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|,$$

$$f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}))=f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}_0))+\nabla f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\theta^{\mathrm{U}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|。$$

其中:当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$ 时,$\theta^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\to 0,\theta^{\mathrm{U}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\to 0$,则称区间值函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是 $E$-可微的。

## 2 $E$-半预不变凸区间值函数的定义和性质

彭再云等人[21]给出了 $E$-半预不变凸函数及 $E$-半不变凸函数的如下定义。

**定义 4**[21] 设集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$,如果存在非零向量函数 $\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:A\to A$,使得 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A,\forall\lambda\in[0,1]$ 有 $E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda)\in A$,则称 $A$ 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半连通集。

**定义 5**[21] 设开集 $K\subseteq\mathbf{R}^n$,若存在非零向量函数 $\boldsymbol{\eta}:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:K\to K$,使得 $E$-可微实值函数 $f:K\to\mathbf{R},\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K,\forall\lambda\in[0,1]$ 都有:

$$f(E(\boldsymbol{x}))-f(E(\boldsymbol{y}))\geqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda)\nabla f(E(\boldsymbol{y})),$$

则称 $f$ 在 $K$ 上是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半不变凸函数。

**定义 6**[21] 设集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于非零向量函数 $\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:A\to A$ 的 $E$-半连通集,若实值函数 $f:A\to\mathbf{R},\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A,\forall\lambda\in[0,1]$ 都有:

$$f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))\leqslant\lambda f(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f(E(\boldsymbol{y})),$$

且 $\lim\limits_{\lambda\to0^+}\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda)=0$，则称 $f$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸函数。

在文献[21]启发下给出 $E$-半不变凸区间值函数、$E$-半预不变凸区间值函数的定义及性质。

**定义 7**　设开集 $K\subseteq\mathbf{R}^n$，非零向量值函数 $\boldsymbol{\eta}:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:K\to K$，区间值函数 $f:K\to\mathcal{I}$，若 $f^{\mathrm{L}}$ 与 $f^{\mathrm{U}}$ 是 $K$ 上关于同一 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半不变凸函数，则称 $f$ 是 $K$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半不变凸区间值函数。

**定义 8**　设集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于非零向量函数 $\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:A\to A$ 的 $E$-半连通集，若区间值函数 $f:A\to\mathcal{I}$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$，$\forall\lambda\in[0,1]$都有：

$$f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))\leqslant_{\mathrm{LU}}\lambda f(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f(E(\boldsymbol{y})),$$

且 $\lim\limits_{\lambda\to0^+}\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda)=0$，则称区间值函数 $f$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数。

下面的例子说明了 $E$-半预不变凸区间值函数是大量存在的。

**例 1**　$f(x)=[\operatorname{arccot}(5x),\operatorname{arccot}(4x)]$，$A=[1,+\infty]$，$\eta(x,y,\lambda)=x-\lambda y$，$E(x)=\sin x+2$(图 1)。

**分析**　1) 先验证 $A$ 是关于 $\eta$ 的 $E$-半连通集。$\forall x,y\in A$，$\forall\lambda\in[0,1]$，有：

$$E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y),\lambda)=E(y)+\lambda(E(x)-\lambda E(y))=\sin y+2+\lambda(\sin x+2-\lambda(\sin y+2))=$$
$$\lambda(\sin x+2)+(1-\lambda^2)(\sin y+2)\geqslant\lambda+1-\lambda^2\geqslant1,$$

也即 $E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y),\lambda)\in A$，故 $A$ 是关于 $\eta$ 的 $E$-半连通集。

2) 再验证 $f$ 是 $A$ 上关于 $\eta$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数。考虑到：

$$f^{\mathrm{L}}(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y),\lambda))=\operatorname{arccot}(5\lambda(\sin x+2)+5(1-\lambda^2)(\sin y+2)),$$

又因 $f^{\mathrm{L}}(x)=\operatorname{arccot}(5x)$在 $A$ 上是凸的减函数，故有：

$$\operatorname{arccot}(5\lambda(\sin x+2)+5(1-\lambda^2)(\sin y+2))\leqslant\lambda\operatorname{arccot}(5(\sin x+2))+(1-\lambda)\operatorname{arccot}(5(1+\lambda)(\sin y+2))\leqslant$$
$$\lambda\operatorname{arccot}(5(\sin x+2))+(1-\lambda)\operatorname{arccot}(5(\sin y+2))=\lambda f^{\mathrm{L}}(E(x))+(1-\lambda)f^{\mathrm{L}}(E(y)),$$

即有：

$$f^{\mathrm{L}}(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y),\lambda))\leqslant\lambda f^{\mathrm{L}}(E(x))+(1-\lambda)f^{\mathrm{L}}(E(y))。$$

同理可得：

$$f^{\mathrm{U}}(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y),\lambda))\leqslant\lambda f^{\mathrm{U}}(E(x))+(1-\lambda)f^{\mathrm{U}}(E(y))。$$

且 $\lim\limits_{\lambda\to0^+}\lambda\eta(E(x),E(y),\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}(\lambda(\sin x+2)-\lambda^2(\sin y+2))=0$，故 $f$ 是 $A$ 上关于 $\eta$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数。

