

## 非光滑填充函数法的一个注记\*

陈 乔

(重庆师范大学 编辑出版中心, 重庆 401331)

**摘要:** 对非光滑优化问题的填充函数法进行讨论。基于函数下降(上升)段的概念, 提出2个新的关于函数下降(上升)段的性质, 进而利用新性质对一类具有特殊结构的非光滑填充函数进行研究。将已有文献中所提的双参填充函数推广到了非光滑优化问题, 使它适用于具有特殊结构特征的优化问题。所得的主要结果是对现有研究工作的改进和推广。

**关键词:** 全局优化; 全局极小点; 局部极小点; 填充函数算法; 非光滑优化

**中图分类号:** O224

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-6693(2025)03-0024-06

随着信息技术特别是大数据技术的飞速发展, 全局优化方法已成为多学科研究中的关键技术手段。目前, 全局优化方法已广泛地应用于分子生物<sup>[1-2]</sup>、金融经济<sup>[3]</sup>、生产管理<sup>[4]</sup>、工业制造<sup>[5-6]</sup>等领域。然而, 多个局部最优解的存在导致传统非线性优化技术在非凸/非光滑问题的全局优化中面临根本性挑战, 主要表现在以下2个方面:

- 1) 如何判定当前局部极小点的全局最优性——即建立全局最优解的判别准则;
- 2) 如何基于现有局部极小点, 进一步探索目标函数值更优的极小点。

对于上述第1个问题涉及的全局优化理论及算法体系而言, 它的成熟度与局部优化方法相比仍存在明显差距。针对特定结构的优化问题, 关于全局最优性判别准则的研究已取得重要突破; 然而对于一般结构的优化问题, 全局最优性理论体系则还不完善, 建立普适性的全局极值判定准则仍需深入探索。针对第2个问题, 有多种全局优化方法如进化算法、分支定界法、积分-水平集法等可供采用。总体而言, 全局优化方法可分为随机性方法与确定性方法。随机性方法通过概率搜索机制实现全局优化: 从当前点出发, 采用随机扰动生成迭代点, 并以此为初始点, 通过局部优化工具获取新的局部极小点; 通过迭代更新和概率收敛机制, 最终逼近全局最优解<sup>[7-8]</sup>。随机类方法因对目标函数的解析性质要求较低, 因而具有更广的适用性。尽管这类方法具有一定实用性, 但仍存在收敛速度慢、易陷入局部优化等固有缺陷<sup>[9]</sup>。虽然随机性方法理论上确保了在给定计算时间内获得最优解, 但实际计算中往往需要耗费大量时间才能求得最优解。相比之下, 确定性方法能够基于目标函数的解析特性(如单调性、凸性、稠密性及水平集结构), 在有限次迭代内以预设精度收敛至全局最优解或近似解。常见的确定性方法有填充函数法<sup>[10-11]</sup>、区间算法<sup>[12]</sup>、打洞函数法<sup>[13]</sup>等。

在各类确定性方法中, 填充函数法因实现简便而成为应用较为广泛的方法。填充函数的定义最初由葛仁溥教授<sup>[14]</sup>提出。

**定义 1**<sup>[14]</sup> 函数  $P(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  称为是  $f(x)$  在局部极小点  $x_1^*$  处的填充函数, 如果  $P(x)$  具有下述性质:

- 1)  $x_1^*$  是  $P(x)$  的一个局部极大点, 且  $P(x)$  在  $x_1^*$  处的盆谷  $B_1^*$  是  $P(x)$  峰的一部分;
- 2)  $P(x)$  在任意比  $B_1^*$  高的盆谷里没有极小点或稳定点;
- 3) 如果存在比  $B_1^*$  低的盆谷  $B_2^*$ , 则在  $B_2^*$  中存在一点  $\bar{x}$ , 使得  $P(x)$  在连接  $x_1^*$  和  $\bar{x}$  的连线上存在局部极小点。

填充函数法的核心思想是: 算法分为极小化阶段和填充阶段, 通过循环执行局部极小化与填充操作, 直至满足收敛条件且无法寻到更优的局部极小点时终止计算。在极小化阶段, 算法借助内点法、拟牛顿法或共轭梯度

