数学规划与最优性理论专题

DOI:10.11721/cqnuj20250212

一类广义不变凸多目标规划的最优性条件及对偶*

杨思琦[1,2]，李　飞[1]
(1. 内蒙古大学 数学科学学院，呼和浩特 010021；2. 呼伦贝尔学院 数理学院，内蒙古 海拉尔 021008)

摘要：讨论一类新的广义不变凸多目标规划问题的最优性条件和相应的对偶条件。借助 Clarke 次微分引入一类新的广义凸函数即广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数，研究对应不可微多目标规划问题和 G-Mond-Weir 对偶问题。得到了对应不可微多目标规划问题的最优性条件和 G-Mond-Weir 对偶问题的弱对偶、强对偶及严格逆对偶条件。对广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数的研究丰富了多目标规划的内容，对于后续问题在相关领域的研究具有重要意义。

关键词：广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数；Clarke 次梯度；多目标规划；最优性条件；对偶性
中图分类号：O221　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2025)02-0127-08

多目标规划作为最优化理论研究的一个重要分支，是指同时含有多个目标函数的最优化问题；在通常情况下，这些目标能够互相影响。多目标规划在诸如工业生产、博弈论、交通运输等众多领域都有着广泛的应用，受到了学者们的广泛关注。多目标规划问题主要在凸性的假设下进行求解，但在实际问题中，目标函数和约束函数却不一定是凸函数，所以如何进一步推广凸性是多目标规划研究中的一个热点问题。

1998 年，Kuk 等人[1]提出了向量值 $V\text{-}\rho$ 不变凸函数的概念，且证明了一类多目标规划问题的 K-K-T 充分最优性定理以及对偶定理。2009 年，Antczak[2]引入了不可微 $V\text{-}\rho$ 不变凸函数的概念，并证明了一类局部 Lipschitz 非凸不可微向量优化问题的最优性条件。后来，Antczak 在文献[3]中引入了标量可微的 G-凸函数，以此作为对文献[4]中不变凸定义的推广。随后，Antczak[5-6]将 G-不变凸函数的定义推广到可微向量值情形，并给出了对应多目标规划问题的最优性条件。2012 年，Peng 等人[7]定义了半-G-预不变凸函数，作为半预不变凸函数和 G-预不变凸函数的推广，并给出了半严格 G-预不变凸函数的相关性质和相应的最优性条件。随后，彭再云等人[8]主要研究了半严格-B，G-半预不变凸函数的性质与应用，通过所举例子来说明半严格-B，G-半预不变凸函数的存在性并得出相应最优性结果。2015 年，彭再云等人[9]又给出了一类半严格-G，E-半预不变凸函数的定义，建立了半严格-G，E-半预不变凸多目标规划的 Wolfe 型对偶，得出了它的弱对偶、强对偶及逆对偶定理。基于此，彭再云等人[10]还探究了半严格-G，E-半预不变凸函数在无约束和有约束非线性规划问题中的应用，获得了一系列最优性结论。2016 年，Antczak[11]引入了一类新的非可微 $G\text{-}V$ 不变凸函数，并给出了一类非可微多目标规划的最优性条件及它的对偶条件。2020 年，李向有等人[12]定义了$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数，并且推广了不可微多目标规划问题的对偶理论。此外，2006 年 Yuan 等人[13]给出了(C,α,ρ,d)函数的定义，随后 Mishra 等人[14-15]引入了广义(C,α,ρ,d)函数，并研究了非可微半无限多目标规划的对偶问题。2019 年，王雪峰等人[16]定义了(V,η)-I 型对称不变凸函数，并提出了若干个对偶问题。2021 年，苏紫洋等人[17]引入了一类带有支撑函数的广义型凸函数，并得出了一类多目标规划的最优性结果。有关向量值函数的广义凸性研究近些年来还得出了其他一些结论，参见文献[18-22]。

受文献[12,17]启发，本文提出一类新的广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数，并对相应多目标规划问题以及对偶问题进行了研究，得到了相应的最优性条件和对偶结果。

1　预备知识

设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间，对任何 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 定义：1) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i=y_i$，$i=1$，

* **收稿日期**：2023-11-07　**修回日期**：2024-08-16　**网络出版时间**：2025-05-07T07:18
资助项目：国家自然科学基金面上项目(No. 11601248)
第一作者简介：杨思琦，女，研究方向为最优化理论与方法，E-mail:936067384@qq.com；**通信作者简介**：李飞，男，副教授，博士，E-mail: lif@imu.edu.cn
网络出版地址：https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250506.1409.002

$2,\cdots,n;2)$ $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i>y_i,i=1,2,\cdots,n;3)$ $\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i\geqq y_i,i=1,\cdots,n;4)$ $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{y}$ 且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$。

本文考虑如下多目标规划问题(MVP):

$$\begin{aligned}&\min f(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid C_1),\cdots,f_k(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid C_k)),\\&\text{s.t. }(g_1(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid D_1),\cdots,g_m(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid D_m))\leqq 0,\\&\quad\boldsymbol{x}\in X。\end{aligned}$$

其中:X 为 $\mathbf{R}^n$ 上的非空开集,$f_i:X\to\mathbf{R},i\in K=\{1,\cdots,k\}$,$g_j:X\to\mathbf{R},j\in M=\{1,\cdots,m\}$,$f_i(\boldsymbol{x})$和 $g_j(\boldsymbol{x})$均为 X 上的局部 Lipschitz 函数,$C_i,D_j,i\in K,j\in M$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧凸集。

设 $X^0=\{\boldsymbol{x}\in X\mid g_j(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid D_j)\leqq 0,j\in M\}$为问题(MVP)的可行集。