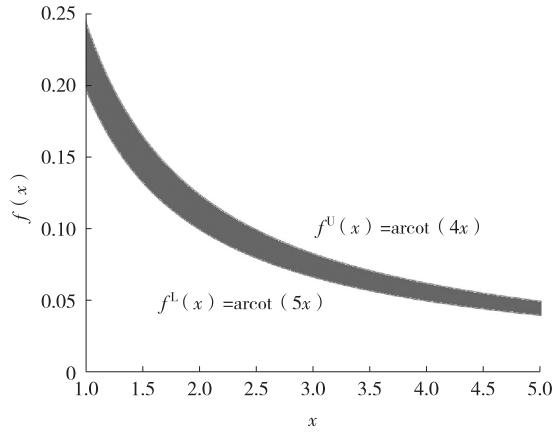


**图 1　例 1 中函数图像**

**Fig. 1　Function image in example 1**

**定理 1**　设集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于非零向量函数 $\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:A\to A$ 的 $E$-半连通集，区间值函数 $f:A\to\mathcal{I}$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数的充要条件为 $f^{\mathrm{L}}$ 与 $f^{\mathrm{U}}$ 均是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸函数。

**证明**　由 $E$-半预不变凸函数的定义及区间值的 LU 序关系的定义即可得证。　　证毕

**定理 2**　设集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于非零向量函数 $\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:A\to A$ 的 $E$-半连通集，区间

值函数 $f:A\to\mathcal{I}$ 及 $g:A\to\mathcal{I}$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数,实数 $k\geqslant 0$,则:1) $kf$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数;2) $f+g$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数。

**证明** 1) 考虑:

$$kf(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))=k(f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda)))\leq_{\mathrm{LU}}$$
$$k(\lambda f(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f(E(\boldsymbol{y})))=\lambda kf(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)kf(E(\boldsymbol{y})),$$

即 $kf$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数;

2) 记 $h(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})$,考虑:

$$h(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))=f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))+$$
$$g(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))\leq_{\mathrm{LU}}\lambda f(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f(E(\boldsymbol{y}))+\lambda g(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)g(E(\boldsymbol{y}))=$$
$$\lambda(f(E(\boldsymbol{x}))+g(E(\boldsymbol{x})))+(1-\lambda)(f(E(\boldsymbol{y}))+g(E(\boldsymbol{y})))=\lambda h(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)h(E(\boldsymbol{y})),$$

故 $f+g$ 也是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数。 证毕

下面给出 $E$-半预不变凸区间值函数与 $E$-半不变凸区间值函数之间的重要关系。

**定理3** 设集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于非零向量函数 $\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:A\to A$ 的 $E$-半连通集,如果 $f(\boldsymbol{x})=[f^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}),f^{\mathrm{U}}(\boldsymbol{x})]$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸且弱连续 $E$-可微的区间值函数,则 $f$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半不变凸区间值函数。

**证明** 由定理1可知 $f^{\mathrm{L}}$ 与 $f^{\mathrm{U}}$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸函数。根据 $E$-半预不变凸函数的定义有:

$$f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))\leqslant\lambda f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{y})),$$
$$f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))\leqslant\lambda f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{y})),$$

移项得:

$$f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}))-f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{y}))\geqslant\frac{f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))-f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{y}))}{\lambda},$$
$$f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}))-f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{y}))\geqslant\frac{f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))-f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{y}))}{\lambda}。$$

由于 $f$ 是弱连续 $E$-可微的,令 $\lambda\to 0^+$,可得:

$$f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}))-f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{y}))\geqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda)\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{y})),$$
$$f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}))-f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{y}))\geqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda)\nabla f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{y}))。$$

即 $f^{\mathrm{L}}$ 与 $f^{\mathrm{U}}$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半不变凸函数,故 $f$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半不变凸区间值函数。 证毕

一般而言,定理3的逆命题是不成立的,下面用例子说明此情形。

**例2** 令 $A=\mathbf{R}$,$f(x)=[x+1,x+3]$,当取 $\eta(x,y,\lambda)=-\lambda x-2$,$E(x)=\mathrm{e}^x$ 时,$f(x)$ 在 $A$ 上是关于 $\eta$ 的 $E$-半不变凸区间值函数,但不是关于 $\eta$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数。

**分析** 1) 显然 $A=\mathbf{R}$ 为开集。又 $E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y),\lambda)=\mathrm{e}^y-\lambda(\lambda\mathrm{e}^x+2)\in\mathbf{R}$,故 $A$ 为关于 $\eta$ 的 $E$-半连通集。现考虑 $f^{\mathrm{L}}$ 的 $E$-半不变凸性,$\forall x,y\in\mathbf{R}$,$\forall\lambda\in[0,1]$有:

$$f^{\mathrm{L}}(E(x))-f^{\mathrm{L}}(E(y))=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y>-2\mathrm{e}^y\geqslant\mathrm{e}^y(-2-\lambda\mathrm{e}^x)=\eta^{\mathrm{T}}(E(x),E(y),\lambda)\nabla f^{\mathrm{L}}(E(y)),$$

故 $f^{\mathrm{L}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是关于 $\eta$ 的 $E$-半不变凸函数,同理可得 $f^{\mathrm{U}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是关于 $\eta$ 的 $E$-半不变凸函数。

2) 现在说明 $f(x)$ 不是关于 $\eta$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数。事实上,取点 $x_0=0$,$y_0=2$,$\lambda=1$ 时,有:

$$f^{\mathrm{L}}(E(y_0)+\lambda\eta(E(x_0),E(y_0),\lambda))=\mathrm{e}^2-2>\lambda\mathrm{e}^{x_0}+(1-\lambda)\mathrm{e}^{y_0}+1=\lambda f^{\mathrm{L}}(E(x_0))+(1-\lambda)f^{\mathrm{L}}(E(y_0)),$$

