运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20250310

不确定非光滑半无限多目标优化问题的最优性与对偶*

陈　洁，赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:研究一类不确定非光滑半无限多目标优化问题的最优性条件与对偶问题。首先,提出了严格广义凸性和 ε-严格拟广义凸性的定义。其次,利用 Clarke 次微分,在 ε-严格拟广义凸性条件下建立了 ε-拟有效解的充分最优性条件。最后,在广义凸性条件和严格广义凸性条件下,分别建立了 ε-拟弱有效解和 ε-拟有效解的 Wolfe 型对偶,研究了弱对偶、强对偶以及逆对偶定理。所得结果完善了不确定非光滑半无限多目标优化问题的相关理论。

关键词:多目标优化问题;半无限;对偶;广义凸性

中图分类号:O221.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2025)03-0030-10

多目标优化问题是指由多个相互冲突或相互影响的目标所组成的一类最优化问题,要求在可行域上同时使多个目标都达到最优。多目标优化问题与经济管理、工程优化设计、物流配送、生产管理、路径规划等诸多领域有紧密联系[1-3],已成为国际最优化领域的研究热点之一。多目标优化问题依据目标函数和约束函数是否可微分为光滑优化和非光滑优化。非光滑优化问题在图像复原、信号处理、神经网络、资源分配等领域有广泛应用[4-5]。

最优性条件和对偶理论是多目标问题研究的热点,目前,已取得了一些重要成果。Chuong 等人[6]考虑了一类非光滑半无限多目标优化问题,利用极限次微分,研究了在(严格)广义凸性条件下有效解和弱有效解的充分条件,并建立了弱对偶和强对偶;Chuong 等人[7]建立了非光滑多目标优化问题近似 Pareto 解的充要条件及其 Wolfe 型对偶;Kabgani 等人[8]研究了非光滑半无限多目标规划问题的弱/真/鲁棒有效解,给出了所考虑问题解的各种充要最优性条件;Lee 等人[9]建立了可微半无限不确定多目标优化问题的 KKT 鲁棒最优性条件及其 Wolfe 型对偶;周俊屹等人[10]针对非光滑非凸实值函数的鲁棒多目标优化问题,利用极限法锥和极限次微分,在(严格)广义伪凸条件下研究一类鲁棒有效解的最优性条件和强弱对偶;Fakhar 等人[11]引入 n 次广义凸性新概念,并应用于非光滑鲁棒多目标优化问题,给出了鲁棒拟(弱)有效解的非光滑鲁棒最优性条件和鲁棒 n 次 Mond-Weir 对偶性;Son 等人[12]利用 Clarke 次微分研究半无限向量优化问题近似解的最优性条件及其对偶;Sun 等人[13]研究了非线性半无限规划的鲁棒近似拟最优解,利用一种新的鲁棒型次微分约束品性和广义凸性,建立近似最优性条件和混合型鲁棒近似对偶;Pham[14]利用 Mordukhovich/极限次微分讨论了一类非光滑无限优化问题的 ε-拟最优解及其混合对偶。Pham 等人[15]研究了一类不确定非光滑半无限规划问题,建立了 ε-拟弱有效解的最优性条件及其 Mond-Weir 型对偶。

受文献[6-15]等研究工作的启发,本文主要在文献[15]基础上,在 ε-严格拟广义凸性条件下,利用 Clarke 次微分得到 ε-拟有效解的充分最优性条件,并建立了 ε-拟弱有效解和 ε-拟有效解的 Wolfe 型对偶,分别讨论了原问题与 Wolfe 型对偶问题之间的对偶性。

1　预备知识

设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间,$\|\cdot\|$表示欧几里得范数,$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示 $\mathbf{R}^n$ 空间中的内积,集合 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 的闭包和内部

* **收稿日期**:2024-10-01　**修回日期**:2025-02-03　**网络出版时间**:2025-05-30T12:17

资助项目:国家重点研发计划项目(No. 2023YFA1011300);国家自然科学基金面上项目(No. 12171063);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014);重庆英才计划创新领军人才项目(No. cstc2022ycjh-bgzxm0114)

第一作者简介:陈洁,女,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:842829425@qq.com;**通信作者**:赵克全,男,教授,博士生导师,E-mail:kequanz@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250530.1122.002

分别用 clΩ 和 intΩ 表示，B 表示 $\mathbf{R}^n$ 的封闭单位球。$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 的极锥用 $\Omega^\circ=\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n\mid\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle\leqslant 0,\forall\boldsymbol{x}\in\Omega\}$ 表示。$\mathbf{R}^n$ 的非负象限为 $\mathbf{R}^n_+=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n\}$，$\mathbf{R}^n_+$ 的拓扑内部用 int$\mathbf{R}^n_+$ 表示，其中 $\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^m$。考虑 $\mathbf{R}^n$ 中序关系：$\boldsymbol{u}<\boldsymbol{v}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\in-\mathrm{int}\mathbf{R}^n_+$，$\boldsymbol{u}\nless\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{u}<\boldsymbol{v}$ 的否定，$\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{v}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\in-\mathbf{R}^n_+\setminus\{\boldsymbol{0}\}$，$\boldsymbol{u}\nleq\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{v}$ 的否定。

定义 1[4]　函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^n$ 处是局部 Lipschitz 连续的，如果存在正数 $L>0$，并且在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的开邻域 U 上，对于任意的 $x_1,x_2\in U$，有：

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L\|x_1-x_2\|。$$

定义 2[4]　1）设函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^n$ 处是局部 Lipschitz 连续的，则函数 f 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处关于方向 $\boldsymbol{d}\in\mathbf{R}^n$ 的 Clarke 广义方向导数为：

$$f^C(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d})=\limsup_{\boldsymbol{x}\to\bar{\boldsymbol{x}},t\downarrow 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{x})}{t}。$$

2）设函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^n$ 处是局部 Lipschitz 连续的，则函数 f 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处关于方向 $\boldsymbol{d}\in\mathbf{R}^n$ 的 Clarke 次微分为：

$$\partial^C f(\bar{\boldsymbol{x}})=\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n\mid f^C(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d})\geqslant\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{d}\rangle,\forall\boldsymbol{d}\in\mathbf{R}^n\}。$$

定义 3[15]　1）设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭集以及 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\Omega$，集合 Ω 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的 Clarke 切锥定义为 $T^C(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)=\{v\in\mathbf{R}^n\mid d^C_\Omega(\bar{\boldsymbol{x}};v)=0\}$，其中 d^C_Ω 为 Ω 的距离函数。