\* 收稿日期: 2025-05-01 网络出版时间: 2025-07-09T16:59

资助项目: 国家自然科学基金重点项目(No. 12431010); 国家自然科学基金委员会与香港研究资助局合作研究项目(No. 12261160365); 重庆师范大学博士启动基金项目(No. 25XLB009)

第一作者简介: 陈乔, 女, 助理研究员, 博士, 研究方向为最优化理论与算法, E-mail: 115084448@qq.com

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/50.1165.n.20250709.1601.002>

法等经典局部优化方法,对目标函数进行搜索,找到一个局部极小点;在填充阶段,基于已找到的极小点逐步优化新构造的填充函数,从而获得更优的局部极小点。重复上述过程,直至算法找不到比当前目标函数值更优的局部极小点。

填充函数法一经提出,便引发了学术界的广泛关注,学者们主要从以下3个方向进行了深入研究。

一是丰富填充函数形式。学者们构建结构性更好的型填充函数<sup>[15-17]</sup>,从而提高算法的计算性能。文献[18]提出了1个与目标函数具有相同局部极小值的填充函数,该算法仅需在首次迭代中极小化目标函数,后续迭代只需极小化填充函数即可。文献[19]采用函数平滑化技术,通过消除所有函数值不低于当前局部极小值的极小点,缩减了目标函数的局部极小点个数,降低了全局优化问题的求解难度。文献[20]提出了一类具有连续可微的双参填充函数:

$$P(x, x_1^*, r, q) = -g(r + \|x - x_1^*\|^\beta) - qg(\min\{0, f(x_1^*)\}^\rho), \quad (1)$$

式中:常数 $\beta, \rho (\beta \geq 1, \rho > 0)$ 为偶数, $r, q (r > 0, q > 0)$ 为2个参数, $\|\cdot\|$ 代表欧几里得向量范数。

该函数表达式较为简洁且更具一般性,同时避免了许多方法中常见的指数项和对数项。相比已有的一些研究成果,该方法在参数选择上更为简便,同时数值实验的对比分析证明了该填充函数算法的有效性。

二是完善填充函数定义。为使填充函数的构造更简单,学者们持续推动着填充函数定义的改进<sup>[21-23]</sup>。值得注意的是, Yang 等人<sup>[23]</sup>对填充函数的定义做出了较大改进。

**定义 2**<sup>[23]</sup> 连续可微函数 $P(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 称为是 $f(x)$ 在局部极小点 $x_1^*$ 处的填充函数,如果 $P(x)$ 具有下述性质:

- 1)  $x_1^*$ 是 $P(x)$ 的一个局部极大点;
- 2) 对任意的 $x \in S_1, P(x)$ 在区间 $S_1$ 中没有稳定点,其中 $S_1 = \{x \mid f(x) \geq f(x_1^*), x \in X \setminus \{x_1^*\}\}$ ;
- 3) 如果 $x_1^*$ 不是全局极小点,则 $P(x)$ 一定在区间 $S_2 = \{x \mid f(x) < f(x_1^*), x \in X\}$ 上有局部极小点。

该定义对传统填充函数定义进行了根本性创新:首先它摒弃了传统定义中要求在点连线上存在极小点的限制条件,其次它仅需保证填充函数 $P(x)$ 在区域 $S_2$ 上存在极小点。基于此定义构建的算法增强了目标函数跳出局部最优的能力。

三是拓展填充函数算法的应用领域,学者们将该方法推广到了其他优化问题,例如最大割问题<sup>[24]</sup>、非线性方程组的数值求解<sup>[25]</sup>、非光滑优化问题<sup>[9]</sup>等。

填充函数法在非光滑优化领域的应用研究尤为值得关注。在非光滑优化问题中,目标函数及约束条件往往缺乏连续性、可微性等基本解析性质。这些性质的缺失增加了理论分析的复杂度和算法实现的困难。特别地,由于连续导数的缺失,系统对决策变量的敏感性分析变得异常困难。针对非光滑优化问题的求解,已发展出包括次梯度法、束方法等在内的多种方法。尽管这些方法在理论框架上已趋于成熟,但仍存在收敛性不够理想、算法实现复杂度较高等局限。同时,现有研究主要聚焦于局部最优解的求解,而对于非光滑全局最优化问题的探讨仍显不足。