即 $f(x)$ 不是 $\mathbf{R}$ 上关于 $\eta$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数。

受 Mohan 等人[31]的启发,给出下面的条件 C($E$)。

**条件 C($E$)** 设有非零向量函数 $\boldsymbol{\eta}:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,称函数 $\eta$ 满足条件 C($E$)是指 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}$,$\forall\lambda\in[0,1]$,有下列等式成立:

$$\mathrm{C}_1(E):\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{y}),E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))=-\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda),$$
$$\mathrm{C}_2(E):\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))=(1-\lambda)\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda)。$$

**定理4** 设集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于非零向量函数 $\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及满射 $E:A\to A$ 的 $E$-半连通集,若区间值函数 $f(\boldsymbol{x})=[f^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}),f^{\mathrm{U}}(\boldsymbol{x})]$ 是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半不变凸且弱连续 $E$-可微区间值函数,向量函数 $\boldsymbol{\eta}$ 满足条件 C($E$),则 $f$ 是 $A$ 上关于同一 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数。

**证明**　$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A,\forall \lambda\in[0,1]$，令 $E(\overline{\boldsymbol{x}})=E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda)$，则有 $E(\overline{\boldsymbol{x}})\in A$，由于 $f$ 是 $E$-半不变凸区间值函数，故 $f^{\mathrm{L}}$ 与 $f^{\mathrm{U}}$ 均是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半不变凸函数，则对于 $\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}}$ 有：

$$f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}))-f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))\geqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}),E(\overline{\boldsymbol{x}}),\lambda)\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}})),\tag{1}$$

$$f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}))-f^{\mathrm{U}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))\geqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}),E(\overline{\boldsymbol{x}}),\lambda)\nabla f^{\mathrm{U}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))。\tag{2}$$

同理，对 $\boldsymbol{y},\overline{\boldsymbol{x}}$ 有：

$$f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{y}))-f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))\geqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{y}),E(\overline{\boldsymbol{x}}),\lambda)\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}})),\tag{3}$$

$$f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{y}))-f^{\mathrm{U}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))\geqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{y}),E(\overline{\boldsymbol{x}}),\lambda)\nabla f^{\mathrm{U}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))。\tag{4}$$

由 $\lambda$ 乘以式(1)再加$(1-\lambda)$乘以式(3)得：

$$\lambda f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{y}))-f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))\geqslant$$

$$\lambda\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}),E(\overline{\boldsymbol{x}}),\lambda)\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))+(1-\lambda)\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{y}),E(\overline{\boldsymbol{x}}),\lambda)\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))。$$

根据条件 C($E$)，有：

$$\lambda\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}),E(\overline{\boldsymbol{x}}),\lambda)\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))+(1-\lambda)\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{y}),E(\overline{\boldsymbol{x}}),\lambda)\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))=$$

$$\lambda(1-\lambda)\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda)\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))-(1-\lambda)\lambda\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda)\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))=0。$$

故 $\lambda f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{y}))-f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))\geqslant 0$，即：

$$f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))\leqslant\lambda f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{y}))。$$

类似地，由 $\lambda$ 乘以式(2)再加$(1-\lambda)$乘以式(4)得：

$$f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{y})+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}),\lambda))\leqslant\lambda f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{y}))。$$

故 $f^{\mathrm{L}}$ 与 $f^{\mathrm{U}}$ 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸函数，即 $f$ 在 $A$ 上是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数。　　证毕

## 3　$E$-半预不变凸区间值规划的最优性条件

考虑如下含不等式约束的区间值优化问题：

$$(\mathrm{IVOP})\begin{cases}\min\ f(\boldsymbol{x})=[f^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}),f^{\mathrm{U}}(\boldsymbol{x})],\\ \text{s.t.}\ \ g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0,i=1,\cdots,m,\\ \quad\ \boldsymbol{x}\in A。\end{cases}$$

其中：$A\subseteq\mathbf{R}^n$，$f:\mathbf{R}^n\to\mathcal{I}$ 为区间值函数，$g_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R},i=1,\cdots,m$ 是实值函数。记 $X=\{\boldsymbol{x}\in A:g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0,i=1,\cdots,m\}$为优化问题(IVOP)的可行集。

考虑与上述区间值优化问题(IVOP)相关的区间值优化问题($\mathrm{IVOP}_E$)，形式如下：

$$(\mathrm{IVOP}_E)\begin{cases}\min\ f(E(\boldsymbol{x}))=[f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x})),f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}))],\\ \text{s.t.}\ \ g_i(E(\boldsymbol{x}))\leqslant 0,i=1,\cdots,m,\\ \quad\ \boldsymbol{x}\in A。\end{cases}$$

记 $X_E=\{\boldsymbol{x}\in A:g_i(E(\boldsymbol{x}))\leqslant 0,i=1,\cdots,m\}$为优化问题($\mathrm{IVOP}_E$)的可行集。