2）设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭集以及 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\Omega$，集合 Ω 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的 Clarke 法锥定义为 $N^C(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)=T^C(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)^\circ$。

3）设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭凸集以及 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\Omega$，则 Clarke 法锥 $N^C(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)$ 退化为凸分析中经典的法锥 $N(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)$，即 $N(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)=\{\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n\mid\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{x}}\rangle\leqslant 0,\forall\boldsymbol{y}\in\Omega\}$。

定义 4[15]　设 T 是非空无限指标集且 $\mathcal{V}_t\subset\mathbf{R}^q$，$t\in T$ 是凸紧集。令 $g_t:\mathbf{R}^n\times\mathcal{V}_t\to\mathbf{R}$，$\forall t\in T$，称 g_t 是在 $t\in T$ 上关于 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的一致局部 Lipschitz 函数，如果对于任意的 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^n$，存在正数 $L>0$，在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的邻域 U 上以及 $v_t\in\mathcal{V}_t$，使得：

$$|g_t(x_1,v_t)-g_t(x_2,v_t)|\leqslant L\|x_1-x_2\|,\forall x_1,x_2\in U,\forall v_t\in\mathcal{V}_t,t\in T。$$

考虑如下不确定非光滑半无限多目标优化问题：

$$\text{(USIVP)}\ \min\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})),$$
$$\text{s.t.}\ g_t(\boldsymbol{x},v_t)\leqslant 0,\forall t\in T,\boldsymbol{x}\in\Omega,$$

其中：T 是非空无限指标集，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭子集，$f_k:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$k=1,2,\cdots,m$ 是局部 Lipschitz 函数。$g_t:\mathbf{R}^n\times\mathcal{V}_t\to\mathbf{R}$，$t\in T$ 是在 $t\in T$ 上关于 x 的一致局部 Lipschitz 函数，假设 $v_t\in\mathcal{V}_t$，$t\in T$ 是不确定参数，$\mathcal{V}_t\subset\mathbf{R}^q$，$t\in T$ 是凸紧集。不确定集值映射 $\mathcal{V}:T\rightrightarrows\mathbf{R}^q$ 被定义为 $\mathcal{V}(t)=\mathcal{V}_t$，对所有的 $t\in T$ 成立。记号 $v\in\mathcal{V}$ 表示 v 是 $\mathcal{V}$ 的一个选择，即 $v:T\to\mathbf{R}^q$ 且对于所有的 $t\in T$，有 $v_t\in\mathcal{V}_t$。因此，不确定集是 $\mathcal{V}$ 的图，即 gph$\mathcal{V}=\{(t,v_t)\mid v_t\in\mathcal{V}_t,t\in T\}$。

问题(USIVP)的鲁棒对应为：

$$\text{(RSIVP)}\ \min\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})),$$
$$\text{s.t.}\ g_t(\boldsymbol{x},v_t)\leqslant 0,\forall v_t\in\mathcal{V}_t,\forall t\in T,x\in\Omega,$$

则可行集为：

$$F=\{x\in\Omega\mid g_t(\boldsymbol{x},v_t)\leqslant 0,\forall v_t\in\mathcal{V}_t,\forall t\in T\}。$$

定义 5[15]　设 T 是任意的指标集且(T)表示 T 的超体积，$\mathbf{R}^{(T)}$ 是线性空间且被定义为：

$$\mathbf{R}^{(T)}=\{\lambda=(\lambda_t)_{t\in T}\mid \text{只有有限个 } t\in T,\lambda_t\neq 0\},$$

$\mathbf{R}^{(T)}$ 的正极锥定义为

$$\mathbf{R}^{(T)}_+=\{\lambda\in\mathbf{R}^{(T)}\mid\lambda_t\geqslant 0,\forall t\in T\},$$

其中，$\lambda\in\mathbf{R}^{(T)}$，$T(\lambda)=\{t\in T\mid\lambda_t\neq 0\}$是 T 的有限子集。对于 g_t，$t\in T$，有：

$$\sum_{t\in T}\lambda_t g_t=\begin{cases}\sum\limits_{t\in T(\lambda)}\lambda_t g_t, & T(\lambda)\neq\varnothing,\\ 0, & T(\lambda)=\varnothing。\end{cases}$$

定义6[7]　1) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}$，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$。称 $\overline{\boldsymbol{x}}\in F$ 是问题(RSIVP)的 ε-拟弱有效解，若不存在 $\boldsymbol{x}\in F$，使得 $f_k(\boldsymbol{x})+\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|<f_k(\overline{\boldsymbol{x}})$，$k=1,\cdots,m$。

2) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}$，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$。称 $\overline{\boldsymbol{x}}\in F$ 是问题(RSIVP)的 ε-拟有效解，若不存在 $\boldsymbol{x}\in F$，使得 $f_k(\boldsymbol{x})+\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|\leqslant f_k(\overline{\boldsymbol{x}})$，$k=1,\cdots,m$，且至少有一个严格不等式成立。

2　最优性条件

定义7[15]　若

$$N^C(\overline{\boldsymbol{x}};F)\subseteq\bigcup_{\substack{\lambda\in A(\overline{\boldsymbol{x}})\\ v_t\in\mathcal{V}_t}}\Big[\sum_{t\in T}\lambda_t\partial_x^C g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)\Big]+N^C(\overline{\boldsymbol{x}};\Omega),$$

则称鲁棒型约束品性在点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in F$ 处成立，其中 $A(\overline{\boldsymbol{x}})=\{\lambda\in\mathbf{R}_+^{(T)}\mid\lambda_t g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)=0,\forall v_t\in\mathcal{V}_t,\forall t\in T\}$。

引理1[15]　(必要条件)设 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}$，$\overline{\boldsymbol{x}}\in F$ 是(RSIVP)的 ε-拟弱有效解，并在 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 处满足鲁棒型约束品性，则存在 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\mathbf{R}_+^m$，$\sum_{k=1}^m\alpha_k=1$，$v_t\in\mathcal{V}_t$，$t\in T$，$\lambda\in A(\overline{\boldsymbol{x}})$，使得：

$$0\in\sum_{k=1}^m\alpha_k\partial^C f_k(\overline{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\lambda_t\partial_x^C g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)+\sum_{k=1}^m\alpha_k\varepsilon_k B+N^C(\overline{\boldsymbol{x}};\Omega)。$$