综上所述,基于填充函数法在光滑全局优化中的显著效果,并受文献[9, 23, 26]中研究工作的启发,本文利用函数下降(上升)段的定义,针对具有特殊结构属性的目标函数,将双参数填充函数(1)拓展至解决非光滑优化问题。

## 1 预备知识

设 $\mathbf{R}^n$ 是 $n$ 维欧氏空间。考虑如下无约束优化问题:

$$\begin{aligned} & \min f(x), \\ & \text{s. t. } x \in \mathbf{R}^n. \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $f(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续可微的实值函数,且是形式为 $f(x) = d(x) + h(c(x))$ 的复合函数,其中 $d(x)$ 和 $c(x)^\top = (c_1(x), \dots, c_m(x))$ 是光滑函数, $h: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ 是凸的非光滑函数。此类函数的典型应用包括:非线性方程组的求解、非线性不等式组可行点的确定、约束优化问题中的罚函数构造等。

为完成本文定理的证明,提出以下假设。

**假设 1** 当 $\|x\| \rightarrow +\infty$ 时,有 $f(x) \rightarrow +\infty$ 成立。即目标函数 $f(x)$ 是强制的。

**假设 2**  $L(P)$ 是问题(2)的所有局部极小点的集合,且集合 $M = \{f(x) \mid x \in L(P)\}$ 是一个有限集合。

**注 1** 假设 1 意味着存在一个有界闭集  $X \subset \mathbf{R}^n$ , 使得  $X$  包含  $f(x)$  的所有极小点, 且  $f(x)$  在  $X$  中的所有极小点(无论是局部还是全局极小点)都是  $X$  的内点。  $f(x)$  在  $X$  边界上的值大于  $f(x)$  在它内部的值。这时, 问题(2)等价于下列优化问题:

$$\begin{aligned} & \min f(x), \\ & \text{s. t. } x \in X. \end{aligned} \quad (3)$$

即,  $x_1^*$  是问题(2)的全局最优解当且仅当  $x_1^*$  是问题(3)的全局最优解。

**注 2** 假设 2 允许目标函数  $f(x)$  存在无限个局部极小点, 但局部极小值的数量却必须是有限的。

**定义 3**<sup>[26]</sup> 设  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n, x_1 \neq x_2$ 。如果  $x_1 - x_2$  称为函数  $F(x)$  的下降(上升)段, 则函数  $f(\lambda) = F(x_2 + \lambda(x_1 - x_2))$  关于  $\lambda \in [0, 1]$  是单调递减(递增)的。如果  $x_1 - x_2$  被称为函数  $F(x)$  的强下降(强上升)段, 则以下条件之一成立:

1) 当  $F(x)$  连续可微时, 有:

$$f'(\lambda) = \nabla F(x_2 + \lambda(x_1 - x_2))^T (x_1 - x_2) < 0 (> 0), \forall \lambda \in [0, 1];$$

2) 当  $F(x)$  方向可微时, 有:

$$\max\{(x_1 - x_2)^T \xi \mid \xi \in \partial F(x(\lambda))\},$$

式中: 每一个  $\xi (\xi \in \partial F(x))$  为  $F(x)$  在点  $x$  处的次梯度,  $x(\lambda) = x_2 + \lambda(x_1 - x_2), \forall \lambda \in [0, 1]$ 。

## 2 一类具有特殊结构的非光滑填充函数

本文在非光滑优化框架下对文献[20]提出的填充函数进行扩展研究。为聚焦核心问题, 理论分析限定于  $\beta=2$  和  $\rho=2$  时的情况。具体研究对象为下列函数:

$$P(x, x_1^*, r, q) = -g(r + \|x - x_1^*\|^2) - qg(\min\{0, f(x_1^*)\}^2), \quad (4)$$

式中:  $r, q (r > 0, q > 0)$  为 2 个参数, 函数  $g(t): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  满足下列性质:

- 1) 函数  $g(t)$  在  $\mathbf{R}$  上是连续可微的;
- 2)  $g(0) = 0$ ;
- 3)  $g'(t) \geq a > 0, t \in \mathbf{R}$ 。

满足上述条件的函数很多, 例如:  $g(t) = \arctan t, g(t) = \tan t, g(t) = t, g(t) = \sinh t$  等。