**定义 9**[4]　设 $\boldsymbol{x}^*$ 为优化问题(IVOP)的一个可行解，即 $\boldsymbol{x}^*\in X$。如不存在其他可行解$\overline{\boldsymbol{x}}$ 使得：

$$f(\overline{\boldsymbol{x}})\prec_{\mathrm{LU}}f(\boldsymbol{x}^*),$$

则称 $\boldsymbol{x}^*$ 为优化问题(IVOP)的 type-Ⅰ最优解。

邓春艳等人[28]提出了优化问题(IVOP)的 $E$-type-Ⅰ最优解的概念如下。

**定义 10**[28]　设 $\boldsymbol{x}^*$ 为优化问题(IVOP)的一个可行解，即 $\boldsymbol{x}^*\in X$。如不存在其他可行解$\overline{\boldsymbol{x}}$ 使得：

$$f(E(\overline{\boldsymbol{x}}))\prec_{\mathrm{LU}}f(E(\boldsymbol{x}^*)),$$

则称 $\boldsymbol{x}^*$ 为优化问题(IVOP)的 $E$-type-Ⅰ最优解。

优化问题(IVOP)与($\mathrm{IVOP}_E$)的解的关系有如下结论。

**引理 1**[26]　设集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于非零向量值函数 $\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:A\to A$ 的 $E$-半连通集。如果 $E$ 是双射(即单射且满射)，$\boldsymbol{x}^*$ 是优化问题(IVOP)的 type-Ⅰ最优解，则存在$\overline{\boldsymbol{z}}\in X_E$，使得 $E(\overline{\boldsymbol{z}})=\boldsymbol{x}^*$，$\overline{\boldsymbol{z}}$ 是优化问题($\mathrm{IVOP}_E$)的 type-Ⅰ最优解。

**引理 2**[26]　设集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于非零向量值函数 $\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:A\to A$ 的 $E$-半连通集。如果 $E$ 是双射，$\overline{\boldsymbol{z}}\in X_E$ 是优化问题($\mathrm{IVOP}_E$)的 type-Ⅰ最优解，则 $E(\overline{\boldsymbol{z}})$是优化问题(IVOP)的 $E$-type-Ⅰ最优解。

Farkas引理是优化理论中的一个基本引理,最早由匈牙利数学家Farkas[32]于1902年提出,它是最优化方法中重要的基础工具之一,下面对该引理进行回顾。

**引理3**[32] (Farkas引理)给定矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{m\times n}$,则下述2组方程中有且仅有1组有解:1) $\boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{Ax}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{Cx}\leqslant\boldsymbol{0}$,其中$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$;2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\mu+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\lambda=\boldsymbol{0}$,其中$\mu>0,\lambda\geqslant0$。

用$J(E(\boldsymbol{x}^*))$表示在$\boldsymbol{x}^*$处的积极约束指标集,定义为$J(E(\boldsymbol{x}^*)):=\{i:g_i(E(\boldsymbol{x}^*))=0,i=1,\cdots,m\}$。

**定理5** ($E$-KKT必要条件)设集合$A\subseteq\mathbf{R}^n$是关于非零向量函数$\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$及映射$E:A\to A$的$E$-半连通集。$f:A\to\mathcal{I}$是$A$上关于$\boldsymbol{\eta}$的$E$-半预不变凸且$E$-可微的区间值函数,$g_i(i=1,\cdots,m)$在$A$上是关于同一$\boldsymbol{\eta}$的$E$-半不变凸且$E$-可微的实值函数。设$E$是双射,$\boldsymbol{x}^*\in X_E$是优化问题(IVOP$_E$)的type-Ⅰ最优解,且存在$\overline{\boldsymbol{x}}\in X_E$使得$g_i(E(\overline{\boldsymbol{x}}))<0,i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))$成立,则存在Lagrange乘子$0\leqslant\mu_i\in\mathbf{R},i=1,\cdots,m$使得下列式子成立:

$$\begin{cases}\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}^*))+\nabla f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}^*))+\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i\nabla g_i(E(\boldsymbol{x}^*))=\boldsymbol{0},\\ \mu_i g_i(E(\boldsymbol{x}^*))=0,i=1,\cdots,m。\end{cases}\tag{5}$$

**证明** 由于$\boldsymbol{x}^*\in X_E$是优化问题(IVOP$_E$)的一个可行解,故$g_i(E(\boldsymbol{x}^*))=0,i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))$,现假设存在$\boldsymbol{d}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0},\forall i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))$,有以下系统成立:

$$\nabla g_i(E(\boldsymbol{x}^*))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\leqslant0,\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}^*))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}<0,\nabla f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}^*))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}<0。\tag{6}$$

由于存在$\boldsymbol{x}^*\in X_E$使得$g_i(E(\overline{\boldsymbol{x}}))<0,i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))$,则有:

$$g_i(E(\overline{\boldsymbol{x}}))-g_i(E(\boldsymbol{x}^*))<0,\forall i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))。$$

由$g_i$的$E$-半不变凸性,可得:

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*),\lambda)\nabla g_i(E(\boldsymbol{x}^*))\leqslant g_i(E(\overline{\boldsymbol{x}}))-g_i(E(\boldsymbol{x}^*))<0,\forall i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))。$$

结合式(6)可知$\forall\varepsilon>0,\nabla g_i(E(\boldsymbol{x}^*))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{d}+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(E(\overline{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*),\lambda))<0,\forall i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))$。因此,存在$\delta>0$使得$g_i(E(\boldsymbol{x}^*)+\delta(\boldsymbol{d}+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(E(\overline{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*),\lambda)))\leqslant g_i(E(\boldsymbol{x}^*))=0,\forall i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))$,故

$$E(\boldsymbol{x}^*)+\delta(\boldsymbol{d}+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(E(\overline{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*),\lambda))$$