定义8[15]　(鲁棒 ε-近似 KKT 条件)设 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}$，如果存在 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\mathbf{R}_+^m$，$\sum_{k=1}^m\alpha_k=1$，$v_t\in\mathcal{V}_t$，$t\in T$，$\lambda\in A(\overline{\boldsymbol{x}})$，使得：

$$0\in\sum_{k=1}^m\alpha_k\partial^C f_k(\overline{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\lambda_t\partial_x^C g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)+\sum_{k=1}^m\alpha_k\varepsilon_k B+N^C(\overline{\boldsymbol{x}};\Omega),$$

则称 $\overline{\boldsymbol{x}}\in F$ 满足(RSIVP)的鲁棒 ε-近似 KKT 条件。

下面给出广义凸性和 ε-拟广义凸性的定义。

定义9[15]　1) 设 $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$，$\boldsymbol{g}_T=(g_t)_{t\in T}$，称函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ 处具有广义凸性，若对任意的 $\boldsymbol{x}\in\Omega$，$x_k\in\partial^C f_k(\overline{\boldsymbol{x}})$，$k=1,\cdots,m$ 和 $x_t\in\partial_x^C g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)$，$v_t\in\mathcal{V}_t$，$t\in T$，存在 $w\in T^C(\overline{\boldsymbol{x}};\Omega)$，使得：

$$f_k(\boldsymbol{x})-f_k(\overline{\boldsymbol{x}})\geqslant\langle x_k,w\rangle,k=1,\cdots,m,$$
$$g_t(\boldsymbol{x},v_t)-g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)\geqslant\langle x_t,w\rangle,\forall t\in T,$$
$$\langle b,w\rangle\leqslant\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|,\forall b\in B。$$

2) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}$，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$，$\boldsymbol{g}_T=(g_t)_{t\in T}$，称函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ 处具有 ε-拟广义凸性，若对任意的 $\boldsymbol{x}\in\Omega$，$x_k\in\partial^C f_k(\overline{\boldsymbol{x}})$，$k=1,\cdots,m$ 和 $x_t\in\partial_x^C g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)$，$v_t\in\mathcal{V}_t$，$t\in T$，存在 $w\in T^C(\overline{\boldsymbol{x}};\Omega)$，使得：

$$\langle x_k,w\rangle+\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|\geqslant 0\Rightarrow f_k(\boldsymbol{x})+\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|\geqslant f_k(\overline{\boldsymbol{x}}),k=1,\cdots,m,$$
$$g_t(\boldsymbol{x},v_t)\leqslant g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)\Rightarrow\langle x_t,w\rangle\leqslant 0,\forall t\in T,$$
$$\langle b,w\rangle\leqslant\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|,\forall b\in B。$$

受文献[11-12]的启发，本文给出了严格广义凸性和 ε-严格拟广义凸性的定义。

定义10　1) 设 $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$，$\boldsymbol{g}_T=(g_t)_{t\in T}$，称函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ 处具有严格广义凸性，若对任意的 $\boldsymbol{x}\in\Omega\setminus\{\overline{\boldsymbol{x}}\}$，$x_k\in\partial^C f_k(\overline{\boldsymbol{x}})$，$k=1,\cdots,m$ 和 $x_t\in\partial_x^C g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)$，$v_t\in\mathcal{V}_t$，$t\in T$，存在 $w\in T^C(\overline{\boldsymbol{x}};\Omega)$，使得：

$$f_k(\boldsymbol{x})-f_k(\overline{\boldsymbol{x}})>\langle x_k,w\rangle,k=1,\cdots,m,$$
$$g_t(\boldsymbol{x},v_t)-g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)\geqslant\langle x_t,w\rangle,\forall t\in T,$$
$$\langle b,w\rangle\leqslant\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|,\forall b\in B。$$

2) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}$，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$，$\boldsymbol{g}_T=(g_t)_{t\in T}$，称函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ 处具有 ε-严格拟广义凸性，若对任意的 $\boldsymbol{x}\in\Omega\setminus\{\overline{\boldsymbol{x}}\}$，$x_k\in\partial^C f_k(\overline{\boldsymbol{x}})$，$k=1,\cdots,m$ 和 $x_t\in\partial_x^C g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)$，$v_t\in\mathcal{V}_t$，$t\in T$，存在 $w\in T^C(\overline{\boldsymbol{x}};\Omega)$，使得：

$$\langle x_k,w\rangle+\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|\geqslant 0\Rightarrow f_k(\boldsymbol{x})+\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|>f_k(\overline{\boldsymbol{x}}),k=1,\cdots,m,$$
$$g_t(\boldsymbol{x},v_t)\leqslant g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)\Rightarrow\langle x_t,w\rangle\leqslant 0,\forall t\in T,$$

$$\langle b, w\rangle \leqslant \|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|, \forall b \in B。$$

注 1　函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ 处具有(严格)广义凸性，则函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ 处具有 ε-(严格)拟广义凸性。

定理 1　(ε-拟有效解的充分条件)设 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\mathbf{R}_+^m\backslash\{\mathbf{0}\}$，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$，$\boldsymbol{g}_T=(g_t)_{t\in T}$。假设 $\overline{\boldsymbol{x}}\in F$ 满足鲁棒 ε-近似 KKT 条件，如果函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ 处具有 ε-严格拟广义凸性，则 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 是(RSIVP)的 ε-拟有效解。

证明　因为 $\overline{\boldsymbol{x}}\in F$ 满足鲁棒 ε-近似 KKT 条件，所以存在 $x_k\in\partial^C f_k(\overline{\boldsymbol{x}})$，$k=1,\cdots,m$，$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\mathbf{R}_+^m$，$\sum_{k=1}^m\alpha_k=1$，$x_t\in\partial_x^C g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)$，$v_t\in\mathcal{V}_t$，$t\in T$，$\lambda\in A(\overline{\boldsymbol{x}})$，$b\in B$，使得：

$$0\in\sum_{k=1}^m\alpha_k x_k+\sum_{t\in T}\lambda_t x_t+\sum_{k=1}^m\alpha_k\varepsilon_k b+N^C(\overline{\boldsymbol{x}};\Omega),\tag{1}$$

则等价于：

$$-\Big(\sum_{k=1}^m\alpha_k x_k+\sum_{t\in T}\lambda_t x_t+\sum_{k=1}^m\alpha_k\varepsilon_k b\Big)\in N^C(\overline{\boldsymbol{x}};\Omega)。$$