令 $J(\boldsymbol{x}_0)=\{j\in M:g_j(\boldsymbol{x}_0)+s(\boldsymbol{x}_0\mid D_j)=0\}$,其中 $s(\boldsymbol{x}\mid C_i)$和 $s(\boldsymbol{x}\mid D_j)$表示在 X 上的支撑函数,它们的定义为:$s(\boldsymbol{x}\mid C_i)=\max\{\langle\boldsymbol{w}_i,\boldsymbol{x}\rangle\mid\boldsymbol{w}_i\in C_i,i\in K\}$,$s(\boldsymbol{x}\mid D_j)=\max\{\langle\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{x}\rangle\mid\boldsymbol{v}_j\in D_j,j\in M\}$。

定义 1[18] 设 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,若存在一个正数 K 和 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $N(\boldsymbol{x})$,对任意 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in N(\boldsymbol{x})$,使得 $\|f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{z})\|\leqslant K\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|$,则称实值函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处是局部 Lipschitz 的。

定义 2[18] 设 X 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集,函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 在 $\boldsymbol{x}\in X$ 上是局部 Lipschitz 连续的,若

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}\\ t\downarrow 0}}\sup\frac{f(\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{y})}{t}$$

存在,则称此极限为函数 f 在 $\boldsymbol{x}$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 Clarke 广义方向导数,记作:

$$f^{\circ}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d})=\lim_{\substack{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}\\ t\downarrow 0}}\sup\frac{f(\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{y})}{t}。$$

并记 f 在 $\boldsymbol{x}$ 处的 Clarke 广义次微分为$\partial f(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{\eta}\in\mathbf{R}^n\mid f^{\circ}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d})\geqslant\langle\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{d}\rangle,\boldsymbol{d}\in\mathbf{R}^n\}$。

定义 3[19] (弱有效解)设$\overline{\boldsymbol{x}}\in X^0$,如果不存在 $\boldsymbol{x}\in X^0$ 使得 $f(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid C_i)<f(\overline{\boldsymbol{x}})+s(\overline{\boldsymbol{x}}\mid C_i)$,则称$\overline{\boldsymbol{x}}$ 为问题(MVP)的弱有效解。

设 $X\subset\mathbf{R}^n,\boldsymbol{u}\in X$,令 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_k):X\to\mathbf{R}^k$,$I_{f_i}(X),i\in K$ 表示 f_i 的值域。下面给出广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数的定义。

定义 4 设 $f=(f_1,\cdots,f_k):X\to\mathbf{R}^k,i\in K,f_i$ 是定义在 X 上的局部 Lipschitz 连续函数。如果存在函数 $G_f=(G_{f_1},\cdots,G_{f_k}):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^k$,且每个 $G_{f_i}:I_{f_i}(X)\to\mathbf{R},i\in K$ 都是严格单调递增的可微实值函数,向量值函数 $\alpha=(\alpha_{f_1},\cdots,\alpha_{f_k}):X\times X\to\mathbf{R}^k,\alpha_i:X\times X\to\mathbf{R}_{++},i\in K,\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$ 和常数 $\rho_i\in\mathbf{R}^+$,$\forall\,\boldsymbol{x}\in X$,$\forall\,\boldsymbol{\xi}_i\in\partial f_i(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u}\in X,i\in K$ 满足关系式:

$$G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)-G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\geqq\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\rangle+\rho_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\|^2,$$

则称 $f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i$ 为在 $\boldsymbol{u}$ 处的广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数。

定义 5 设 $f=(f_1,\cdots,f_k):X\to\mathbf{R}^k,i\in K,f_i$ 是定义在 X 上的局部 Lipschitz 连续函数。如果存在函数 $G_f=(G_{f_1},\cdots,G_{f_k}):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^k$,且每个 $G_{f_i}:I_{f_i}(X)\to\mathbf{R},i\in K$ 都是严格单调递增的可微实值函数,向量值函数 $\alpha=(\alpha_{f_1},\cdots,\alpha_{f_k}):X\times X\to\mathbf{R}^k,\alpha_i:X\times X\to\mathbf{R}_{++},i\in K,\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$ 和常数 $\rho_i\in\mathbf{R}^+$,$\forall\,\boldsymbol{x}\in X$,$\forall\,\boldsymbol{\xi}_i\in\partial f_i(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u}\in X,i\in K$ 满足关系式:

$$G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)-G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)>\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\rangle+\rho_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\|^2,$$

则称 $f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i$ 为在 $\boldsymbol{u}$ 处的广义严格$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数。

定义 6 设 $f=(f_1,\cdots,f_k):X\to\mathbf{R}^k,i\in K,f_i$ 是定义在 X 上的局部 Lipschitz 连续函数。如果存在函数 $G_f=(G_{f_1},\cdots,G_{f_k}):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^k$,且每个 $G_{f_i}:I_{f_i}(X)\to\mathbf{R},i\in K$ 都是严格单调递增的可微实值函数,向量值函数 $\alpha=(\alpha_{f_1},\cdots,\alpha_{f_k}):X\times X\to\mathbf{R}^k,\alpha_i:X\times X\to\mathbf{R}_{++},i\in K,\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$ 和常数 $\rho_i\in\mathbf{R}^+$,$\forall\,\boldsymbol{x}\in X$,$\forall\,\boldsymbol{\xi}_i\in\partial f_i(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u}\in X,i\in K$ 满足关系式:

$$G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)-G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\leqq 0\Rightarrow\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\rangle+\rho_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\|^2<0,$$

则称 $f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i$ 为在 $\boldsymbol{u}$ 处的广义严格$(G\text{-}V,\rho)$不变拟凸函数。