是优化问题(IVOP)的可行解。

由$\boldsymbol{x}^*\in X_E$是优化问题(IVOP$_E$)的type-Ⅰ最优解,因此,根据引理2,$E(\boldsymbol{x}^*)$是优化问题(IVOP)的$E$-type-Ⅰ最优解。故不存在$\overline{\boldsymbol{x}}\in X_E$使得$f(E(\overline{\boldsymbol{x}}))\prec_{\mathrm{LU}}f(E(\boldsymbol{x}^*))$,则对于优化问题(IVOP)的可行解$E(\boldsymbol{x}^*)+\delta(\boldsymbol{d}+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(E(\overline{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*),\lambda))$,$\forall\varepsilon>0$有$f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}^*)+\delta(\boldsymbol{d}+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(E(\overline{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*),\lambda)))\geqslant f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}^*))$或$f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}^*)+\delta(\boldsymbol{d}+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(E(\overline{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*),\lambda)))\geqslant f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}^*))$成立。

又由于$f$是$E$-可微的,故$\forall\varepsilon>0$有

$$\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}^*))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{d}+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(E(\overline{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*),\lambda))\geqslant0,$$

或

$$\nabla f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}^*))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{d}+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(E(\overline{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*),\lambda))\geqslant0$$

成立。当$\varepsilon\to0^+$时,有$\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}^*))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\geqslant0$,或$\nabla f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}^*))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\geqslant0$,这表明式(6)无解。因此根据Farkas引理,存在$\lambda_i=1,\mu_i\geqslant0,i=1,\cdots,m$使得:

$$\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}^*))+\nabla f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}^*))+\sum_{i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))}\mu_i\nabla g_i(E(x^*))=\boldsymbol{0}。$$

当$i\notin J(E(\boldsymbol{x}^*))$,令$\mu_i=0$,可得$\mu_i g_i(E(\boldsymbol{x}^*))=0$,故式(5)成立。 证毕

为研究优化问题(IVOP$_E$)的最优性充分条件,现考虑如下实值优化问题(P$_E$):

$$(\mathrm{P}_E)\begin{cases}\min\varphi(E(\boldsymbol{x})),\\ \text{s.t. } g_i(E(\boldsymbol{x}))\leqslant0,i=1,\cdots,m,\\ \quad\boldsymbol{x}\in A。\end{cases}$$

其中:集合$A\subseteq\mathbf{R}^n$是关于非零向量值函数$\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$及映射$E:A\to A$的$E$-半连通集,$\varphi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R},g_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R},i=1,\cdots,m$均为$A$上的$E$-可微实值函数。

显然,优化问题(P$_E$)和(IVOP$_E$)具有相同的可行集$X_E$。如果$\boldsymbol{x}^*\in X_E$,$\forall\boldsymbol{x}\in X_E$有$\varphi(E(\boldsymbol{x}^*))\leqslant$

$\varphi(E(\boldsymbol{x}))$，则称 $\boldsymbol{x}^*$ 为优化问题$(\mathrm{P}_E)$的一个全局最优解。

**引理 4**　设 $\boldsymbol{x}^*$ 是优化问题$(\mathrm{P}_E)$的一个可行点，集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于非零向量值函数 $\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:A\to A$ 的 $E$-半连通集。$\varphi:A\to\mathbf{R}$ 和 $g_i(i=1,\cdots,m)$是 $E$-可微，且是 $A$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半不变凸函数。如果存在 Lagrange 乘子 $0\leqslant\mu_i\in\mathbf{R},i=1,\cdots,m$ 使得

$$\begin{cases}\nabla\varphi(E(\boldsymbol{x}^*))+\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i\nabla g_i(E(\boldsymbol{x}^*))=\boldsymbol{0}\\ \mu_i g_i(E(\boldsymbol{x}^*))=0,i=1,\cdots,m\end{cases}\tag{7}$$

成立，则 $\boldsymbol{x}^*$ 是优化问题$(\mathrm{P}_E)$的全局最优解。

**证明**　当 $i\notin J(E(\boldsymbol{x}^*))=\{i:g_i(E(\boldsymbol{x}^*))=0,i=1,\cdots,m\}$，由式(7)中 $\mu_i g_i(E(\boldsymbol{x}^*))=0$ 可知 $\mu_i=0$，于是有：

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i\nabla g_i(E(\boldsymbol{x}^*))=\sum_{i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))}\mu_i\nabla g_i(E(\boldsymbol{x}^*))。\tag{8}$$

由 $\varphi,g_i$ 的 $E$-半不变凸性及式(7)、(8)可知，对于优化问题$(\mathrm{P}_E)$的任意可行点 $\boldsymbol{x}\in X_E$，有：

$$\begin{aligned}\varphi(E(\boldsymbol{x}))-\varphi(E(\boldsymbol{x}^*))&\geqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{x}^*),\lambda)\nabla\varphi(E(\boldsymbol{x}^*))=\\&-\sum_{i=1}^{m}\mu_i\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{x}^*),\lambda)\nabla g_i(E(\boldsymbol{x}^*))=\\-\sum_{i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))}\mu_i\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{x}^*),\lambda)\nabla g_i(E(\boldsymbol{x}^*))&\geqslant-\sum_{i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))}\mu_i(g_i(E(\boldsymbol{x}))-g_i(E(\boldsymbol{x}^*)))\geqslant0,\end{aligned}$$