假设 $\overline{\boldsymbol{x}}\in F$ 不是(RSIVP)的 ε-拟有效解，则存在 $\hat{\boldsymbol{x}}\in F$ 使得：

$$f_k(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant f_k(\overline{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|,\ k=1,\cdots,m,\tag{2}$$

不等式(2)中至少有一个是严格不等式。显然，$\overline{\boldsymbol{x}}\neq\hat{\boldsymbol{x}}$，又因为 $\lambda\in A(\overline{\boldsymbol{x}})$，则有 $\lambda_t g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)=0$，$\forall v_t\in\mathcal{V}_t$，$t\in T$ 成立。由 $\hat{\boldsymbol{x}}\in F$，得 $\lambda_t g_t(\hat{\boldsymbol{x}},v_t)\leqslant 0$，故：

$$\lambda_t g_t(\hat{\boldsymbol{x}},v_t)\leqslant 0=\lambda_t g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t),t\in T。\tag{3}$$

由于函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ 处具有 ε-严格拟广义凸性，则由式(2)和式(3)可知，$\hat{\boldsymbol{x}}\in F\subseteq\Omega$，$x_k\in\partial^C f_k(\overline{\boldsymbol{x}})$，$k=1,\cdots,m$，$x_t\in\partial_x^C g_t(\overline{\boldsymbol{x}},v_t)$，$v_t\in\mathcal{V}_t$，$t\in T$，且存在 $w\in T^C(\overline{\boldsymbol{x}};\Omega)$，使得：

$$\langle x_k,w\rangle+\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|<0,k=1,\cdots,m,\tag{4}$$

$$\lambda_t\langle x_t,w\rangle\leqslant 0,\ \forall t\in T,\tag{5}$$

$$\langle b,w\rangle\leqslant\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|,\ \forall b\in B。\tag{6}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\mathbf{R}_+^m$，满足 $\sum_{k=1}^m\alpha_k=1$，由式(4)可得 $\sum_{k=1}^m\alpha_k\langle x_k,w\rangle+\sum_{k=1}^m\alpha_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|<0$，由式(5)可得 $\sum_{t\in T}\lambda_t\langle x_t,w\rangle\leqslant 0$。再将两者结合有：

$$\sum_{k=1}^m\alpha_k\langle x_k,w\rangle+\sum_{k=1}^m\alpha_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|+\sum_{t\in T}\lambda_t\langle x_t,w\rangle<0,$$

则由式(6)可得 $\sum_{k=1}^m\alpha_k\langle x_k,w\rangle+\sum_{k=1}^m\alpha_k\varepsilon_k\langle b,w\rangle+\sum_{t\in T}\lambda_t\langle x_t,w\rangle<0$。由极锥的定义和 $w\in T^C(\overline{\boldsymbol{x}};\Omega)$，以及式(1)，有：

$$\sum_{k=1}^m\alpha_k\langle x_k,w\rangle+\sum_{k=1}^m\alpha_k\varepsilon_k\langle b,w\rangle+\sum_{t\in T}\lambda_t\langle x_t,w\rangle\geqslant 0。$$

故得到矛盾，则 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 是(RSIVP)的 ε-拟有效解。　证毕

3　Wolfe 型对偶

对于 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭集，$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\mathbf{R}_+^m$，$\sum_{k=1}^m\alpha_k=1$，$\lambda\in\mathbf{R}_+^{(T)}$，$v_t\in\mathcal{V}_t$，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$，$\boldsymbol{g}_T=(g_t)_{t\in T}$，$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\mathbf{R}_+^m\backslash\{\mathbf{0}\}$，将向量函数 $\boldsymbol{L}=(L_1,\cdots,L_m)$表示为：

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x},v_t)\boldsymbol{e}。$$

那么不确定非光滑半无限多目标优化问题的鲁棒对应(RSIVP)，所对应的 Wolfe 型对偶多目标优化问题(WD)为：

$$\begin{cases}\max \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda}),\\ \text{s. t. } 0\in \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\partial^C f_k(\boldsymbol{y})+\sum_{t\in T}\lambda_t\partial_x^C g_t(\boldsymbol{y},v_t)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k B+N^C(\boldsymbol{y};\Omega),\\ \quad v_t\in\mathcal{V}_t,t\in T,\\ \quad \boldsymbol{y}\in\Omega,\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\mathbf{R}_+^m,\sum_{k=1}^{m}\alpha_k=1,\lambda\in\mathbf{R}_+^{(T)},\end{cases}$$

可行集为：

$$F_{\mathrm{WD}}=\Big\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})\in\Omega\times\mathbf{R}_+^m\times\mathbf{R}_+^{(T)}\ \Big|\ 0\in\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\partial^C f_k(\boldsymbol{y})+\sum_{t\in T}\lambda_t\partial_x^C g_t(\boldsymbol{y},v_t)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k B+N^C(\boldsymbol{y};\Omega),\sum_{k=1}^{m}\alpha_k=1,v_t\in\mathcal{V}_t,t\in T\Big\}。$$

为了研究原问题解与对偶问题解之间的关系，首先给出下列对偶问题解的概念。

定义 11　设 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}$，$\boldsymbol{L}=(L_1,\cdots,L_m)$，$(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in F_{\mathrm{WD}}$。

1）如果对任意的$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})\in F_{\mathrm{WD}}$，有：

$$\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\nless\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{y}\|,$$

则称$(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in F_{\mathrm{WD}}$是(WD)的 ε-拟弱有效解。

2）如果对任意的$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})\in F_{\mathrm{WD}}$，有：

$$\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\not\leq\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{y}\|,$$

则称$(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in F_{\mathrm{WD}}$是(WD)的 ε-拟有效解。

在上述对偶问题解的定义下，给出下列原问题解与对偶问题解之间的关系。

定理 2　(弱对偶)设 $\boldsymbol{x}\in F$，$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})\in F_{\mathrm{WD}}$，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$，$\boldsymbol{g}_T=(g_t)_{t\in T}$，$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}$，$\boldsymbol{L}=(L_1,\cdots,L_m)$。

1）若函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 处具有广义凸性，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\nless\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$。

2）若函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 处具有严格广义凸性，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\not\leq\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$。

证明　因为$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})\in F_{\mathrm{WD}}$，所以存在 $x_k\in\partial^C f_k(\boldsymbol{y})$，$k=1,\cdots,m$，$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\mathbf{R}_+^m$，$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k=1$，$x_t\in\partial_x^C g_t(\boldsymbol{y},v_t)$，$v_t\in\mathcal{V}_t$，$t\in T$，$\lambda\in\mathbf{R}_+^{(T)}$，使得：

$$0\in\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\partial^C f_k(\boldsymbol{y})+\sum_{t\in T}\lambda_t\partial_x^C g_t(\boldsymbol{y},v_t)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k B+N^C(\boldsymbol{y};\Omega),$$