定义 7 设 $f=(f_1,\cdots,f_k):X\to\mathbf{R}^k,i\in K,f_i$ 是定义在 X 上的局部 Lipschitz 连续函数。如果存在函数 $G_f=(G_{f_1},\cdots,G_{f_k}):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^k$,且每个 $G_{f_i}:I_{f_i}(X)\to\mathbf{R},i\in K$ 都是严格单调递增的可微实值函数,向量值函数 $\alpha=$

$(\alpha_{f_1},\cdots,\alpha_{f_k}):X\times X\to\mathbf{R}^k$，$\alpha_i:X\times X\to\mathbf{R}_{++}$，$i\in K$，$\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$ 和常数 $\rho_i\in\mathbf{R}^+$，$\forall\,\boldsymbol{x}\in X$，$\forall\,\boldsymbol{\xi}_i\in\partial f_i(\boldsymbol{u})$，$\boldsymbol{u}\in X$，$i\in K$ 满足关系式：

$\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\rangle+\rho_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\|^2\geqq0\Rightarrow G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)-G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)>0$，

则称 $f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i$ 为在 $\boldsymbol{u}$ 处的广义严格$(G\text{-}V,\rho)$不变伪凸函数。

注 1　当 $\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{0}$，则广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数退化为$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数。

注 2　当 $\rho_i=0$，$\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{0}$，则广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数退化为 $G\text{-}V$ 不变凸函数。

例 1　当 $X=\mathbf{R}$ 时，设 $f(x)=|x|$，$x\in\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$，取 $G_f(t)=2t$，$\alpha_f(x,u)=1$，$\eta(x,u)=x^2$，$\rho=1$，$w=-\frac{1}{2}$时，由次微分的定义得到$\partial f(0)=\{\xi\,|\,|x|\geqslant\xi x\}=[-1,1]$。

分情况讨论，当 $u=0$，$0\leqslant x<\frac{1}{2}$时，$G_f(f(x)+x^{\mathrm{T}}w)-G_f(f(u)+u^{\mathrm{T}}w)=2\left(|x|-\frac{1}{2}x\right)=x$；当 $u=0$，$-\frac{3}{2}<x\leqslant0$ 时，$G_f(f(x)+x^{\mathrm{T}}w)-G_f(f(u)+u^{\mathrm{T}}w)=2\left(|x|-\frac{1}{2}x\right)=-3x$。而

$$\alpha(x,u)G'_f(f(u)+u^{\mathrm{T}}w)\langle\xi+w,\eta(x,u)\rangle+\rho\|x-u\|^2=2\left(\xi-\frac{1}{2}\right)x^2+x^2=2\xi x^2,$$

均满足：

$$G_f(f(x)+x^{\mathrm{T}}w)-G_f(f(u)+u^{\mathrm{T}}w)\geqq\alpha(x,u)G'_f(f(u)+u^{\mathrm{T}}w)\langle\xi+w,\eta(x,u)\rangle+\rho\|x-u\|^2,$$

所以 $f(x)+x^{\mathrm{T}}w$ 在 $u=0$ 处是广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸的。

命题 1[18]　设函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在 $\overline{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^n$ 处是局部 Lipschitz 连续的且在 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 处达到(局部)最小值，则 $\boldsymbol{0}\in\partial f(\overline{\boldsymbol{x}})$。

命题 2[18]　设函数 $f_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$i\in I=\{1,\cdots,k\}$ 在 $\overline{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^n$ 处是局部 Lipschitz 连续的，则函数 $f(\boldsymbol{x}):=\max\limits_{i=1,\cdots,k}f_i(\boldsymbol{x})$ 也是在 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 处局部 Lipschitz 连续的，且 $\partial f(\overline{\boldsymbol{x}})\subset\operatorname{conv}\{\partial f_i(\overline{\boldsymbol{x}}):i\in I(\overline{\boldsymbol{x}})\}$，其中 $I(\overline{\boldsymbol{x}}):=\{i\in I:f(\overline{\boldsymbol{x}})=f_i(\overline{\boldsymbol{x}})\}$。

命题 3[18]　设函数 $h=(h_1,\cdots,h_m):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 处是局部 Lipschitz 连续的，$g:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ 在 $h(\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^m$ 处是局部 Lipschitz 连续的，则复合函数 $f=g\circ h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处也是局部 Lipschitz 连续的，且 $\partial f(\boldsymbol{x})\subset\operatorname{conv}\left\{\sum\limits_{i=1}^m\alpha_i\xi_i\,|\,\xi_i\in\partial h_i(\boldsymbol{x}),\alpha\in\partial g(h(\boldsymbol{x}))\right\}$。

2　最优性条件

首先给出弱有效解的必要条件。

定理 1　(必要条件)设 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 是问题(MVP)的弱有效解，并且假设存在严格单调递增的可微实值函数 G_{f_i}，$i\in K$ 和 G_{g_j}，$j\in M$，$G_{g_j}(0)=0$，$j\in M$ 且 $s(\overline{\boldsymbol{x}}\,|\,C_i)=\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i$，$s(\overline{\boldsymbol{x}}\,|\,D_j)=\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j$，则存在 $\overline{\boldsymbol{\lambda}}\in\mathbf{R}^k$ 和 $\overline{\boldsymbol{\mu}}\in\mathbf{R}^m$ 使得：

$$0\in\sum_{i=1}^k\overline{\lambda}_iG'_{f_i}(f_i(\overline{\boldsymbol{x}})+\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)(\partial f_i(\overline{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{w}_i)+\sum_{j=1}^m\overline{\mu}_jG'_{g_j}(g_j(\overline{\boldsymbol{x}})+\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)(\partial g_j(\overline{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{v}_j),\tag{1}$$

$$\overline{\mu}_j(g_j(\overline{\boldsymbol{x}})+\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)=0,\tag{2}$$

$$\overline{\boldsymbol{\lambda}}\geqslant0,\overline{\boldsymbol{\mu}}\geqq0。$$

证明　设 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 是问题(MVP)的弱有效解，定义如下函数：

$$H(\boldsymbol{x})=\max\{G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x})+s(\overline{\boldsymbol{x}}\,|\,C_i))-G_{f_i}(f_i(\overline{\boldsymbol{x}})+s(\overline{\boldsymbol{x}}\,|\,C_i)),G_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x})+s(\overline{\boldsymbol{x}}\,|\,D_j)):i\in K,j\in M\}。\tag{3}$$