也即对于优化问题$(\mathrm{P}_E)$的任意可行点 $\boldsymbol{x}$，都有 $\varphi(E(\boldsymbol{x}^*))\leqslant\varphi(E(\boldsymbol{x}))$，即 $\boldsymbol{x}^*$ 是优化问题$(\mathrm{P}_E)$的全局最优解。

证毕

**定义 11**　若存在 Lagrange 乘子 $\mu_i^*\in\mathbf{R}_+,i=1,\cdots,m$ 及 $\boldsymbol{x}^*\in X_E$ 使得式(5)成立，则称$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\mu}^*)\in X_E\times\mathbf{R}_+^m$ 为优化问题$(\mathrm{IVOP}_E)$的 $E$-KKT 点。

**定理 6**　($E$-KKT 充分条件)设集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于非零向量值函数 $\boldsymbol{\eta}:A\times A\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 及映射 $E:A\to A$ 的 $E$-半连通集。设$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\mu}^*)\in X_E\times\mathbf{R}_+^m$ 是优化问题$(\mathrm{IVOP}_E)$的 $E$-KKT 点。如果 $E$ 是双射，$f$ 是弱连续 $E$-可微的，$g_i,i\in J(E(\boldsymbol{x}^*))$是 $E$-可微，并且在 $\boldsymbol{x}^*$ 处分别是关于同一 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半预不变凸区间值函数和 $E$-半不变凸函数，则 $\boldsymbol{x}^*$ 是优化问题$(\mathrm{IVOP}_E)$的一个 type-Ⅰ最优解，$E(\boldsymbol{x}^*)$是优化问题(IVOP)的 $E$-type-Ⅰ最优解。

**证明**　令 $\hat{f}(\boldsymbol{x})=f^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})+f^{\mathrm{U}}(\boldsymbol{x})$。根据假设及定理 3 可知 $f$ 在 $\boldsymbol{x}^*$ 处是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $E$-半不变凸区间值函数，进一步可知 $f^{\mathrm{L}}$ 与 $f^{\mathrm{U}}$ 在 $\boldsymbol{x}^*$ 处均为 $E$-半不变凸函数，根据定理 2 中 2)可知 $\hat{f}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}^*$ 处也为 $E$-半不变凸函数，并且有$\nabla\hat{f}(E(\boldsymbol{x}^*))=\nabla f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}^*))+\nabla f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}^*))$。

又因$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$是优化问题$(\mathrm{IVOP}_E)$的 $E$-KKT 点，根据引理 4，则 $\boldsymbol{x}^*$ 是以 $\hat{f}(E(\boldsymbol{x}))\coloneqq\varphi(E(\boldsymbol{x}))$为目标且约束条件与优化问题$(\mathrm{IVOP}_E)$相同的实值优化问题的一个全局最优解，即：

$$\hat{f}(E(\boldsymbol{x}^*))\leqslant\hat{f}(E(\boldsymbol{x})),\forall\,\boldsymbol{x}\in X_E。\tag{9}$$

现假设 $\boldsymbol{x}^*$ 不是优化问题$(\mathrm{IVOP}_E)$的一个 type-Ⅰ最优解，则存在$\overline{\boldsymbol{x}}\in X_E$ 使得 $f(E(\overline{\boldsymbol{x}}))\prec_{\mathrm{LU}}f(E(\boldsymbol{x}^*))$，则有以下情况之一成立：1) $f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))<f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}^*))$且 $f^{\mathrm{U}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))<f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}^*))$；2) $f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))\leqslant f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}^*))$且 $f^{\mathrm{U}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))<f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}^*))$；3) $f^{\mathrm{L}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))<f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}^*))$且 $f^{\mathrm{U}}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))\leqslant f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}^*))$。

由于 $\hat{f}(\boldsymbol{x})=f^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})+f^{\mathrm{U}}(\boldsymbol{x})$，故有 $\hat{f}(E(\boldsymbol{x}))=f^{\mathrm{L}}(E(\boldsymbol{x}))+f^{\mathrm{U}}(E(\boldsymbol{x}))$，根据上述情况 1)、2)或 3)均可得 $\hat{f}(E(\boldsymbol{x}^*))>\hat{f}(E(\overline{\boldsymbol{x}}))$，这与式(9)矛盾，故 $\boldsymbol{x}^*$ 是优化问题$(\mathrm{IVOP}_E)$的一个 type-Ⅰ最优解。根据引理 2 可得 $E(\boldsymbol{x}^*)$是优化问题(IVOP)的 $E$-type-Ⅰ最优解。　证毕

下面用例 3 来验证定理 6 的正确性。

**例 3**　考虑如下区间值优化问题：

$$(\mathrm{IVOP}_{E_1})\begin{cases}\min f(E(x)),\\ \text{s.t. } g_1(E(x))\leqslant0,\\ \qquad g_2(E(x))\leqslant0,\\ \qquad x\in A。\end{cases}$$

其中:$A=[0,1]$,$E(x)=x^2$,$\eta(x,y,\lambda)=\lambda x-y$,$f(x)=[x^2+x+1,x^2+3]$,$g_1(x)=x^2-\frac{1}{4}$,$g_2(x)=-x$(图2)。

