运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20250301

转包费用有限的串行分批加工流水作业排序问题*

陈荣军[1]，唐国春[2]

(1. 常州工学院 理学院，江苏 常州 213032；2. 上海第二工业大学 经济与管理学院，上海 201209)

摘要:研究工件既可以在制造商机器上加工、又可以转包给承包商加工的 m 台机流水作业排序问题。考虑工件在制造商机器上以串行分批方式加工，即工件按串行方式接连在机器上成批加工，批加工时间为该批中所有工件的工时之和，且加工后被分批运送给客户；同时，因部分工件被转包给承包商加工，还考虑制造商需要支付一定的转包费用。在转包总费用不超过给定值情况下，研究极小化工件加工成本与运输成本之和的有效算法。其中，加工成本分别取制造商处工件最大完工时间及工件总完工时间，运输成本则与工件批数成正比。对于工件加工时间仅依赖于工件的情形，针对不同的加工成本，分析了问题的 NP 困难性及最优解的结构，分别设计了 2 个近似算法；对于工件加工时间仅依赖于机器的情形，则在分析解结构的基础上提出了 2 个多项式时间算法。

关键词:流水作业排序；转包；串行分批；近似算法

中图分类号:O224　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2025)03-0017-07

流水作业(flow shop)是指 2 个或 2 个以上工件以相同且特定的机器次序在 2 台或 2 台以上机器上加工的排序问题，流水作业大多是 NP 困难的，只有少数特殊情形是多项式时间可解的。电子、机械等行业中制造商加工产品过程大都可以归结为流水作业模型。

随着社会生产高度发展，制造商因面临生产存储能力受限、快速响应需求增加以及加工任务的不确定性等因素的制约，常常将部分加工任务转包给承包商加工，这种转包(外包)业务在现代生产环节变得越来越重要与普遍。通过转包，制造商一方面可以减少基建成本，将资金用于核心技术研发；另一方面还可以缩短产品供货周期，提高市场响应能力，降低投资风险。然而，在执行转包时，制造商因要付出一定的转包、运输等费用，需要综合考虑工件转包、加工以及运输等环节，以实现自身收益最大化。因此，对流水作业环境下排序与转包问题进行研究具有重要的理论价值及现实意义。

近 10 年来，国内外学者对流水作业环境下排序与转包决策问题进行了深入研究，在围绕机器加工方式、工件参数、转包需求等方面取得了不少进展。Choi 等人[1]研究置换排序下 m 机流水作业排序与转包问题，假设工件加工长度为工件与机器参数值之和，分别极小化工件总完工时间或最大完工时间与转包费用和，在机器数固定情况下证明这 2 个问题均为多项式时间可解的；Li 等人[2]研究工件可以转包的两阶段流水作业排序问题，考虑了制造商机器维持费用和承包商转包费用，将这 2 个总费用及工件最大完工时间作为双目标排序问题，基于概念装箱设计了启发式算法；Yoo 等人[3]研究在第 1 台机器上工件可以被转包加工的两机流水作业排序问题，目标是极小化转包费用与工件完工时间和，提出了分枝定界算法和几个启发式算法；陈光亭等人[4]研究工件可转包的两机流水作业机排序问题，极小化工件最大完工时间与转包费用之和，给出了最坏性能比为 2 的近似算法，并对工件满足有序化约束的情形做了算法改进；Ahmadizar 等人[5]研究工件间歇性到达且可转包的两机流水作业排序问题，假设工件第 1 阶段操作一旦被转包给第 1 个承包商加工后，必须被分批运送到第 2 个承包商以加工第 2 阶段操作，并最终被运回制造商，目标是确定被转包工件集、全部工件的加工顺序以及被转包工件运输方案，以极小化工件最大完工时间、转包费用与运输费用之和，提出了 2 个数学规划模型；Goli 等人[6]研究了具有鲁棒性的流水作业排序问题，要求工件既可以在自有机器上加工、亦可以转包给几个可用的承包商之一加工，目标是极小化工件加权完工时间与转包费用之和，提出了具有鲁棒性的混合整数线性规划算法；陈荣军等人[7]研