先证明 $H(\boldsymbol{x})\geqq0$。若不然，则存在 $\widetilde{\boldsymbol{x}}\in X$ 使得：

$$H(\widetilde{\boldsymbol{x}})<0。\tag{4}$$

由式(3)可知：

$$G_{g_j}(g_j(\widetilde{\boldsymbol{x}})+s(\widetilde{\boldsymbol{x}}\,|\,D_j))<0,j\in M。$$

据假设 $G_{g_j}(0)=0$，$j\in J$，则 $G_{g_j}(g_j(\widetilde{\boldsymbol{x}})+s(\widetilde{\boldsymbol{x}}\,|\,D_j))<G_{g_j}(0)$，利用 G_{g_j} 的严格单调性，得到：

$$(g_j(\widetilde{\boldsymbol{x}})+s(\widetilde{\boldsymbol{x}}\,|\,D_j))<0,j\in M,$$

这表明$\tilde{x}$是问题(MVP)的可行解。根据式(4)可得:

$$G_{f_i}(f_i(\tilde{x})+s(\tilde{x}\mid C_i))<G_{f_i}(f_i(\overline{x})+s(\overline{x}\mid C_i)),i\in K,$$

从而有:

$$f_i(\tilde{x})+s(\tilde{x}\mid C_i)<f_i(\overline{x})+s(\overline{x}\mid C_i),i\in K。$$

这与$\overline{x}$是问题(MVP)的弱有效解矛盾,故$H(\boldsymbol{x})\geqq 0$。由于$\overline{x}$也是(MVP)的可行解,则$g_j(\overline{x})+s(\overline{x}\mid D_j)\leqq 0$,$j\in M$,又因$G_{g_j}(0)=0,j\in M$且$G_{g_j},j\in M$严格单调递增,则有:

$$G_{g_j}(g_j(\overline{x})+s(\overline{x}\mid D_j))<G_{g_j}(0)=0,j\in M。$$

再次根据式(3),得$H(\overline{x})=0$,则$H(\boldsymbol{x})$在$\overline{x}$处取得最小值,故$\mathbf{0}\in\partial H(\overline{x})$。利用命题2,可得$H(\boldsymbol{x})$在$\overline{x}$处是局部Lipschitz连续的,再根据命题3,有:

$$\partial(G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid C_i))-G_{f_i}(f_i(\overline{x})+s(\overline{x}\mid C_i)))=\partial(G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid C_i)))\subset$$

$$G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid C_i))(\partial f_i(\boldsymbol{x})+\partial s(\boldsymbol{x}\mid C_i)),i\in K,\tag{5}$$

$$\partial(G_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid D_j)))\subset G'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}\mid D_j))(\partial g_j(\boldsymbol{x})+\partial s(\boldsymbol{x}\mid D_j)),j\in M。\tag{6}$$

设$J_H(\overline{x})=\{j\in M\mid G_{g_j}(g_j(\overline{x})+s(\overline{x}\mid D_j))=0\}$,根据文献[22],由于$\partial s(\boldsymbol{x}\mid C_i)=\{\boldsymbol{w}_i\in C_i\mid\langle\boldsymbol{w}_i,\boldsymbol{x}\rangle=s(\boldsymbol{x}\mid C_i)\}$,因此有:

$$\partial s(\overline{x}\mid C_i)=\{\boldsymbol{w}_i\in C_i\mid\langle\boldsymbol{w}_i,\overline{x}\rangle=s(\overline{x}\mid C_i)\},\partial s(\overline{x}\mid D_j)=\{\boldsymbol{v}_j\in D_j\mid\langle\boldsymbol{v}_j,\overline{x}\rangle=s(\overline{x}\mid D_j)\}。$$

再通过命题2和式(5)、(6)可得:

$$\mathbf{0}\in\operatorname{conv}\{G'_{f_i}(f_i(\overline{x})+\overline{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)(\partial f_i(\overline{x})+\boldsymbol{w}_i),G'_{g_j}(g_j(\overline{x})+\overline{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)(\partial g_j(\overline{x})+\boldsymbol{v}_j):i\in K,j\in J_H(\overline{x})\}。$$

当$j\notin J_H(\overline{x})$时,令$\overline{\mu}_j=0$,可知式(1)成立。对于$j\in J_H(\overline{x})$,则$g_j(\overline{x})+s(\overline{x}\mid D_j)=0$,可知式(2)成立。如果$j\notin J_H(\overline{x})$,则$g_j(\overline{x})+s(\overline{x}\mid D_j)<0$,令$\overline{\mu}_j=0$,式(2)亦成立。 证毕

下面给出弱有效解的充分条件。

定理2 假设$\boldsymbol{x}_0\in X$是问题(MVP)的可行解,若满足:

1) $(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i,g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)$在$\boldsymbol{x}_0\in X$处是广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸的。

2) 存在$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)\geqslant 0$,$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)\geqq 0$,使下列条件成立:

a) $0\in\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)(\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{w}_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j G'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)(\partial g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{v}_j)$;

b) $\mu_j(g_j(\boldsymbol{x}_0)+x_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)=0$;

c) $s(\boldsymbol{x}_0\mid C_i)=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i,\boldsymbol{w}_i\in C_i,i\in K,s(\boldsymbol{x}_0\mid D_j)=x_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_j\in D_j,j\in M$。