则等价于：

$$-\Big(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k x_k+\sum_{t\in T}\lambda_t x_t+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k b\Big)\in N^C(\boldsymbol{y};\Omega)。\tag{7}$$

先证明 1)。设 $\boldsymbol{x}\in F$，反证：假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})<\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$，即$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})+\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\rangle<0$，等价于 $\Big\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{y},v_t)\boldsymbol{e}+\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\Big\rangle<0$。因此，有：

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k[f_k(\boldsymbol{x})-f_k(\boldsymbol{y})]-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{y},v_t)\boldsymbol{e}+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<0。$$

由于 $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k=1$，则有：

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k[f_k(\boldsymbol{x})-f_k(\boldsymbol{y})]-\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{y},v_t)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<0。\tag{8}$$

由于函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 处具有广义凸性，由式(7)以及极锥的定义，对于任意的 $\boldsymbol{x}$，存在 $w\in T^C(\boldsymbol{y};\Omega)$，使得：

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\langle x_k,w\rangle+\sum_{t\in T}\lambda_t\langle x_t,w\rangle+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\langle b,w\rangle\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k[f_k(\boldsymbol{x})-f_k(\boldsymbol{y})]+\sum_{t\in T}\lambda_t[g_t(\boldsymbol{x},v_t)-g_t(\boldsymbol{y},v_t)]+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=$$

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k[f_k(\boldsymbol{x})-f_k(\boldsymbol{y})]+\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x},v_t)-\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{y},v_t)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\text{ 。}$$

由 $\boldsymbol{x}\in F$,显然有 $g_t(\boldsymbol{x},v_t)\leqslant 0,\forall v_t\in\mathcal{V}_t,t\in T$,则 $\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x},v_t)\leqslant 0$。结合该式有:

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{m}\alpha_k[f_k(\boldsymbol{x})-f_k(\boldsymbol{y})]-\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{y},v_t)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\text{。}\tag{9}$$

式(8)和式(9)矛盾,故 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\not<\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$成立。

再证明 2)。设 $\boldsymbol{x}\in F$,反证:假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leq\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$,即$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})+\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\rangle\leqslant 0$,等价于 $\left\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{y},v_t)\boldsymbol{e}+\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\right\rangle\leqslant 0$。因此,

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k[f_k(\boldsymbol{x})-f_k(\boldsymbol{y})]-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{y},v_t)\boldsymbol{e}+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leqslant 0\text{。}$$

由于 $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k=1$,则有:

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k[f_k(\boldsymbol{x})-f_k(\boldsymbol{y})]-\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{y},v_t)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leqslant 0\text{。}\tag{10}$$

从上面式子可知 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$,否则假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$,则有:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x},v_t)\boldsymbol{e}=-\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x},v_t)\boldsymbol{e},$$

$-\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x},v_t)\boldsymbol{e}\in-\mathbf{R}_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}$,即 $\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x},v_t)\boldsymbol{e}\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}$,这是不可能的。因为 $\boldsymbol{x}\in F$ 有 $g_t(\boldsymbol{x},v_t)\leqslant 0$,则 $\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x},v_t)\leqslant 0$,所以 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$。由于函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 处具有严格广义凸性,由式(7)以及极锥的定义,对于任意的 $\boldsymbol{x}$,存在 $w\in T^C(\boldsymbol{y};\Omega)$,使得:

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\langle x_k,w\rangle+\sum_{t\in T}\lambda_t\langle x_t,w\rangle+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\langle b,w\rangle<$$

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k[f_k(\boldsymbol{x})-f_k(\boldsymbol{y})]+\sum_{t\in T}\lambda_t[g_t(\boldsymbol{x},v_t)-g_t(\boldsymbol{y},v_t)]+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=$$

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k[f_k(\boldsymbol{x})-f_k(\boldsymbol{y})]+\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x},v_t)-\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{y},v_t)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\text{ 。}$$

由 $\boldsymbol{x}\in F$,显然有 $g_t(\boldsymbol{x},v_t)\leqslant 0,\forall v_t\in\mathcal{V}_t,t\in T$,则 $\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x},v_t)\leqslant 0$。结合该式有:

$$0<\sum_{k=1}^{m}\alpha_k[f_k(\boldsymbol{x})-f_k(\boldsymbol{y})]-\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\boldsymbol{y},v_t)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\text{。}\tag{11}$$

式(10)和式(11)矛盾,故 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\not\leq\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$成立。　　证毕

注 2　若去掉广义凸性,则定理 2 无法成立。

例 1　设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$,其中 $\boldsymbol{f}=(f_1(x),f_2(x))=(x^3+x^5,x+x^3),x\in\mathbf{R}$,取 $T=[0,1],v_t\in\mathcal{V}_t=[0,3+t]$,设 $g_t:\mathbf{R}\times\mathcal{V}_t\to\mathbf{R}$,其中 $g_t(x,v_t)=-v_t(x^2+x^4),x\in\mathbf{R},v_t\in\mathcal{V}_t,t\in T$。考虑(RSIVP),$m=2,\Omega=(-\infty,0]\subset\mathbf{R}$。通过计算可知,$F=(-\infty,0]$。考虑问题(WD),取 $\bar{y}=0\in\Omega,B=[-1,1],\bar{\boldsymbol{\alpha}}=(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2)=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\in\mathbf{R}_+^2,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\in\mathbf{R}_+^{(T)},\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\in\mathbf{R}_+^2\setminus\{\mathbf{0}\}$。因为对任意的 $v_t\in\mathcal{V}_t$ 和 $t\in T$ 有:

$$N^C(\bar{y};\Omega)=[0,+\infty),\partial^C f_1(\bar{y})=\{0\},\partial^C f_2(\bar{y})=\{1\},\partial_x^C g_t(\bar{y},v_t)=\{0\},$$

所以 $\sum_{k=1}^{m}\bar{\alpha}_k\partial^C f_k(\bar{y})+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t\partial_x^C g_t(\bar{y},v_t)+\sum_{k=1}^{m}\bar{\alpha}_k\varepsilon_k B+N^C(\bar{y};\Omega)=\left\{\frac{1}{4}\right\}+\{0\}+\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]+[0,+\infty)=[0,+\infty)$,因此 $0\in[0,+\infty)$,从而可得$(\bar{y},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in F_{\mathrm{WD}}$。