* **收稿日期**:2024-04-12　**修回日期**:2025-01-19　**网络出版时间**:2025-05-15T17:12

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 71371120)；教育部人文社会科学研究青年基金项目(No. 23YJC790046)

第一作者简介:陈荣军，男，教授，博士，研究方向为排序理论及应用，E-mail: chenrjecust@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250515.1534.006

究工件可以转包的两机流水作业排序问题,假设转包费用有一个上限,目标是极小化未转包工件最大完工时间或总完工时间与转包费用之和,设计了拟多项式时间算法;Enayati等人[8]在柔性流水作业中考虑转包问题,目标是极小化延误、加工与转包费用之和,提出了混合线性规划模型并用4个启发式算法求解;Jiang等人[9]研究两机流水作业排序问题,每阶段操作既可以转包也可以自己加工,转包费用与加工时间成正比,目标是使工件最大完工时间与总转包费用之和最小,提出了具有紧性的多项式时间近似算法;Kim等人[10]考虑转包时间与转包费用的两机流水作业问题,假设在第1台机器上工件既可以在制造商处加工亦可以转包,而在第2台机器上工件必须在制造商处加工,目标是极小化转包与加工费用之和,证明问题是NP困难的,并设计了精确和启发式算法。最近还有不少学者引入智能优化算法研究流水作业排序与转包问题,本文不再赘述。

此外,关于流水作业排序问题,近些年出现了一些新的研究进展。Khatami等人[11]研究连续任务间具有精确延迟的流水作业排序问题,目标是极小化工件最大完工时间;Lan等人[12]考虑运输容量有限的两机流水作业排序问题,即工件在第1台机器加工后要被运送到第2台机器继续加工,或者工件2个阶段加工完成后要被运回目的地,仅1台车辆运输且容量有限,目标是极小化工件最大完工时间,设计了多项式时间算法与多项式时间近似方案;Shabtay等人[13]研究两机流水作业排序问题且任一阶段操作均可按一定费用被拒绝加工,目标是极小化工件最大完工时间与总拒绝费用之和;Zeng等人[14]研究集成生产、分配与分批发送的柔性装配流水作业排序问题,目标是极小化延误、存储与发送的费用之和,构造了混合整数线性规划模型求解,等等。因上述文献不考虑工件转包,故本文不再细述。

与上述文献不同的是,本文研究流水作业环境下的排序与转包模型,假设工件在制造商处的加工方式为串行分批加工,即工件按照串行方式接连在机器上成批加工,批的加工时间为该批中所有工件的工时之和,同时考虑工件加工后的运输成本,目标是在转包费用不超过给定值的情况下,极小化工件加工成本与运输成本之和。

1 模型与符号

假设 n 个工件的集合为 N,即 $N=\{1,2,\cdots,n\}$,要在制造商 m 台流水作业机器 $\{M_1,M_2,\cdots,M_m\}$ 上加工,加工方式为串行分批加工,即工件可以成批加工,同一批工件按串行方式接连加工(任一时刻每台机器至多加工1个工件),批的加工时间为批中所有工件的工时之和。同一批工件完工时间相同,均等于该批最后一个工件完工时间,本文假设每批加工工件数不限。

受生产能力、加工成本、存储容量以及工件工期等因素的影响,制造商常常需要把部分工件转包给承包商加工。设 e_j 为工件 j 的转包费用,并设 I 为未转包工件集,O 为转包工件集,显然 $I\cup O=N$。此外,工件 I 加工后将被分批运送给客户,设每批运输费用为 q。

将工件 $j(j\in N)$ 在机器 $M_i(i=1,2,\cdots,m)$ 上的操作及加工时间分别记为 O_{ij},p_{ij},并记 C_j 为工件 j 的完工时间,$C_{\max}(I)=\max\limits_{j\in I}C_j$。