下面, 将证明在非光滑条件下, 函数(4)满足定义 2 中关于填充函数的全部性质。

**定理 1** 假设  $x_1^* \in X$  是优化问题(3)的一个局部极小点, 则  $x_1^*$  是  $P(x, x_1^*, r, q)$  在  $X$  上的一个严格局部极大点。

**证明** 由函数  $g(t)$  的性质 3) 知,  $g(t)$  是严格单调递增的, 且  $g(0) = 0$ 。所以当  $x \neq x_1^*$  时, 有:

$$\begin{aligned} P(x_1^*, x_1^*, r, q) &= -g(r) > -g(r + \|x - x_1^*\|^2) \geq \\ & -g(r + \|x - x_1^*\|^2) - qg(\min\{0, f(x) - f(x_1^*)\}^2) = P(x, x_1^*, r, q). \end{aligned}$$

因此,  $x_1^*$  是  $P(x, x_1^*, r, q)$  在  $X$  上的一个严格局部极大点。

证毕

**引理 1** 令  $x(\lambda) = x_2 + \lambda(x_1 - x_2), \lambda \in [0, 1]$ 。如果:

$$(x_1 - x_2)^T (x_2 - x_1^*) \geq 0, \quad (5)$$

则  $r + \|x(\lambda) - x_1^*\|^2$  和  $(x_1 - x_2)^T (x(\lambda) - x_1^*)$  是关于  $\lambda \in [0, 1]$  的增函数, 并且有

$$(x_1 - x_2)^T (x(\lambda) - x_1^*) \geq (x_1 - x_2)^T (x_2 - x_1^*), \forall \lambda \in [0, 1]$$

成立。

**证明** 由不等式(5)可推得, 下列展开式

$$\begin{aligned} r + \|x(\lambda) - x_1^*\|^2 &= r + \|\lambda(x_1 - x_2) + (x_2 - x_1^*)\|^2 = \\ & r + \|x_2 - x_1^*\|^2 + \lambda^2 \|x_1 - x_2\|^2 + 2\lambda(x_1 - x_2)^T (x_2 - x_1^*), \end{aligned}$$

$$(x_1 - x_2)^T (x(\lambda) - x_1^*) = (x_1 - x_2)^T [\lambda(x_1 - x_2) + (x_2 - x_1^*)] = \lambda \|x_1 - x_2\|^2 + (x_1 - x_2)^T (x_2 - x_1^*)$$

关于  $\lambda \in [0, 1]$  是单调递增的。所以,  $r + \|x(\lambda) - x_1^*\|^2$  和  $(x_1 - x_2)^T (x(\lambda) - x_1^*)$  是关于  $\lambda \in [0, 1]$  的增函数。

证毕

**引理 2** 假设  $x_1 - x_2$  是  $f(x)$  的下降段, 并且不等式(5)成立, 则  $x_1 - x_2$  是  $P(x, x_1^*, r, q)$  的下降段。

**证明** 分2种情况进行讨论:

情形1,当  $f(x(\lambda)) \geq f(x_1^*)$  时,令:

$$T(\lambda) = P(x(\lambda), x_1^*, r, q) = -g(r + \|x(\lambda) - x_1^*\|^2).$$

由函数  $g(t)$  的单调性和引理1可推得  $g(r + \|x(\lambda) - x_1^*\|^2)$  关于  $\lambda \in [0, 1]$  是单调递增的。因此,根据定义3可知,  $x_1 - x_2$  是  $P(x, x_1^*, r, q)$  的下降段。

情形2,当  $f(x(\lambda)) < f(x_1^*)$  时,则有:

$$T(\lambda) = P(x(\lambda), x_1^*, r, q) = -\{g(r + \|x(\lambda) - x_1^*\|^2) + qg((f(x(\lambda)) - f(x_1^*))^2)\}.$$