如果取 $\bar{x}=-1\in F$,则有 $\boldsymbol{f}(\bar{x})=(-2,-2)$, $\boldsymbol{L}(\bar{y},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\bar{x}-\bar{y}\|=\boldsymbol{f}(\bar{y})+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\bar{y},v_t)\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\varepsilon}\|\bar{x}-\bar{y}\|=(0,0)+(0,0)-\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$,故 $\boldsymbol{f}(\bar{x})<\boldsymbol{L}(\bar{y},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\bar{x}-\bar{y}\|$,因此定理2不成立。这是因为函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点$\bar{y}=0\in\Omega$处不满足广义凸性,即 $x_1=0\in\partial^C f_1(\bar{y})=\{0\}$, $x_2=1\in\partial^C f_2(\bar{y})=\{1\}$, $T^C(\bar{y};\Omega)=(-\infty,0]$,取 $y=-1\in\Omega$ 时,有 $f_1(y)-f_1(\bar{y})=-2$,且对任意 $w\in T^C(\bar{y};\Omega)$有$\langle x_1,w\rangle=0$,即 $f_1(y)-f_1(\bar{y})<\langle x_1,w\rangle$。

定理3 (强对偶)设 $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$, $\boldsymbol{g}_T=(g_t)_{t\in T}$, $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{\boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{L}=(L_1,\cdots,L_m)$,假设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in F$ 是(RSIVP)的ε-拟弱有效解,并且在此点处满足鲁棒型约束品性,则存在$(\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in\mathbf{R}_+^m\times\mathbf{R}_+^{(T)}$,使得$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in F_{\mathrm{WD}}$ 且 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})$。

1) 若函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 处具有广义凸性,则$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})$是问题(WD)的ε-拟弱有效解。

2) 若函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 处具有严格广义凸性,则$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})$是问题(WD)的ε-拟有效解。

证明 由引理1可知,存在 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\mathbf{R}_+^m$, $\sum_{k=1}^m\alpha_k=1$, $v_t\in\mathcal{V}_t$, $t\in T$, $\lambda\in A(\bar{\boldsymbol{x}})$,使得:

$$0\in\sum_{k=1}^m\alpha_k\partial^C f_k(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\lambda_t\partial_x^C g_t(\bar{\boldsymbol{x}},v_t)+\sum_{k=1}^m\alpha_k\varepsilon_k B+N^C(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)。\tag{12}$$

令:

$$\bar{\alpha}_k=\frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^m\alpha_k},k=1,\cdots,m,\bar{\lambda}_t=\frac{\lambda_t}{\sum_{k=1}^m\alpha_k},t\in T,$$

其中:$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=(\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_m)\in\mathbf{R}_+^m$, $\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k=1$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}=(\bar{\lambda}_t)_{t\in T}\in\mathbf{R}_+^{(T)}$。又因为:$\frac{1}{\sum_{k=1}^m\alpha_k}N^C(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)\subset N^C(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)$,故当 α_k、λ_t 被 $\bar{\alpha}_k$、$\bar{\lambda}_t$ 所代替,式(12)仍然成立,即:

$$0\in\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k\partial^C f_k(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t\partial_x^C g_t(\bar{\boldsymbol{x}},v_t)+\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k\varepsilon_k B+N^C(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)。$$

因此有$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in F_{\mathrm{WD}}$。又由 $A(\bar{\boldsymbol{x}})=\{\lambda\in\mathbf{R}_+^{(T)}\mid\lambda_t g_t(\bar{x},v_t)=0,\forall v_t\in\mathcal{V}_t,\forall t\in T\}$,则有 $\lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}},v_t)=0$, $\forall v_t\in\mathcal{V}_t$, $\forall t\in T$ 成立,故有 $\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\bar{x},v_t)=\frac{1}{\sum_{k=1}^m\alpha_k}\sum_{t\in T}\lambda_t g_t(\bar{x},v_t)=0$,则:

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}},v_t)\boldsymbol{e}=\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})。$$

先证明1)。因为函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 处具有广义凸性,则由弱对偶定理中的1), $\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})=\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\nless\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{y}\|$,对于任意点$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})\in F_{\mathrm{WD}}$,则$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})$是问题(WD)的ε-拟弱有效解。

再证明2)。因为函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 处具有严格广义凸性,则由弱对偶定理中的2), $\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})=\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\npreceq\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{y}\|$,对于任意点$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})\in F_{\mathrm{WD}}$,则$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})$是问题(WD)的ε-拟有效解。 证毕

注3 若去掉鲁棒型约束品性,则定理3不成立。

例2 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$,其中 $\boldsymbol{f}=(f_1(x),f_2(x))=(2x+\sin x,3x+\cos x)$, $x\in\mathbf{R}$,取 $T=[0,1]$, $v_t\in\mathcal{V}_t=[1,3+2t]$,设 $g_t:\mathbf{R}\times\mathcal{V}_t\to\mathbf{R}$,其中 $g_t(x,v_t)=v_t(2x^2+x^2\sin x)$, $x\in\mathbf{R}$, $v_t\in\mathcal{V}_t$, $t\in T$。考虑问题(RSIVP), $m=2$, $\Omega=(-\infty,0]\subset\mathbf{R}$。通过计算可知, $F=\{0\}$。取 $\bar{x}=0\in F$,则 $\boldsymbol{f}(\bar{x})=(f_1(\bar{x}),f_2(\bar{x}))=(0,1)$。令 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)\in\mathbf{R}_+^2\setminus\{\boldsymbol{0}\}$。对任意 $x\in F$ 有 $f_1(x)+\varepsilon_1\|x-\bar{x}\|=2x+\sin x+\frac{1}{8}\|x\|=0\geqslant f_1(\bar{x})$, $f_2(x)+\varepsilon_2\|x-\bar{x}\|=3x+\cos x+\frac{1}{8}\|x\|=1\geqslant f_2(\bar{x})$,即不存在 $x\in F$,使得 $f_k(x)+\varepsilon_k\|x-\bar{x}\|<f_k(\bar{x})$, $k=1,2$,因此