制造商需要确定工件集 I,O 以及 I 在 $\{M_1,M_2,\cdots,M_m\}$ 上的分批加工排序,要求在转包费用不超过给定值情况下,使目标值 $G+bq$ 最小,其中 $G\in\left\{C_{\max}(I),\sum\limits_{j\in I}C_j\right\}$,$b$ 为工件批数。本文分别研究工件加工时间 $p_{ij}=p_j$ 以及 $p_{ij}=f_i$ 这2种情形,用三参数法 $\alpha|\beta|\gamma$[15]将研究的问题分别记为:

$$F_m\,|\,\text{out-serial batch},\sum_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=p_j\,|\,G+bq;$$

$$F_m\,|\,\text{out-serial batch},\sum_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=f_i\,|\,G+bq。$$

其中:F_m 代表制造商为 m 机流水作业加工环境,out代表工件可以被转包给承包商加工,serial batch代表工件在制造商机器上以串行分批方式加工,E 为转包费用上限。

2 问题 $F_m\,|\,\text{out-serial batch},\sum\limits_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=p_j\,|\,G+bq$

本节研究 $p_{ij}=p_j$ 情形,即工件加工时间仅依赖于工件的情形。由文献[16],易知下面引理1成立。

引理1 问题 $F_m\,|\,\text{out-serial batch},\sum\limits_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=p_j\,|\,G+bq$,$G\in\left\{C_{\max}(I),\sum\limits_{j\in I}C_j\right\}$ 是NP困难的。

首先考虑 $G=\sum_{j\in I}C_j$，并记 $p_{\max}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}p_j$，$P=\sum_{j=1}^{n}p_j$。

利用相邻工件交换技术，容易得到下面结论。

引理 2　问题 $F_m\,|\,\text{out-serial batch},\sum_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=p_j\,|\,\sum_{j\in I}C_j+bq$ 存在最优排序满足 I 中工件按照 $\{p_j\}_{j=1}^{n}$ 非减序加工。

由引理 2，将所有工件按照 $p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_n$ 重新编号，并考虑前 j 个工件 $\{1,2,\cdots,j\}$ 形成的部分排序，引入变量 x_j 如下：

$$x_j=\begin{cases}0,\text{若工件 } j \text{ 被转包；}\\1,\text{若工件 } j \text{ 在制造商处加工且形成新批；}\\2,\text{若工件 } j \text{ 在制造商处加入当前批加工，且该批尚未确定是否发送。}\end{cases}$$

在 Liu 等人[17]提出的全多项式时间近似方案(fully polynomial-time approximation scheme，FPTAS)算法 $\{A_\varepsilon,\varepsilon>0\}$ 中，令 $F_j(\boldsymbol{x})$ 为前 j 个工件对应部分排序的目标值，但不含当前批(尚未发送)工件对目标的贡献值，$M_j(\boldsymbol{x})$ 为当前部分排序的工件最大完工时间，$K_j(\boldsymbol{x})$ 为当前批(尚未发送)工件系数之和。本文将 $M_j(\boldsymbol{x})$，$K_j(\boldsymbol{x})$ 分别修正为：

$$M_j(\boldsymbol{x})=\begin{cases}M_{j-1}(\boldsymbol{x})+mp_j-(m-1)p_{j-1},\text{若 } x_j\neq 0；\\M_{j-1}(\boldsymbol{x}),\text{否则。}\end{cases}$$

$$K_j(\boldsymbol{x})=\begin{cases}K_{j-1}(\boldsymbol{x}),\text{若 } x_j=0；\\K_{j-1}(\boldsymbol{x})+1,\text{若 } x_j=2；\\1,\text{若 } x_j=1。\end{cases}$$

其中：$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})$ 且置 $x_{n+1}\equiv 1$，其余不变，则该算法 $\{A_\varepsilon,\varepsilon>0\}$ 可以转化为求解：

$$F_m\,|\,\text{out-serial batch},\sum_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=p_j\,|\,\sum_{j\in I}C_j+bq,$$