则$\boldsymbol{x}_0$是问题(MVP)的弱有效解。

证明 反证法。如果$\boldsymbol{x}_0$不是问题(MVP)的弱有效解,则存在$\overline{x}\in X$使得:

$$f_i(\overline{x})+s(\overline{x}\mid C_i)<f_i(\boldsymbol{x}_0)+s(\boldsymbol{x}_0\mid C_i),$$

则有:

$$f_i(\overline{x})+\overline{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i\leqq f_i(\overline{x})+s(\overline{x}\mid C_i)<f_i(\boldsymbol{x}_0)+s(\boldsymbol{x}_0\mid C_i)=f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i。$$

由于G_{f_i}严格单调递增,则有:

$$G_{f_i}(f_i(\overline{x})+\overline{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)<G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)。$$

根据$f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i$在$\boldsymbol{x}_0\in X$处是广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸的,可以得到:

$$G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)-G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\geqq\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\rangle+\rho_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2,$$

在上式中,令$\boldsymbol{x}=\overline{x}$,可知:

$$\alpha_i(\overline{x},\boldsymbol{x}_0)G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\overline{x},\boldsymbol{x}_0)\rangle+\rho_i\|\overline{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2<0。$$

由于$\alpha_i(\overline{x},\boldsymbol{x}_0)>0$,则有:

$$G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\overline{x},\boldsymbol{x}_0)\rangle+\frac{\rho_i\|\overline{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2}{\alpha_i(\overline{x},\boldsymbol{x}_0)}<0。$$

上式两边同时乘以Lagrange乘子λ_i并求和后可得:

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\overline{x},\boldsymbol{x}_0)\rangle<-\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i\rho_i\|\overline{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2}{\alpha_i(\overline{x},\boldsymbol{x}_0)}。\tag{7}$$

已知 $g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 处是广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸的，根据定义 4，则存在 $\beta_j:X\times X\to\mathbf{R}_{++}$，$j\in M$，常数 $\bar{\rho}_j\in\mathbf{R}^+$，$\forall\,\boldsymbol{\zeta}_j\in\partial g_j(x_0)$，并得到：

$$G_{g_j}(g_j(\overline{\boldsymbol{x}})+\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)-G_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\geqq\beta_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)G'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\langle\boldsymbol{\zeta}_j+\boldsymbol{v}_j,\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\rangle+\bar{\rho}_j\|\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0\|^2,$$

当 $j\in J(\boldsymbol{x}_0)$时，$g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j=0$ 且 $G_{g_j}(0)=0$，故 $G_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)=0$，又因为$\overline{\boldsymbol{x}}\in X$ 为问题(MVP)的可行解，所以 $g_j(\overline{\boldsymbol{x}})+\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j\leqq0$。由于 G_{g_j} 是严格单调递增的，得到 $G_{g_j}(g_j(\overline{\boldsymbol{x}})+\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)<0$，于是有：

$$\beta_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)G'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\langle\boldsymbol{\zeta}_j+\boldsymbol{v}_j,\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\rangle+\bar{\rho}_j\|\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0\|^2\leqq0,$$

而 $\beta_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)>0$，所以有：

$$G'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\langle\boldsymbol{\zeta}_j+\boldsymbol{v}_j,\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\rangle+\frac{\bar{\rho}_j\|\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0\|^2}{\beta_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)}\leqq0。$$

当 $j\notin J(\boldsymbol{x}_0)$时，$\mu_j=0$。综合以上 2 种情形，上式两边同时乘以 Lagrange 乘子 μ_j 并求和后可得：

$$\sum_{j=1}^{m}\mu_jG'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\langle\boldsymbol{\zeta}_j+\boldsymbol{v}_j,\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\rangle\leqq-\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_j\bar{\rho}_j\|\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0\|^2}{\beta_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)}。\tag{8}$$

将式(7)和式(8)相加，有：

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\rangle+\sum_{j=1}^{m}\mu_jG'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\langle\boldsymbol{\zeta}_j+\boldsymbol{v}_j,\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)\rangle<$$
$$-\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i\rho_i\|\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0\|^2}{\alpha_i(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_j\bar{\rho}_j\|\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0\|^2}{\beta_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_0)}\leqq0,$$

这与定理 2 中条件 2)下的条件 a)矛盾，故定理 2 成立。　　证毕

将定理 2 中广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸性减弱为广义$(G\text{-}V,\rho)$不变拟凸性，可得对应弱有效解的充分条件。

定理 3　假设 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 是问题(MVP)的可行解，若满足：

1) $(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i,g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)$在 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 处是广义严格$(G\text{-}V,\rho)$不变拟凸的。

2) 存在$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)\geqslant0$，$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)\geqq0$，使下列条件成立：

a) $0\in\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)(\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{w}_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu_jG'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)(\partial g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{v}_j)$；

b) $\mu_j(g_j(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)=0$；

c) $s(\boldsymbol{x}_0\,|\,C_i)=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i,\boldsymbol{w}_i\in C_i,i\in K,s(\boldsymbol{x}_0\,|\,D_j)=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_j\in D_j,j\in M$。

则 $\boldsymbol{x}_0$ 是问题(MVP)的弱有效解。

定理 3 的证明过程与定理 2 类似，此处省略。

3　对偶问题

本节对问题(MVP)相应的 Mond-Weir 对偶问题(DVP)作如下定义：

$$\max f(\boldsymbol{y})=(f_1(\boldsymbol{y})+s(\boldsymbol{y}\,|\,C_1),\cdots,f_k(\boldsymbol{y})+s(\boldsymbol{y}\,|\,C_k)),$$
$$\text{s.t. }0\in\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)(\partial f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{w}_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu_jG'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)(\partial g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{v}_j),$$
$$\mu_j(g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\geqq0,j\in M,$$
$$\boldsymbol{\lambda}\geqslant0,\boldsymbol{\mu}\geqq0,$$