由情形1的证明可知  $g(r + \|x(\lambda) - x_1^*\|^2)$  是关于  $\lambda \in [0, 1]$  的增函数。

以下证明  $(f(x(\lambda)) - f(x_1^*))^2$  是关于  $\lambda \in [0, 1]$  的增函数。令  $\varphi(\lambda) = (f(x(\lambda)) - f(x_1^*))^2, 0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$ , 由假设条件  $x_1 - x_2$  是  $f(x)$  的下降段,可知  $f(x(\lambda)) = f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2))$  关于  $\lambda$  是单调递减的。即是有  $f(x(\lambda_1)) > f(x(\lambda_2))$  成立。从而有:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2) &= (f(x(\lambda_1)) - f(x_1^*))^2 - (f(x(\lambda_2)) - f(x_1^*))^2 = \\ &= (f(x(\lambda_1)) - f(x(\lambda_2)))(f(x(\lambda_1)) - f(x_1^*) + f(x(\lambda_2)) - f(x_1^*)) < 0. \end{aligned}$$

所以  $\varphi(\lambda)$  是关于  $\lambda \in [0, 1]$  的增函数,故  $g(\varphi(\lambda))$  是单调递增的。进而得证  $T(\lambda)$  关于  $\lambda \in [0, 1]$  是单调递减的,根据定义3可知,  $x_1 - x_2$  是  $P(x, x_1^*, r, q)$  的下降段。

综上所述,引理得证。

证毕

**定理2** 假设  $x_1^* \in X$  是优化问题(3)的一个局部极小点,对任意的  $x \in S_1, x - x_1^*$  是  $P(x, x_1^*, r, q)$  的下降段。即  $P(x, x_1^*, r, q)$  在区间  $S_1$  内没有极小点或稳定点。

**证明** 对于任意点  $x = x_2 + \lambda(x_1 - x_2)$ , 其中  $\lambda \in [0, 1]$  且  $x \in S_1$ , 有

$$f(x) = f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2)) \geq f(x_1^*)$$

成立。由引理2证明的情形1可得,对任意的  $x \in S_1, x - x_1^*$  是  $P(x, x_1^*, r, q)$  的下降段。所以,  $P(x, x_1^*, r, q)$  在区间  $S_1$  内没有极小点或稳定点。

证毕

**定理3** 假设  $x_1^* \in X$  是优化问题(3)的一个局部极小点而非全局极小点,则  $P(x, x_1^*, r, q)$  的所有局部极小点或稳定点均位于区间  $S_2$  内。

**证明** 用反证法证明。假设结论不成立,则存在  $P(x, x_1^*, r, q)$  的一个局部极小点或稳定点  $x_2^*$ , 但  $x_2^* \notin S_2$ 。即有  $f(x_2^*) \geq f(x_1^*)$ 。又由定理1可知,  $x_1^*$  是  $P(x, x_1^*, r, q)$  的一个严格局部极小点,而  $x_2^*$  是该函数的局部极小点或稳定点,故有  $x_1^* \neq x_2^*$ 。由此可推知  $x_2^*$  必然位于区间  $S_1$  内。倘若  $x_2^*$  是  $P(x, x_1^*, r, q)$  的局部极小点或稳定点,则与定理2矛盾。因而,假设不成立,定理得证。

证毕

**注3** 通过定理1至定理3的证明,验证了:在非光滑优化框架下,函数(4)满足定义2中关于填充函数的3条性质。

**定理4** 假设  $x_1^* \in X$  是优化问题(3)的一个局部极小点,令  $x(\lambda) = x_2 + \lambda(x_1 - x_2) \in S_2, \lambda \in [0, 1]$  并且  $x_1 - x_2$  是  $f(x)$  的上升段。当  $q > \hat{q}$  时,如果不等式(5)成立,则  $x_1 - x_2$  是填充函数  $P(x, x_1^*, r, q)$  的上升段,其中:

$$\hat{q} = \frac{g(r + \|x(\lambda_2) - x_1^*\|^2) - g(r + \|x(\lambda_1) - x_1^*\|^2)}{g((f(x(\lambda_1)) - f(x_1^*))^2) - g((f(x(\lambda_2)) - f(x_1^*))^2)}.$$

**证明** 当  $x(\lambda) = x_2 + \lambda(x_1 - x_2) \in S_2, \lambda \in [0, 1]$  时,有:

$$f(x(\lambda)) < f(x_1^*). \quad (6)$$

所以  $T(\lambda) = P(x(\lambda), x_1^*, r, q) = -(g(r + \|x(\lambda) - x_1^*\|^2) + qg((f(x(\lambda)) - f(x_1^*))^2))$  成立。