且类似地有下面结论。

定理 1　对问题 $F_m\,|\,\text{out-serial batch},\sum_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=p_j\,|\,\sum_{j\in I}C_j+bq$，算法 $\{A_\varepsilon,\varepsilon>0\}$[17]为问题的 $(1+\varepsilon)$ 近似算法，运行时间为：

$$O\left(\frac{n^4\log(n)\log(n^2p_{\max})\log\left(\max\left\{n,\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right)}{\varepsilon^2}\right)。$$

证明　与文献[17]中定理 2.6 的证明过程类似，有：

$$\gamma_F\leqslant\frac{\log(\max\{F_j(\boldsymbol{x})\,|\,\boldsymbol{x}\in Y'_{j-1}\})}{\delta}+2,$$

其中：Y'_{j-1} 为算法 $\{A_\varepsilon,\varepsilon>0\}$ 运行中产生的关于 x 的集合，γ_F 为依函数 $F_{j-1}(x)$ 的值对 Y'_{j-1} 划分所得子集数[18](下同)。又因为：

$$|F_j(\boldsymbol{x})|=|F_{j-1}(\boldsymbol{x})+M_{j-1}(\boldsymbol{x})K_{j-1}(\boldsymbol{x})+q|\leqslant n[(n-1)p_{\max}+mp_{\max}+nq],$$

故有：

$$\gamma_F\leqslant\frac{\log(n^2p_{\max}+nmp_{\max}+nq)}{\delta}+2\leqslant\frac{\log(3n^2p_{\max})}{\delta}+2。$$

类似地，

$$\gamma_K\leqslant\frac{\log(\max\{K_j(\boldsymbol{x})\,|\,x\in Y'_{j-1}\})}{\delta}+2\leqslant\frac{\log(n)}{\delta}+2,$$

故有：

$$|Y'_j|=3|Y_{j-1}|\leqslant 3n\gamma_F\gamma_K=O\left(\frac{n^4\log(n)\log(n^2p_{\max})\log\left(\max\left\{n,\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right)}{\varepsilon^2}\right)。$$

证毕

下面研究 $G=C_{\max}(I)$。考虑到排序目标为 $C_{\max}$ 且 $p_{ij}=p_j$,将工件按照$\{p_j\}_{j=1}^n$ 非减序重新编号,令 $\varphi(j,t,h,b)$为当前部分工件集$\{1,2,\cdots,j\}$对应的最小转包费用,其中 h 为未转包工件数,t 为当前未转包工件的最大完工时间,b 为分批数。显然 $1\leqslant j\leqslant n,0\leqslant h\leqslant j,0\leqslant t\leqslant P,1\leqslant b\leqslant n$。

下面设计问题 $F_m|\text{out-serial batch},\sum_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=p_j|C_{\max}(I)+bq$ 的动态规划算法,记为 DP-1。

DP-1 问题 $F_m|\text{out-serial batch},\sum_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=p_j|C_{\max}(I)+bq$ 的动态规划算法

递推关系:

$$\varphi(j,t,h,b)=\begin{cases}\varphi(j-1,t,h,b)+e_j,\text{若工件 } j \text{ 被转包;}\\ \varphi(j-1,t-p_j,h-1,b-1),\text{若工件 } j \text{ 形成新批;}\\ \varphi(j-1,t-p_j,h-1,b),\text{若工件 } j \text{ 加入当前批,且该批尚未发送。}\end{cases}$$

在上式中,当一个新批形成时,不考虑安装时间。初始条件为:

$$\varphi(1,t,h,b)=\begin{cases}e_1,\text{若 } t=0,h=0,b=0;\\ 0,\text{若 } t=p_1,h=1,b=1;\\ +\infty,\text{否则。}\end{cases}$$

最优值为 $\min\{t+bq\mid 0\leqslant t\leqslant P,0\leqslant h\leqslant n,1\leqslant b\leqslant n,\varphi(n,t,h,b)\leqslant E\}$。