$\bar{x}$ 是问题(RSIVP)的 ε-拟弱有效解。考虑问题(WD)，取 $\bar{x}=0\in\Omega$，$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)\in\mathbf{R}_+^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ 以及任取 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}\in\mathbf{R}_+^{(T)}$，$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2)\in\mathbf{R}_+^2$ 满足 $\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2=1$。因为对任意的 $v_t\in\mathcal{V}_t$ 和 $t\in T$ 有：$N^C(\bar{x};\Omega)=[0,+\infty)$，$\partial^C f_1(\bar{x})=\partial^C f_2(\bar{x})=\{3\}$，$\partial_x^C g_t(\bar{x},v_t)=\{0\}$。由于 $\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k\partial^C f_k(\bar{x})+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t\partial_x^C g_t(\bar{x},v_t)+\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k\varepsilon_k B+N^C(\bar{x};\Omega)=\{3\}+\{0\}+\left[-\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right]+[0,+\infty)=\left[\frac{23}{8},+\infty\right)$，则 $0\notin\left[\frac{23}{8},+\infty\right)$，故 $(\bar{x},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\notin F_{\mathrm{WD}}$，即不存在 $(\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in\mathbf{R}_+^m\times\mathbf{R}_+^{(T)}$，使得 $(\bar{x},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in F_{\mathrm{WD}}$ 成立。这是因为这里所找的点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in F$ 不满足鲁棒型约束品性，从而导致结论不成立。具体而言，$N^C(\bar{x};F)=\mathbf{R}$，$N^C(\bar{x};\Omega)=[0,+\infty)$，对任意的 $t\in T$ 有 $\partial_x^C g_t(\bar{x},v_t)=\{0\}$，及

$$\bigcup_{\substack{\lambda\in A(\bar{x})\\ v_t\in\mathcal{V}_t}}\left[\sum_{t\in T}\lambda_t\partial_x^C g_t(\bar{x},v_t)\right]+N^C(\bar{x};\Omega)=\{0\}+[0,+\infty)=[0,+\infty)。$$

因此在 $\bar{x}\in F$ 处不满足鲁棒型约束品性。

定理 4　(逆对偶)设 $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$，$\boldsymbol{g}_T=(g_t)_{t\in T}$，$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}$，$\boldsymbol{L}=(L_1,\cdots,L_m)$，假设 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in F_{\mathrm{WD}}$ 且 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})$。

1) 若 $\bar{\boldsymbol{x}}\in F$ 且函数 $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$ 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ 处具有广义凸性，则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(RSIVP)的 ε-拟弱有效解。

2) 若 $\bar{\boldsymbol{x}}\in F$ 且函数 $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$ 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ 处具有严格广义凸性，则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(RSIVP)的 ε-拟有效解。

证明　假设 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in F_{\mathrm{WD}}$，所以存在 $x_k\in\partial^C f_k(\bar{\boldsymbol{x}})$，$k=1,\cdots,m$，$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=(\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_m)\in\mathbf{R}_+^m$，$\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k=1$，$x_t\in\partial_x^C g_t(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_t)$，$\bar{v}_t\in\mathcal{V}_t$，$t\in T$，$\bar{\boldsymbol{\lambda}}\in\mathbf{R}_+^{(T)}$，$b\in B$，使得：

$$0\in\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k\partial^C f_k(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t\partial_x^C g_t(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_t)+\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k\varepsilon_k B+N^C(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega),$$

则等价于：

$$-\left(\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k x_k+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t x_t+\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k\varepsilon_k b\right)\in N^C(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)。\tag{13}$$

先证明 1)。反证：假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是问题(RSIVP)的 ε-拟弱有效解。则存在 $\hat{\boldsymbol{x}}\in F$，使得：

$$f_k(\hat{\boldsymbol{x}})<f_k(\bar{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|,k=1,\cdots,m,$$

从而：

$$\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k f_k(\hat{\boldsymbol{x}})<\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k f_k(\bar{\boldsymbol{x}})-\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|,k=1,\cdots,m,\tag{14}$$

其中：$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=(\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_m)\in\mathbf{R}_+^m$，$\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k=1$。由于函数 $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$ 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ 处具有广义凸性，对于任意的 $\hat{\boldsymbol{x}}$，存在 $w\in T^C(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)$，使得：

$$f_k(\hat{\boldsymbol{x}})-f_k(\bar{\boldsymbol{x}})\geqslant\langle x_k,w\rangle,k=1,\cdots,m,$$

$$g_t(\hat{\boldsymbol{x}},\bar{v}_t)-g_t(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_t)\geqslant\langle x_t,w\rangle,\forall t\in T,$$

$$\langle b,w\rangle\leqslant\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|,\forall b\in B。$$

由极锥的定义，以及式(13)可得：

$$\begin{aligned}0\leqslant&\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k\langle x_k,w\rangle+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t\langle x_t,w\rangle+\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k\varepsilon_k\langle b,w\rangle\leqslant\\&\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k[f_k(\hat{\boldsymbol{x}})-f_k(\bar{\boldsymbol{x}})]+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t[g_t(\hat{\boldsymbol{x}},\bar{v}_t)-g_t(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_t)]+\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|=\\&\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k f_k(\hat{\boldsymbol{x}})-\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k f_k(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\hat{\boldsymbol{x}},\bar{v}_t)-\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_t)+\sum_{k=1}^m\bar{\alpha}_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|。\end{aligned}$$

因此，由 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})=f(\bar{x})+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\bar{x},\bar{v}_t)\boldsymbol{e}$ 可以得到 $\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_t)\boldsymbol{e}=(0,\cdots,0)\in\mathbf{R}^m$，所以 $\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_t)=0$。又由 $\hat{\boldsymbol{x}}\in F$，有 $g_t(\hat{\boldsymbol{x}},\bar{v}_t)\leqslant 0$，则 $\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\hat{\boldsymbol{x}},\bar{v}_t)\leqslant 0$。故：

$$\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\overline{\boldsymbol{x}})=\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\overline{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\hat{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t(\hat{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)+\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\hat{\boldsymbol{x}})+\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|。$$

即：

$$\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\overline{\boldsymbol{x}})-\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\hat{\boldsymbol{x}})。\tag{15}$$

故式(14)和式(15)相互矛盾,则 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 是问题(RSIVP)的 ε-拟弱有效解。

再证明 2)。反证:假设 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 不是问题(RSIVP)的 ε-拟有效解。则存在$\hat{\boldsymbol{x}}\in F$,使得：

$$f_k(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant f_k(\overline{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|,k=1,\cdots,m,$$