令  $\varphi(\lambda) = (f(x(\lambda)) - f(x_1^*))^2$ , 设  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$ 。由引理2证明的情形1可知,  $g(r + \|x(\lambda) - x_1^*\|^2)$  是关于  $\lambda$  的增函数,从而有:

$$g(r + \|x(\lambda_1) - x_1^*\|^2) < g(r + \|x(\lambda_2) - x_1^*\|^2). \quad (7)$$

由已知条件  $x_1 - x_2$  是  $f(x)$  的上升段,可知  $f(x(\lambda))$  关于  $\lambda$  是单调上升的,即有:

$$f(x(\lambda_1)) < f(x(\lambda_2)). \quad (8)$$

所以由式(6)、(8)可得:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2) &= (f(x(\lambda_1)) - f(x_1^*))^2 - (f(x(\lambda_2)) - f(x_1^*))^2 = \\ &= (f(x(\lambda_1)) - f(x(\lambda_2)))(f(x(\lambda_1)) - f(x_1^*) + f(x(\lambda_2)) - f(x_1^*)) > 0. \end{aligned}$$

故有  $\varphi(\lambda_1) > \varphi(\lambda_2)$ 。又因为  $g(t)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数, 则有  $g(\varphi(\lambda_1)) > g(\varphi(\lambda_2))$ , 即:

$$g((f(x(\lambda_1)) - f(x_1^*))^2) > g((f(x(\lambda_2)) - f(x_1^*))^2). \quad (9)$$

另一方面, 有:

$$\begin{aligned} T(\lambda_1) - T(\lambda_2) &= g(r + \|x(\lambda_2) - x_1^*\|^2) - g(r + \|x(\lambda_1) - x_1^*\|^2) + \\ &= q(g((f(x(\lambda_2)) - f(x_1^*))^2) - g((f(x(\lambda_1)) - f(x_1^*))^2)), \end{aligned}$$

所以结合式(7)、(9)和  $q > \hat{q}$ , 可知  $T(\lambda_1) - T(\lambda_2) < 0$ 。因此,  $T(\lambda)$  关于  $\lambda \in [0, 1]$  是单调递增的。根据定义 3 知,  $x_1 - x_2$  是  $P(x, x_1^*, r, q)$  关于  $\lambda \in [0, 1]$  的上升段。证毕

**注 4** 定理 2 表明, 当从目标函数的一个局部极小点出发, 填充函数  $P(x, x_1^*, r, q)$  在区间  $S_1$  内一直保持下降的趋势。定理 3 表明, 填充函数向区间  $S_2$  移动, 那么  $P(x, x_1^*, r, q)$  将继续保持下降的趋势。而定理 4 保证了  $P(x, x_1^*, r, q)$  在区间  $S_2$  上有一个上升的方向, 进一步确保了填充函数在区间  $S_2$  上的收敛性。