对 DP-1,有下面结论。

定理 2 对问题 $F_m|\text{out-serial batch},\sum_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=p_j|C_{\max}(I)+bq$,DP-1 可在 $O(n^3P)$时间内找到最优解。

下面利用 DP-1,为问题 $F_m|\text{out-serial batch},\sum_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=p_j|C_{\max}(I)+bq$ 设计 FPTAS 算法,记为 A-1。

A-1 问题 $F_m|\text{out-serial batch},\sum_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=p_j|C_{\max}(I)+bq$ 的 FPTAS 算法

1) 将工件按照$\{p_j\}_{j=1}^n$ 非减序重新编号;

2) $\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$,构造子问题 I_k:工件集 $I_k(I_k=\{1,2,\cdots,k\})$满足 $E-\sum_{N\setminus I_k}e_j>0$,且将 I_k 在制造商机器上加工而其他工件转包;

3) 构造子问题 I'_k:$\forall j\in I_k,p'_j=\left|\dfrac{p_j}{\delta_k}\right|\delta_k$,其余与 I_k 相同,其中 $\delta_k=\dfrac{\varepsilon p_k}{n}$,$\varepsilon>0$;

4) 调用 DP-1 得到 I'_k 最优解,记 π'_k;在 π'_k 中将 p'_j 用 p_j 替换,得到 I_k 可行解 π_k;

5) 选取 π_l,满足:

$$C_{\max}(\pi_l)+bq(\pi_l)=\min\{C_{\max}(\pi_k)+bq(\pi_k)\mid k=1,2,\cdots,n\}。$$

定理 3 对问题 $F_m|\text{out-serial batch},\sum_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=p_j|C_{\max}(I)+bq$,A-1 是一个 FPTAS 算法,且运行时间为 $O\left(\dfrac{n^5}{\varepsilon}\right)$。

证明 记 π^* 为原问题最优解,并设 J_t 为最长加工工件,对应地,问题 I_k 即记为 I_t。显然,π^* 可以视作问题 I_t 一可行解 π_t^*。将 π_t^* 中工件长度 p_j 换为 p'_j,可以得到 I'_t 的一可行解 π'^*_t,有:

$$\begin{aligned}&C_{\max}(\pi_l)+bq(\pi_l)\leqslant C_{\max}(\pi_t)+bq(\pi_t)\leqslant C_{\max}(\pi'_t)+bq(\pi_t)\leqslant C_{\max}(\pi'^*_t)+bq(\pi_t^*)\leqslant\\ &C_{\max}(\pi^*)+n\delta_t+bq(\pi_t^*)\leqslant C_{\max}(\pi^*)+\varepsilon p_t+bq(\pi_t^*)\leqslant(1+\varepsilon)C_{\max}(\pi^*)+bq(\pi^*)。\end{aligned}$$

此外,在算法 A-1 中,步 1)需要运行时间 $O(n\log(n))$,DP-1 求解子问题需要运行时间为 $O\left(\dfrac{n^4}{\varepsilon}\right)$,故总运算时间为 $O\left(\dfrac{n^5}{\varepsilon}\right)$。 证毕

3 问题 $F_m|\text{out-serial batch},\sum_{j\in O}e_j\leqslant E,p_{ij}=f_i|G+bq$

本节研究 $p_{ij}=f_i$,即工件加工时间仅依赖于机器的情形,并记 $f_{\max}=\max_{1\leqslant i\leqslant m}f_i$。由于所有工件具有相同的加

工时间，故对问题 $F_m \mid p_{ij}=f_i \mid G, G\in\left\{C_{\max}, \sum\limits_{j\in I} C_j\right\}$ 而言，若依次安排工件加工并避免不必要的空闲，则有下面结论。

引理 3　对问题 $F_m \mid p_{ij}=f_i \mid G, G\in\left\{C_{\max}, \sum\limits_{j\in I} C_j\right\}$，若依次安排工件加工并避免不必要空闲，则第 j 个工件完工时间为 $C_j=\sum\limits_{i=1}^{m} f_i+(j-1)f_{\max}, j\in N$。