其中：$f_i:X\to\mathbf{R},i\in K=\{1,\cdots,k\}$，$g_j:X\to\mathbf{R},j\in M=\{1,\cdots,m\}$均为局部 Lipschitz 函数。令 $G=(G_1,\cdots,G_k):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^k$，且 $G_{f_i}:I_{f_i}(X)\to\mathbf{R},i\in K$ 是严格单调递增的，$G_{g_j},j\in M$ 是严格单调递增的且 $G_{g_j}(0)=0$。令 $\Omega=\Big\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}):0\in\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)(\partial f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{w}_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu_jG'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)(\partial g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{v}_j),\ \mu_j(g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\geqq0,j\in M,\boldsymbol{\lambda}\geqslant0,\boldsymbol{\mu}\geqq0\Big\}$表示问题(DVP)的可行域。

首先给出问题(DVP)的弱对偶条件。

定理 4　(弱对偶)设 $\boldsymbol{x}$ 和$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$分别为问题(MVP)和问题(DVP)的任意可行解，若 $f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i,g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j$ 均为在 $\boldsymbol{y}$ 处的广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数，且 $s(\boldsymbol{y}\,|\,C_i)=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i,i\in K,s(\boldsymbol{y}\,|\,D_j)=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j,j\in M$，则

$f(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}|C)\not<f(\boldsymbol{y})+s(\boldsymbol{y}|C)$。

证明 已知 $\boldsymbol{x}$ 和$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\mu)$分别为问题(MVP)和问题(DVP)的任意可行解,采用反证法。假设 $f(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}|C)<f(\boldsymbol{y})+s(\boldsymbol{y}|C)$,则 $f_i(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}|C_i)<f_i(\boldsymbol{y})+s(\boldsymbol{y}|C_i)$。又有 $s(\boldsymbol{y}|C_i)=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i$,$f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i\leqq f_i(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}|C_i)$,得到 $f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i<f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i$。由于 G_{f_i} 是单调递增函数,所以 $G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)<G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)$。由于 $f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i$ 在 $\boldsymbol{y}$ 处是广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸的,即:

$$G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)-G_{f_i}(f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\geqq\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle+\rho_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2,$$

所以有:

$$\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle+\rho_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2<0。$$

上式两边同时乘以 Lagrange 乘子 λ_i,有:

$$\lambda_i\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})G'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle+\lambda_i\rho_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\leqq0,$$

由于 $\lambda\geqslant0$,所以至少存在 1 个 $i_0\in K$,使得:

$$\lambda_{i_0}\alpha_{i_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})G'_{f_{i_0}}(f_{i_0}(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_{i_0})\langle\boldsymbol{\xi}_{i_0}+\boldsymbol{w}_{i_0},\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle+\lambda_{i_0}\rho_{i_0}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2<0,$$

于是有:

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle<-\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i\rho_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}{\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}。\tag{9}$$

而 $g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j$ 在 $\boldsymbol{y}$ 处是广义$(G\text{-}V,\rho)$不变凸的,即:

$$G_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)-G_{g_j}(g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\geqq\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})G'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\langle\boldsymbol{\zeta}_j+\boldsymbol{v}_j,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle+\bar{\rho}_j\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2,$$

同时 $\boldsymbol{x}$ 和$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$是问题(MVP)和问题(DVP)的可行解,故有:

$$G_{g_j}(g_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\leqq0,G_{g_j}(g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\geqq0,$$

所以有:

$$\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})G'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\langle\boldsymbol{\zeta}_j+\boldsymbol{v}_j,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle+\bar{\rho}_j\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\leqq0。$$

上式两边同时乘以 Lagrange 乘子 μ_j 并求和,得到:

$$\sum_{j=1}^{m}\mu_jG'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\langle\boldsymbol{\zeta}_j+\boldsymbol{v}_j,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle<-\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_j\bar{\rho}_j\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}{\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}。\tag{10}$$

将式(9)和式(10)相加,有:

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle+\sum_{j=1}^{m}\mu_jG'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\langle\boldsymbol{\zeta}_j+\boldsymbol{v}_j,\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle<$$
$$-\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i\rho_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}{\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_j\bar{\rho}_j\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}{\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\leqq0,$$

这与 $0\in\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG'_{f_i}(f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)(\partial f_i(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{w}_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu_jG'_{g_j}(g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)(\partial g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{v}_j)$ 矛盾,所以 $f(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x}|C)\not<f(\boldsymbol{y})+s(\boldsymbol{y}|C)$。 证毕

定理 5 (强对偶)设$\bar{\boldsymbol{y}}\in D$ 是问题(MVP)的弱有效解,则存在$\bar{\boldsymbol{\lambda}}\in\mathbf{R}^m,\bar{\boldsymbol{\mu}}\in\mathbf{R}^k$ 使得问题$(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{\lambda}},\bar{\boldsymbol{\mu}})$是(DVP)的可行解;进一步地,如果定理 4 的弱对偶条件成立,则$(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{\lambda}},\bar{\boldsymbol{\mu}})$是(DVP)的弱有效解。

证明 已知$\bar{\boldsymbol{y}}$ 是问题(MVP)的弱有效解,则:

$$0\in\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG'_{f_i}(f_i(\bar{\boldsymbol{y}})+\bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)(\partial f_i(\bar{\boldsymbol{y}})+\boldsymbol{w}_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu_jG'_{g_j}(g_j(\bar{\boldsymbol{y}})+\bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)(\partial g_j(\bar{\boldsymbol{y}})+\boldsymbol{v}_j),$$
$$\bar{\mu}_j(g_j(\bar{\boldsymbol{y}})+\bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)=0,j\in M,$$
$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}\geqslant0,\bar{\boldsymbol{\mu}}\geqq0。$$