**分析** 经计算,$g_1(E(x))=x^4-\frac{1}{4}$,$g_2(E(x))=-x^2$,$f^{\mathrm{L}}(E(x))=x^4+x^2+1$,$f^{\mathrm{U}}(E(x))=x^4+3$。假设存在$(\overline{x},\overline{\boldsymbol{\mu}})\in X_E\times\mathbf{R}^2_+$为该问题的$E$-KKT点,则有:

$$\begin{cases}4\overline{x}^3+2\overline{x}^2+4\overline{x}^3+4\overline{\mu}_1\overline{x}^3-2\overline{\mu}_2\overline{x}=0,\\ \overline{\mu}_1\left(\overline{x}^4-\frac{1}{4}\right)=0=-\overline{\mu}_2\overline{x}^2。\end{cases}$$

不难得出$(0,0,\overline{\mu}_2)\in X_E\times\mathbf{R}^2_+$是优化问题$(\mathrm{IVOP}_{E_1})$的$E$-KKT点。且容易验证$A$是关于$\eta$的$E$-半连通集,$f$是$A$上关于$\eta$的$E$-半预不变凸且弱连续$E$-可微的区间值函数,$g_1$,$g_2$是关于同一$\eta$的$E$-半不变凸且$E$-可微的实值函数。即定理6的假设条件均满足,根据定理6可知$\overline{x}=0$是优化问题$(\mathrm{IVOP}_{E_1})$的一个type-Ⅰ最优解。这说明定理6是可行的。

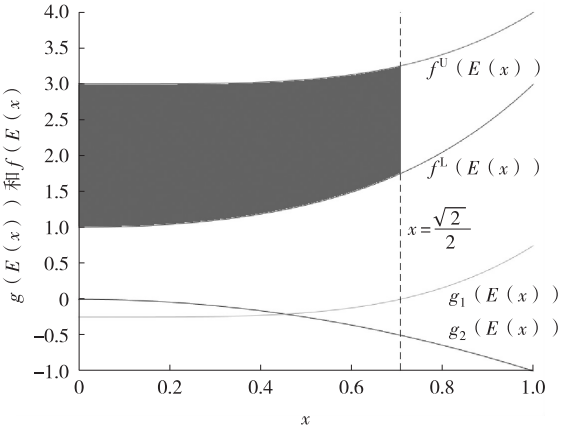


**图2 例3中目标函数图像与约束函数图像**

**Fig. 2 The objective function image and constraint function image in example 3**

## 4 总结与展望

本文提出了一类新的广义凸区间值函数——$E$-半预不变凸区间值函数,研究了它的一些有趣性质,它比最近文献例如文献[21,28]中的广义凸函数更为广泛。同时,在本文所定义的广义凸性条件下,获得了一类$E$-区间值规划的最优性必要和充分条件,其中目标函数和约束函数不一定是可微的。本文的研究结果丰富了广义凸性和区间值规划的研究,对不确定规划理论的发展有着积极的推动作用。另外,能否得到$E$-半预不变凸区间值规划的对偶结果,而$E$-半预不变凸区间值函数在区间值多目标规划、半无限区间值规划中的应用又将如何,这些都是非常有趣的课题,值得进一步研究。

**参考文献:**

[1] GRELL H,MARUHN K,RINOW W. Enzyklop adie der elementar mathematik,band I arithmetik,dritte au age[M]. Berlin:VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,1966:346.

[2] MOORE R E. Interval analysis[M]. Englewood Cliffs:Prentice-Hall,1966.

[3] MOORE R E. Methods and applications of interval analysis[M]. Philadelphia:SIAM,1979.

[4] WU H C. The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function[J]. European Journal of Operational Research,2007,176(1):46-59.

[5] WU H C. The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective functions[J]. European Journal of Operational Research,2009,196(1):49-60.

[6] WU H C. On interval-valued nonlinear programming problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2008,338(1):299-316.

[7] 张建科. 广义凸不确定规划的最优性与对偶性[D]. 西安：西安电子科技大学，2012.
ZHANG J K. Optimality and duality for generalized convex uncertain programming[D]. Xi'an：Xidian University，2012.

[8] GHOSH S，GHOSH D，PETRUŞEL A，et al. Generalized hukuhara weak subdifferential and its application on identifying optimality conditions for nonsmooth interval-valued functions[J]. Journal of Nonlinear and Variational Analysis，2024，8(2)：333-368.

[9] KUMAR G，YAO J C. Fréchet subdifferential calculus for interval-valued functions and its applications in nonsmooth interval optimization[J]. Journal of Nonlinear and Variational Analysis，2023，7(5)：811-837.

[10] ANSHIKA K K，GHOSH D. Generalized Hukuhara Dini Hadamard ε-subdifferential and $H_\varepsilon$-subgradient and their applications in interval optimization[J]. Journal of Applied Numerical Optimization，2024，6(2)：177-202.

[11] CHAUHAN R S，GHOSH D，ANSARI Q H. Generalized Hukuhara Hadamard derivative of interval-valued functions and its applications to interval optimization[J]. Soft Computing，2024，28(5)：4107-4123.

[12] PENG Z Y，DENG C Y，ZHAO Y，et al. Optimality conditions and duality for $E$-differentiable fractional multiobjective interval valued optimization problems with $E$-invexity[J]. Applied Set-Valued Analysis and Optimization，2024，6(3)：295-307.

[13] HANSON M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1981，80(2)：545-550.

[14] BEN-ISRAEL A，MOND B. What is invexity?[J]. The ANZIAM Journal，1986，28(1)：1-9.

[15] WEIR T，MOND B. Preinvex functions in multiple objective optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1988，136(1)：29-38.

[16] WEIR T，JEYAKUMAR V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society，1988，38(2)：177-189.