证明　由于工件加工时间 $p_{ij}=f_i$ 仅依赖于机器，即在同一台机器上，所有工件加工时间都相同，故将工件 $\{j, j=1,2,\cdots,n\}$ 依次安排在 m 台机器上加工且避免不必要的空闲，所得排序结构单一，全部工件完工时间应满足等差数列关系。显然 $C_1=\sum\limits_{i=1}^{m} f_i$，下面仅证明 $C_2=\sum\limits_{i=1}^{m} f_i+f_{\max}$。

事实上，根据工件与机器的对偶关系[19]，将工件 1、2 视为 2 台流水作业机器，机器 $M_1, M_2, \cdots, M_m$ 视为 m 个工件，它们在 2 台机器上加工长度相同，分别为 $f_1, f_2, \cdots, f_m$。在第 1 台机器“1”上，m 个工件一定在时间区间 $\left[0, \sum\limits_{i=1}^{m} f_i\right]$ 内完成加工且无空闲。若：

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_m, \tag{1}$$

则在第 2 台机器“2”上，m 个工件一定在时间区间 $\left[0, \sum\limits_{i=1}^{m} f_i+f_{\max}\right]$ 内完成加工，且仅在时间区间$[0, f_{\max}]$内有空闲(相应排序记 S)。如果$\{f_i\}_{i=1}^{m}$ 不满足式(1)，所得排序一定可以通过多次调换 S 中相邻工件获得。注意到每次调换相邻工件时，若前工件开工时间提前(延后)δ，则后工件开工时间必延后(提前)δ，机器“2”上空闲时间长度始终保持不变。这样，无论调换多少次，对于机器“1”而言，m 个工件均在 $\left[0, \sum\limits_{i=1}^{m} f_i\right]$ 内完工且无空闲；对于机器“2”而言，m 个工件一定在 $\left[0, \sum\limits_{i=1}^{m} f_i+f_{\max}\right]$ 内完工，空闲总长为 $f_{\max}$，即得：

$$C_2=\sum_{i=1}^{m} f_i+f_{\max}。$$

证毕

由引理 3，容易设计问题 $F_m \mid \text{out-serial batch}, \sum\limits_{j\in O} e_j \leqslant E, p_{ij}=f_i \mid C_{\max}+bq$ 的多项式时间算法，记为 A-2。

A-2　问题 $F_m \mid \text{out-serial batch}, \sum\limits_{j\in O} e_j \leqslant E, p_{ij}=f_i \mid C_{\max}+bq$ 的多项式时间算法

1) 将工件按照$\{e_j\}_{j=1}^{n}$ 非减序重新编号；

2) 选取 t 满足 $\sum\limits_{j=1}^{t} e_j \leqslant E, \sum\limits_{j=1}^{t+1} e_j > E$；

3) 将工件$\{t+1, \cdots, n\}$依次在流水作业机器上加工，避免不必要的空闲并同批发送。

显然，有下面的定理。

定理 4　对问题 $F_m \mid \text{out-serial batch}, \sum\limits_{j\in O} e_j \leqslant E, p_{ij}=f_i \mid C_{\max}+bq$，算法 A-2 可在 $O(n\log(n))$时间内得到最优解。

对问题 $F_m \mid \text{out-serial batch}, \sum\limits_{j\in O} e_j \leqslant E, p_{ij}=f_i \mid \sum\limits_{j\in I} C_j+bq$，下面设计动态规划算法(记为 DP-2)求解。先将工件集 N 按$\{e_j\}_{j=1}^{n}$ 非降序重新编号，并考虑由工件集 B_j $(B_j=\{1,2,\cdots,j\})$确定的部分排序，选择(j, h, h')作为状态变量，其中 h 为最后一批工件数，h'为该批含 B_j 的工件数。定义指标函数 $\psi(j, h, h')$为在状态(j, h, h')下部分排序的最优目标值，但不包含当前尚未发送的批的运输费用。