上式至少有一个严格不等式成立。显然 $\overline{\boldsymbol{x}}\neq\hat{\boldsymbol{x}}$,从而：

$$\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\overline{\boldsymbol{x}})-\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|,k=1,\cdots,m,\tag{16}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}=(\overline{\alpha}_1,\cdots,\overline{\alpha}_m)\in\mathbf{R}^m_+$, $\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k=1$。由于函数$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_T)$在点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ 处具有严格广义凸性,对于任意的$\hat{\boldsymbol{x}}$,存在 $w\in T^C(\overline{\boldsymbol{x}};\Omega)$,使得：

$$f_k(\hat{\boldsymbol{x}})-f_k(\overline{\boldsymbol{x}})>\langle x_k,w\rangle,k=1,\cdots,m,$$

$$g_t(\hat{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)-g_t(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)\geqslant\langle x_t,w\rangle,\ \forall t\in T,$$

$$\langle b,w\rangle\leqslant\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|,\ \forall b\in B。$$

由极锥的定义,以及式(13)可得：

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k\langle x_k,w\rangle+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t\langle x_t,w\rangle+\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k\varepsilon_k\langle b,w\rangle<$$

$$\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k[f_k(\hat{\boldsymbol{x}})-f_k(\overline{\boldsymbol{x}})]+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t[g_t(\hat{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)-g_t(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)]+\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|=$$

$$\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\hat{\boldsymbol{x}})-\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\overline{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t(\hat{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)-\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)+\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|。$$

因此,由 $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{L}(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\alpha}},\overline{\boldsymbol{\lambda}})=\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)\boldsymbol{e}$ 可以得到 $\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)\boldsymbol{e}=(0,\cdots,0)\in\mathbf{R}^m$,所以 $\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)=0$。又由$\hat{\boldsymbol{x}}\in F$,有 $g_t(\hat{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)\leqslant 0$,则有 $\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t(\hat{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)\leqslant 0$。故：

$$\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\overline{\boldsymbol{x}})=\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\overline{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)<$$

$$\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\hat{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t(\hat{\boldsymbol{x}},\overline{v}_t)+\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\hat{\boldsymbol{x}})+\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|,$$

即：

$$\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\overline{\boldsymbol{x}})-\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k\varepsilon_k\|\hat{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|<\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}_k f_k(\hat{\boldsymbol{x}})。\tag{17}$$

故式(16)和式(17)相互矛盾,则 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 是问题(RSIVP)的 ε-拟有效解。 证毕

4 结论

本文研究了一类不确定非光滑半无限多目标优化问题的最优性条件及其对偶。在 Wolfe 型对偶模型下,分别给出了原问题与 Wolfe 型对偶问题之间的对偶关系,并得到了相应的弱对偶、强对偶以及逆对偶定理。如何进一步提出其他的对偶模型以及鞍点定理,在更弱的广义凸性和约束品性下进行研究是非常有意义的。

参考文献：

[1] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin:Springer,2005.

[2] SAWARAGI Y, NAKAYAMA H, TANINO T. Theory of multiobjective optimization[M]. San Diego: Academic Press, 1985.

[3] MARLER R T, ARORA J S. Survey of multi-objective optimization methods for engineering[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2004, 26(6): 369-395.

[4] CLARKE F H. Optimization and nonsmooth analysis[M]. New York: Wiley-Interscience, 1983.

[5] 高岩. 非光滑优化[M]. 北京:科学出版社, 2008.
GAO Y. Nonsmooth optimization[M]. Beijing: Science Press, 2008.

[6] CHUONG T D, KIM D S. Nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2014, 160(3): 748-762.

[7] CHUONG T D, KIM D S. Approximate solutions of multiobjective optimization problems[J]. Positivity, 2016, 20(1): 187-207.

[8] KABGANI A, SOLEIMANI-DAMANEH M. Characterization of (weakly/properly/robust) efficient solutions in nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization using convexificators[J]. Optimization, 2018, 67(2): 217-235.

[9] LEE J H, LEE G M. On optimality conditions and duality theorems for robust semi-infinite multiobjective optimization problems [J]. Annals of Operations Research, 2018, 269(1): 419-438.

[10] 周俊屹, 郑霜. 鲁棒多目标优化问题的最优性和对偶性[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2019, 36(1): 49-53.
ZHOU J Y, ZHENG S. Optimality and duality for robust multiobjective optimization problems[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2019, 36(1): 49-53.

[11] FAKHAR M, MAHYARINIA M R, ZAFARANI J. On approximate solutions for nonsmooth robust multiobjective optimization problems[J]. Optimization, 2019, 68(9): 1653-1683.

[11] FAKHAR M, ZAFARANI J. On approximate solutions for nonsmooth robust multiobjective optimization problems[J]. Optimization, 2019, 68(9): 1653-1683.

[12] SON T Q, VAN TUYEN N, WEN C F. Optimality conditions for approximate Pareto solutions of a nonsmooth vector optimization problem with an infinite number of constraints[J]. Acta Mathematica Vietnamica, 2020, 45(2): 435-448.

[13] SUN X K, TEO K L, ZENG J, et al. Robust approximate optimal solutions for nonlinear semi-infinite programming with uncertainty[J]. Optimization, 2020, 69(9): 2109-2129.

[14] PHAM T H. On optimality conditions and duality theorems for approximate solutions of nonsmooth infinite optimization problems[J]. Positivity, 2023, 27(1): 19.

[15] PHAM T H, NGUYEN T S. ε-quasi-weakly solution for semi-infinite vector optimization problems with data uncertainty[EB/OL]. (2023-6-13)[2024-10-01]. http://link. springer. com/artide/10. 1007/s40305-023-00489-x.

Operations Research and Cybernetics

Optimality and Duality for Nonsmooth Semi-Infinite Multi-Objective Optimization Problems with Uncertainy

CHEN Jie, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: It examines optimality conditions and dual problems for a category of uncertain nonsmooth semi-infinite multi-objective optimization issues. Initially, the definitions of the strictly generalized convexity and the strictly ε-quasi generalized convexity are presented. Secondly, the sufficient optimality condition for the ε-quasi efficient solution is established under the strictly ε-quasi generalized convexity conditions utilizing the Clarke subdifferential. Finally, Wolfe-type dual problems of ε-quasi-weakly efficient solution and ε-quasi efficient solution are established under the generalized convexity and strictly generalized convexity conditions, respectively, weak dual theorem, strong dual theorem and converse dual theorem are studied. The results acquired enhance the theory concerning uncertain nonsmooth semi-infinite multi-objective optimization issues.

Keywords: multi-objective optimization problems; semi-infinite; duality; generalized convexity

(责任编辑 陈 乔)