从而$(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{\lambda}},\bar{\boldsymbol{\mu}})$是问题(DVP)的可行解。利用定理 4,可以得到 $f(\boldsymbol{y})+s(\boldsymbol{y}|C)\not<f(\bar{\boldsymbol{y}})+s(\bar{\boldsymbol{y}}|C)$。所以$(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{\lambda}},\bar{\boldsymbol{\mu}})$是问题(DVP)的弱有效解。 证毕

最后给出问题(DVP)的严格逆对偶条件。

定理 6 (严格逆对偶)设$\bar{\boldsymbol{x}}$ 和$(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{\lambda}},\bar{\boldsymbol{\mu}})$分别为问题(MVP)和问题(DVP)的可行解,满足 $f(\bar{\boldsymbol{x}})+s(\bar{\boldsymbol{x}}|C_i)=f(\bar{\boldsymbol{y}})+s(\bar{\boldsymbol{y}}|C_i)$,并且 $f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$ 为$\bar{\boldsymbol{y}}$ 处的关于 η 的广义严格$(G\text{-}V,\rho)$不变凸函数,$g(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$ 为$\bar{\boldsymbol{y}}$ 处关于 η

的(G-V,ρ)不变凸函数，则$\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{\boldsymbol{y}}$，因此$\overline{\boldsymbol{x}}$ 是问题(MVP)的弱有效解，($\overline{\boldsymbol{y}}$,$\overline{\boldsymbol{\lambda}}$,$\overline{\boldsymbol{\mu}}$)是问题(DVP)的弱有效解。

证明　已知$\overline{\boldsymbol{x}}$ 和($\overline{\boldsymbol{y}}$,$\overline{\boldsymbol{\lambda}}$,$\overline{\boldsymbol{\mu}}$)分别为问题(MVP)和问题(DVP)的可行解，用反证法证明，假设$\overline{\boldsymbol{x}}\neq\overline{\boldsymbol{y}}$。

由于 $f_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i$ 是$\overline{\boldsymbol{y}}$ 处的广义严格(G-V,ρ)不变凸函数，$g_j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j$ 是$\overline{\boldsymbol{y}}$ 处的广义(G-V,ρ)不变凸函数，则有：

$$G_{f_i}(f_i(\overline{\boldsymbol{x}})+\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)-G_{f_i}(f_i(\overline{\boldsymbol{y}})+\overline{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)>\alpha_i(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})G'_{f_i}(f_i(\overline{\boldsymbol{y}})+\overline{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})\rangle+\rho_i\|\overline{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2,$$

$$G_{g_j}(g_j(\overline{\boldsymbol{x}})+\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)-G_{g_j}(g_j(\overline{\boldsymbol{y}})+\overline{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\geqq\beta_j(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})G'_{g_j}(g_j(\overline{\boldsymbol{y}})+\overline{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\langle\boldsymbol{\zeta}_j+\boldsymbol{v}_j,\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})\rangle+\overline{\rho}_j\|\overline{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2,$$

又因 $f(\overline{\boldsymbol{x}})+s(\overline{\boldsymbol{x}}|C_i)=f(\overline{\boldsymbol{y}})+s(\overline{\boldsymbol{y}}|C_i)$，所以 $G_{f_i}(f_i(\overline{\boldsymbol{x}})+\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)=G_{f_i}(f_i(\overline{\boldsymbol{y}})+\overline{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)$。

利用问题(DVP)的约束条件和问题(MVP)的可行性可知：

$$\alpha_i(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})G'_{f_i}(f_i(\overline{\boldsymbol{y}})+\overline{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})\rangle+\rho_i\overline{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{y}}^2<0,\tag{11}$$

$$\beta_j(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})G'_{g_j}(g_j(\overline{\boldsymbol{y}})+\overline{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\langle\boldsymbol{\zeta}_j+\boldsymbol{v}_j,\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})\rangle+\overline{\rho}_j\overline{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{y}}^2\leqq0。\tag{12}$$

式(11)两边同时乘以 Lagrange 乘子 λ_i、式(12)两边同时乘以 Lagrange 乘子 μ_j，然后再相加，得到：

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G'_{f_i}(f_i(\overline{\boldsymbol{y}})+\overline{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_i)\langle\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{w}_i,\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})\rangle+\sum_{j=1}^{m}\mu_j G'_{g_j}(g_j(\overline{\boldsymbol{y}})+\overline{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j)\langle\boldsymbol{\zeta}_j+\boldsymbol{v}_j,\eta(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})\rangle<$$
$$-\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i\rho_i\|\overline{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2}{\alpha_i(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_j\overline{\rho}_j\|\overline{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2}{\beta_j(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})}\leqq0。\tag{13}$$

则可以证明式(13)与($\overline{\boldsymbol{y}}$,$\overline{\boldsymbol{\lambda}}$,$\overline{\boldsymbol{\mu}}$)是问题(DVP)的可行解相矛盾。因此$\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{\boldsymbol{y}}$。而由定理 4 可得$\overline{\boldsymbol{x}}$ 是问题(MVP)的弱有效解，($\overline{\boldsymbol{y}}$,$\overline{\boldsymbol{\lambda}}$,$\overline{\boldsymbol{\mu}}$)是问题(DVP)的弱有效解。　　证毕

参考文献：

[1] KUK H，LEE G M，KIM D S. Nonsmooth multiobjecive programs with V-ρ-invexity[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics，1998，29(4)：405-412.