DP-2　问题 $F_m \mid \text{out-serial batch}, \sum\limits_{j\in O} e_j \leqslant E, p_{ij}=f_i \mid \sum\limits_{j\in I} C_j+bq$ 的动态规划算法

递推关系：

$$\psi(j, h, h')=\begin{cases}\psi(j-1, h, h'-1)+(h'+j-2)f_{\max}+\sum\limits_{i=1}^{m} f_i，若\ h'>1； \\ \min\limits_{h''\leqslant j-1}\psi(j-1, h'', h'')+q+(j-1)f_{\max}+\sum\limits_{i=1}^{m} f_i，若\ h'=1。\end{cases}$$

其中:h''为上一批所含 B_j 的工件数。初始条件为:

$$\psi(1,h,h')=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} f_i, 若\ h>h'=1;\\ \sum_{i=1}^{m} f_i+q, 若\ h=h'=1;\\ +\infty, 其他。\end{cases}$$

最优值为 $\min\{\psi(n,h,h)\mid 1\leqslant h\leqslant n\}$。

显然,DP-2 的计算量为 $O(n^3)$。下面利用 DP-2 设计问题

$$F_m\mid \text{out-serial batch}, \sum_{j\in O} e_j\leqslant E, p_{ij}=f_i\mid \sum_{j\in I} C_j+bq$$

的多项式时间算法,记为 A-3。

A-3 问题 $F_m\mid \text{out-serial batch}, \sum_{j\in O} e_j\leqslant E, p_{ij}=f_i\mid \sum_{j\in I} C_j+bq$ 多项式时间算法

1) 同算法 A-2 步 1);

2) 同算法 A-2 步 2);

3) 调用 DP-2,将工件$\{t+1,\cdots,n\}$依一定次序安排在流水作业机器上分批加工与发送,并避免不必要的空闲。

显然,有下面定理 5。

定理 5 对问题 $F_m\mid \text{out-serial batch}, \sum_{j\in O} e_j\leqslant E, p_{ij}=f_i\mid \sum_{j\in I} C_j+bq$,算法 A-3 可在 $O(n^3)$时间内得到最优解。

4 结束语

本文研究了制造商为串行分批加工流水作业排序问题,允许工件转包给承包商加工。在转包费用不超过给定值情况下,分别极小化工件最大完工时间或总完工时间与运输费用之和。本文分别研究了工件加工时间仅依赖于工件以及仅依赖于机器的 2 种特殊情形,设计了近似算法和多项式时间算法。对于工件加工时间为一般情形下的流水排序与转包问题,值得今后继续研究。

参考文献:

[1] CHOI B C, PARK M J. Outsourcing decisions in m-machine permutation flow shop scheduling problems with machine-dependent processing times[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research,2014,31(4):1450028.

[2] LI L,LUAN J Z,QIU Y C. Two-stage flowshop scheduling with outsourcing allowed[J]. International Journal of u- and e-Service,Science and Technology,2016,9(10):245-254.

[3] YOO J,LEE I S. Minimizing total completion times in a two-machine flowshop scheduling with outsourcing strategy allowed [J]. Korean Management Science Review,2016,33(2):1-10.

[4] 陈光亭,陈蕾,张安,等. 可转包两台流水作业机排序的近似算法[J]. 运筹学学报,2016,20(4):109-114.
CHEN G T,CHEN L,ZHANG A,et al. Approximation algorithms for two-machine flow shop scheduling with an outsourcing option[J]. Operations Research Transactions,2016,20(4):109-114.

[5] AHMADIZAR F, AMIRI Z. Outsourcing and scheduling for a two-machine flow shop with release times[J]. Engineering Optimization,2018,50(3):483-498.

[6] GOLI A,SOLTANI M. A robust just-in-time flow shop scheduling problem with outsourcing option on subcontractors[J]. Production & Manufacturing Research,2019,7(1):294-315.