本文针对一类具有特殊结构性质的复合函数优化问题, 基于函数下降(上升)段的定义, 成功地将文献[20]提出的填充函数(1)推广至非光滑优化领域。

#### 参考文献:

- [1] FELICI G, TRIPATHI K P, EVANGELISTA D, et al. A mixed integer programming-based global optimization framework for analyzing gene expression data[J]. *Journal of Global Optimization*, 2017, 69(3): 727-744.
- [2] BERTOLAZZI P, LIUZZI G, GUERRA C. A global optimization algorithm for protein surface alignment[C]//2009 IEEE International Conference on Bioinformatics and Biomedicine Workshop. IEEE, 2009: 93-100.
- [3] MARANAS C D, ANDROULAKIS I P, FLOUDAS C A, et al. Solving long-term financial planning problems via global optimization[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1997, 21(8/9): 1405-1425.
- [4] MA S C, SHANG C, WANG C M, et al. Thermodynamic rules for zeolite formation from machine learning based global optimization[J]. *Chemical Science*, 2020, 11(37): 10113-10118.
- [5] WANG S Q, XING J C, JIANG Z Y, et al. A decentralized, model-free, global optimization method for energy saving in heating, ventilation and air conditioning systems[J]. *Building Services Engineering Research and Technology*, 2020, 41(4): 414-428.
- [6] KANAZAKI M, MATSUNO T, MAEDA K, et al. Efficient global optimization applied to wind tunnel evaluation-based optimization for improvement of flow control by plasma actuators[J]. *Engineering Optimization*, 2015, 47(9): 1226-1242.
- [7] JIANG Y, HU T S, HUANG C C, et al. An improved particle swarm optimization algorithm[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 193(1): 231-239.
- [8] WHITLEY D. A genetic algorithm tutorial[J]. *Statistics and Computing*, 1994, 4(2): 65-85.
- [9] ZHANG Y, ZHANG L S, XU Y T. New filled functions for nonsmooth global optimization [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, 33(7): 3114-3129.
- [10] YAN Q, CHEN W, YANG X M. A novel one-parameter filled function method with an application to pathological analysis[J]. *Optimization Letters*, 2024, 18: 803-824.
- [11] CHEN Q, TANG L P, ZHANG K, et al. A new one-parameter filled function method for unconstrained global optimization problems[EB/OL]. (2024-10-12)[2025-06-01]. [http://manu71.magtech.com.cn/Jwk3\\_pjo/EN/10.61208/pjo-2024-024](http://manu71.magtech.com.cn/Jwk3_pjo/EN/10.61208/pjo-2024-024).
- [12] MA H L, XU S J, LIANG Y Y. Global optimization of fuel consumption in J 2 rendezvous using interval analysis[J]. *Advances in Space Research*, 2017, 59(6): 1577-1598.
- [13] LEVY A V, MONTALVO A. The tunneling algorithm for the global minimization of functions[J]. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1985, 6(1): 15-29.
- [14] GE R P. A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables [J]. *Mathematical Programming*, 1990, 46: 191-204.
- [15] WANG C J, YANG Y J, LI J. A new filled function method for unconstrained global optimization[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 225(1): 68-79.
- [16] LIN H W, WANG Y P, FAN L. A filled function method with one parameter for unconstrained global optimization[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 218(7): 3776-3785.

- [17] SHANG Y L, ZHANG L S. Finding discrete global minima with a filled function for integer programming[J]. *European Journal of Operational Research*, 2008, 189(1): 31-40.
- [18] LIN H W, GAO Y L, WANG X L, et al. A filled function which has the same local minimizer of the objective function[J]. *Optimization Letters*, 2019, 13(4): 761-776.
- [19] SUI X, WANG Y P, LIU J H. A new filled function method combining auxiliary function for global optimization[J]. *Pacific Journal of Optimization*, 2019, 15(1): 23-44.
- [20] CHEN Q, YANG X M, YAN Q. A new class of filled functions with two parameters for solving unconstrained global optimization problems[J]. *Journal of the Operations Research Society of China*, 2024, 12(4): 921-936.
- [21] ZHANG L S, NG C K, LI D, et al. A new filled function method for global optimization[J]. *Journal of Global Optimization*, 2004, 28(1): 17-43.
- [22] WU Z Y, LEE H W J, ZHANG L S, et al. A novel filled function method and quasi-filled function method for global optimization[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2006, 34(2): 249-272.
- [23] YANG Y J, SHANG Y L. A new filled function method for unconstrained global optimization[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 173(1): 501-512.
- [24] LING A F, XU C X, XU F M. A discrete filled function algorithm embedded with continuous approximation for solving max-cut problems[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 197(2): 519-531.
- [25] LIN Y J, YANG Y J. Filled function method for nonlinear equations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010, 234(3): 695-702.
- [26] XU Z, HUANG H X, PARDALOS P M, et al. Filled functions for unconstrained global optimization[J]. *Journal of Global Optimization*, 2001, 20(1): 49-65.

## Operations Research and Cybernetics

### A Note on Non-Smooth Filled Function Method

CHEN Qiao

(Editing and Publishing Center, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** Filled function methods for nonsmooth optimization problems are discussed. Based on the concept of function descent (ascent) segments, two new properties concerning function descent (ascent) segments are proposed. Utilizing these properties, a class of nonsmooth filled functions with special structures is investigated. The two parameters filled function method from existing literature is extended to nonsmooth optimization, making it applicable for solving optimization problems with particular structural features. The key findings represent significant improvements and generalizations of current methodologies in the field.

**Keywords:** global optimization; global minimizer; local minimizer; filled function method; non-smooth optimization

(责任编辑 黄 颖)