[2] ANTCZAK T. Optimality and duality for nonsmooth multiobjective programming problems with V-r-invexiy[J]. Journal of Global Optimization，2009，45(2)：319-334.

[3] ANTCZAK T. New optimality conditions and duality results of G type in differentiable mathematical programming[J]. Nonlinear Analysis：Theroy，Methods & Applications，2007，66(7)：1617-1632.

[4] HANSON M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1981，80(2)：545-50.

[5] ANTCZAK T. On G-invex multiobjective programming. part Ⅰ. optimality[J]. Journal of Global Optimization，2009，43(1)：97-109.

[6] ANTCZAK T. On G-invex multiobjective programming. part Ⅱ. duality[J]. Journal of Global Optimization，2009，43(1)：111-140.

[7] PENG Z Y. Semistrict G-preinvexity and its application[J]. Journal of Inequalities and Applications，2012，2012：198.

[8] 彭再云，赵勇，黄应全. 半严格-(B,G)-半预不变凸函数的性质与应用研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2014，31(3)：1-6.
PENG Z Y，ZHAO Y，HUANG Y Q. Study of characteristics and applications on semistrictly semi-(B,G)-preinvex functions [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2014，31(3)：1-6.

[9] 彭再云，秦南南，李科科. G-E-半预不变凸型多目标规划的 Wolfe 型对偶[J]. 应用数学学报，2015，38(6)：1103-1114.
PENG Z Y，QIN N N，LI K K. Wolf type duality of G-E-semi-preinvex type multiobjective programming problems[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2015，38(6)：1103-1114.

[10] 彭再云，孙佳徽，李科科. 半严格-G-E-半预不变凸型函数及其在数学规划中的应用研究[J]. 应用数学和力学，2017，38(7)：827-836.
PENG Z Y，SUN J H，LI K K. Study of semistrict G-E-semipreinvex functions and applications in nonlinear programming[J]. Applied Matheatic and Mechanics，2017，38(7)：827-836.

[11] ANTCZAK T. Multiobjective programming under nondifferentiable G-V-invexity[J]. Filomat，2016，30(11)：2909-2923.

[12] 李向有，苗红梅. (G-V,ρ)不变凸多目标规划的对偶条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2020，37(1)：81-85.
LI X Y and MIAO H M. Duality conditions of nonsmooth semi-infinite multi-objective fractional programming [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2020，37(1)：81-85.

[13] YUAN D H，LIU X L，CHINCHULUUN A. Nondifferentiable minimax fractional programming problems with (C,α,ρ,d)-

convexity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2006,129(1):185-199.

[14] MISHRA S K,WANG S Y,LAI K K. Optimality and duality for a nonsmooth multiobjective optimization involving generalized type Ⅰ functions[J]. Mathematical Methods of Operations Research,2008,67(3):493-504.

[15] MISHRA S K,JAISWAL M,HOAI A L T. Optimality conditions and duality for nondifferentiable multiobjective semi-infinite programming problems with generalized (C,α,ρ,d)-convexity[J]. Journal of Systems Science and Complexity,2015,28(1):47-59.

[16] 王雪峰,王芮婕,高晓艳. (V,η)-I 型对称不变凸多目标规划的对偶性[J]. 山东大学学报(理学版),2019,54(4):116-126.
WANG X F,WANG R J,GAO X Y. Duality in multiobjective programming under (V,η)-type I symmetrical invexity[J]. Journal of Shandong University (Natural Science),2019,54(4):116-126.

[17] 苏紫洋,王荣波. 广义凸多目标规划的最优性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2021,46(11):1-7.
SU Z Y,WANG R B. On optimality of generalized convex multi-objective programming[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition),2021,46(11):1-7.

[18] CLARKE F H. Optimization and nonsmooth analyses[M]. New York:Wiley,1983.

[19] 林锉云,董加礼. 多目标优化的方法与理论[M]. 长春:吉林教育出版社,1992.
LIN C Y,DONG J L. Methods and theories of multiobjective optimization[M]. Changchun:Jilin Education Press,1992.

[20] KIM H J,SEO Y Y,KIM D S. Optimality conditions in nondifferentiable G-invex multiobjective programming[J]. Journal of Inequalities and Applications,2010,2010:172059.

[21] 赵洁. 一类不可微多目标规划的 Mond-Weir 型对偶[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2017,34(3):1-5.
ZHAO J. Mond-Weir duality for a class of nondifferentiable multiobjective programming[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2017,34(3):1-5.

[22] KIM D S,KIM S J,KIM M H. Optimality and duality for a class of nondifferentiable multiobjective fractional programming problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2006,129(1):131-146.

Mathematical Programming and Optimality Theory

Optimality Conditions and Duality for a Class of Generalized Invariant Convex Multi-Objective Programmings

YANG Siqi[1,2], LI Fei[1]

(1. School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021;
2. School of Mathematics and Physics, Hulunbuir University, Hailar Inner Mongolia 021008, China)

Abstract: To discuss the optimality and duality conditions for a class of generalized invariant convex multi-objective programming problems. A new class of generalized convex functions, namely generalized (G-V, ρ) invariant convex functions, is introduced with the help of Clarke subdifferential; the corresponding indifferentiable multi-objective programming problems and the G-Mond-Weir dual problems are studied. The optimality conditions for the indifferentiable multi-objective programming problems and the weak duality, strong duality and strict inverse duality for the G-Mond-Weir duality problem are obtained. The study on generalized (G-V, ρ) invariant convex functions enriches the content of multi-objective programmings, which is of great significance for the subsequent research in related fields.

Keywords: generalized (G-V, ρ) invariant convex functions; Clarke subgradient; multi-objective programming; optimality conditions; duality

(责任编辑 方 兴)