[7] 陈荣军,唐国春. 转包费用有限的两机流水作业排序问题[J]. 系统科学与数学,2019,39(9):1462-1470.
CHEN R J,TANG G C. Two-machine flow shop scheduling with limited cost of outsourcing[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences,2019,39(9):1462-1470.

[8] ENAYATI M, ASADI-GANGRAJ E, PAYDAR M M. Scheduling on flexible flow shop with cost-related objective function considering outsourcing options [J]. Journal of Optimization in Industrial Engineering,2021,14(2):53-72.

[9] JIANG X J, ZHANG A, CHEN Y, et al. An improved algorithm for a two-stage production scheduling problem with an

outsourcing option[J]. Theoretical Computer Science,2021,876:59-69.

[10] KIM E S,LEE I S. Scheduling of two-machine flowshop with outsourcing lead-time[J]. Computers & Operations Research, 2022,145:105864.

[11] KHATAMI M,SALEHIPOUR A,CHENG T C E. Flow-shop scheduling with exact delays to minimize makespan[J]. Computers & Industrial Engineering,2023,183:109456.

[12] LAN Y,YUAN Y,WANG Y L,et al. Flow shop scheduling problems with transportation constraints revisited[J]. Theoretical Computer Science,2024,985:114349.

[13] SHABTAY D,GERSTL E. Coordinating scheduling and rejection decisions in a two-machine flow shop scheduling problem[J]. European Journal of Operational Research,2024,316(3):887-898.

[14] ZENG C F,LIU J J,LI Q S. A constraint programming approach for resource-constrained flexible assembly flow shop scheduling problem with batch direct delivery[J]. Computers & Operations Research,2025,173:106855.

[15] GRAHAM R L,LAWLER E L,LENSTRA J K,et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling:a survey[J]. Annals of Discrete Mathematics,1979,5:287-326.

[16] SHABTAY D,ORON D. Proportionate flow-shop scheduling with rejection[J]. Journal of the Operational Research Society, 2016,67(5):752-769.

[17] LIU S C,WU C C. A faster FPTAS for a supply chain scheduling problem to minimize holding costs with outsourcing[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research,2016,33(5):1650039.

[18] KOVALYOV M Y KUBIAK W. A fully polynomial approximation scheme for minimizing makespan of deteriorating jobs[J]. Journal of Heuristics,1998,3(4):287-297.

[19] 唐国春,陈荣军,张峰. 排序论中工件和机器的对偶性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2013,30(5):1-4.
TANG G C,CHEN R J,ZHANG F. The duality of jobs and machines in scheduling[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2013,30(5):1-4.

Operations Research and Cybernetics

Serial Batch Flow Shop Scheduling with Limited Outsourcing Costs

CHEN Rongjun[1], TANG Guochun[2]

(1. School of Sciences, Changzhou Institute of Technology, Changzhou Jiangsu 213032;
2. School of Economics & Management, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209, China)

Abstract: Flow shop scheduling where each job can be either processed in-house shop or outsourced to a subcontractor is studied. The jobs in-house are processed in serial batches, i.e., the jobs are processed in batches on the machine in a serial manner and the processing time of a batch is the sum of the processing times of all jobs in the batch. And all the jobs are shipped to customers in batches after processing. Each of the outsourced jobs requires paying an outsourcing cost. The objective is to minimize the sum of the performance measure (the total completion time or the makespan) and transportation cost for in-house jobs, subject to a limit on total outsourcing cost. The transportation cost is proportional to the batch number of jobs. Two special cases where job's processing time depends solely on job itself or on the machine are considered. In the first case, two approximation algorithms are designed respectively for different performance measures after the NP hardness of the problem and the structure of the optimal solution are analyzed. On the basis of analyzing the solution structure, two polynomial algorithms are proposed in the second case.

Keywords: flow shop scheduling; outsourcing; serial batch; approximation algorithm

(责任编辑　黄　颖)