[17] YANG X Q，CHEN G Y. A class of nonconvex functions and pre-variational inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1992，169(2)：359-373.

[18] YOUNESS E A. $E$-convex sets，$E$-convex functions，and $E$-convex programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1999，102(2)：439-450.

[19] YANG X M. On $E$-convex sets，$E$-convex functions，and $E$-convex programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2001，109(3)：699-704.

[20] FULGA C，PREDA V. Nonlinear programming with $E$-preinvex and local $E$-preinvex functions[J]. European Journal of Operational Research，2009，192(3)：737-743.

[21] 彭再云，李科科，张石生. 向量 $D$-$\eta$-$E$-半预不变凸映射与向量优化[J]. 应用数学和力学，2014，35(9)：1020-1032.
PENG Z Y，LI K K，ZHANG S S. $D$-$\eta$-$E$-semipreinvex vector mappings and vector optimization[J]. Applied Mathematics and Mechanics，2014，35(9)：1020-1032.

[22] 杨新民，戎卫东. 广义凸性及其应用[M]. 北京：科学出版社，2016.
YANG X M，RONG W D. Generalized convexity and applications[M]. Beijing：Science Press，2016.

[23] 彭再云，秦南南，李科科. $G$-$E$-半预不变凸型多目标规划的 Wolfe 型对偶[J]. 应用数学学报，2015，38(6)：1103-1114.
PENG Z Y，QIN N N，LI K K. Wolf type duality of $G$-$E$-semipreinvex type multiobjective programming problems[J]. Acta Mathematics Applicatea Sinica，2015，38(6)：1103-1114.

[24] 彭再云，孙佳徽，李科科，等. 半严格-$G$-$E$-半预不变凸型函数及其在数学规划中的应用研究[J]. 应用数学和力学，2017，38(7)：827-836.
PENG Z Y，SUN J H，LI K K，et al. Study of semistrict-$G$-$E$-semipreinvex functions and applications in nonlinear programming[J]. Applied Matheatics and Mechanics，2017，38(7)：827-836.

[25] ABDULALEEM N. $E$-optimality conditions for $E$-differentiable $E$-invex multiobjective programming problems[J]. WSEAS Transactions on Mathematics，2019，18：14-27.

[26] ANTCZAK T，ABDULALEEM N. Optimality conditions for $E$-differentiable vector optimization problems with the multiple interval-valued objective function[J]. Journal of Industrial and Management Optimization，2020，16(6)：2971-2989.

[27] 彭志莹，彭再云，陈雪静，等. $\alpha$-$D$-半预不变凸映射与最优化[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2022，39(1)：9-18.
PENG Z Y，PENG Z Y，CHEN X J，et al. $\alpha$-$D$-semi-preinvex mappings and optimization[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2022，39(1)：9-18.

[28] 邓春艳，彭再云，陈雪静，等. $E$-预不变凸区间值函数及其在数学规划中的应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2021，38(1)：30-38.

DENG C Y, PENG Z Y, CHEN X J, et al. $E$-preinvex interval-valued function and its application in mathematical programming [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2021, 38(1): 30-38.

[29] 李慧云,叶国菊,刘尉,等. $CW$-$E$-对称可微区间值函数及其在广义凸区间值优化问题中的应用[J]. 湖北大学学报(自然科学版),2023,45(4):478-486.
LI H Y, YE G J, LIU W, et al. $CW$-$E$-symmetric differentiable interval-valued functions and its applications in generalized convex interval-valued optimization problems[J]. Journal of Hubei University (Natural Science), 2023, 45(4): 478-486.

[30] 彭健益,彭再云,邓春艳,等. $E$-$\alpha$-预不变凸区间值函数及最优性条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2024,41(2):7-15
PENG J Y, PENG Z Y, DENG C Y, et al. $E$-$\alpha$-preinvex interval valued function and optimization conditions[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2024, 41(2): 7-15.

[31] MOHAN S R, NEOGY S K. On invex sets and preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 189(3): 901-908.

[32] FARKAS J. Theorie der einfachen ungleichungen[J]. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Crelles Journal), 1902, 124: 1-27.

## Mathematical Programming and Optimality Theory

# $E$-Semi-Preinvex Interval Valued Functions and Interval Valued Programming

WEN Ming[1], PENG Zaiyun[1], TAN Xinyue[1], DENG Chunyan[1,2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074;
2. Software Engineering Institute, Pass College of Chongqing Technology and Business University, Chongqing 401520, China)

**Abstract**: Based on proposing the definition of $E$-semi-preinvex interval valued functions and discussing their properties, the optimality conditions for $E$-interval-valued programming with inequality constraints are investigated. The existence of $E$-semi-preinvex interval valued functions is verified through concrete examples, accompanied by several interesting characteristics of these functions. Under constraint qualification assumptions, sufficient and necessary optimality conditions for $E$-interval valued programming are rigorously derived. Results reveal the intrinsic relationship between $E$-semi-preinvex interval valued functions and $E$-semi-invex interval valued functions, establishing sufficient and necessary KKT optimality conditions for $E$-semi-preinvex interval valued programming. The research demonstrates the abundant existence of $E$-semi-preinvex interval valued functions and confirms their significance in interval valued optimization studies. The obtained conclusions enrich theoretical investigations in interval valued programming and related fields.

**Keywords**: $E$-semi-preinvex interval valued functions; $E$-interval valued programming; $E$-KKT optimality

(责任编辑 方 兴)