

混杂系统基于双测度的实用稳定性分析^{*}

夏正威, 邵文婷

(上海第二工业大学 数理与统计学院 数学系, 上海 201209)

摘要: 混杂系统是一种时间尺度上的动力系统, 具有复杂性和特殊性, 它的演化依赖于连续变量和离散事件之间的相互作用。控制系统的稳定性研究是一个重要问题, 在双测度条件下对一般时间尺度上的混杂系统进行了实用稳定性分析。首先将双测度实用稳定性概念引入到一般时间尺度上的混杂系统的研究。其次利用 Lyapunov 函数以及比较原理, 给出了双测度意义下一般时间尺度混杂系统的实用稳定性判据。上述工作丰富和推进了混杂系统稳定性方面的研究。

关键词: 混杂系统; 实用稳定性; 时间尺度; 双测度; Lyapunov 函数; 比较原理

中图分类号: O175.21

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2025)03-0090-06

控制理论的应用和影响遍及众多行业和领域, 该理论的思想与方法在经济学、人口动力学、物理学、工程学、生物学等领域得到了广泛应用。混杂系统是动力系统的一种, 主要研究同时包含连续变量动态过程和离散时间动态过程的复杂系统, 它的特性表现为连续变量和离散事件之间的相互作用^[1]。连续动态过程通常由微分方程描述; 对于离散动态过程, 学者常采用计算机程序建模的方法, 例如通过程序控制数字计算器、传感器、执行器等离散电子元件。在连续时刻根据给定的切换规则就可以改变系统的结构, 从而产生了混杂系统^[2]。在混杂系统中, 时间作为一个关于实数的任意闭集, 被称为时间尺度。

稳定性是系统控制理论研究中极为重要的课题, 在生物系统^[3]、网络安全问题^[4-6]、交通系统^[7]、电力系统、生产过程的监控与调度等领域具有非常重要的理论意义和实际应用价值^[4,8]。

自 1989 年混杂系统被提出以来, 众多研究人员致力于寻找能使之稳定的充分条件^[9]。已有的研究成果主要是在 Lyapunov 意义下的稳定性^[1,10-17]及渐近稳定性^[8,18-21]。文献[8]考虑了受逻辑选择影响的脉冲微分系统, 采用矩阵半张量积理论, 给出了系统渐近稳定的判据。文献[10]考虑一阶齐次脉冲正系统的有限时间稳定性问题, 将最大可分离 Lyapunov 函数和平均脉冲区间法结合, 给出了有限时间稳定性的充分条件。文献[11]针对具有混合脉冲的连续时间和离散时间切换正线性时滞系统, 利用比较原理和余正 Lyapunov 函数得出了系统全局指数稳定性判据。文献[12]考虑了离散时间脉冲时滞系统, 采用 Lyapunov 函数和 Razumikhin 技术给出了一些实用的稳定性判据。文献[13-15]考虑了一阶连续时间和离散时间齐次脉冲正时滞系统的稳定性, 利用最大可分离 Lyapunov 函数和 Razumikhin 技术, 首次给出了这 2 类系统的稳定性或全局指数稳定性判据。文献[16]采用 Lyapunov 函数研究了非线性离散时间情形下变脉冲时滞系统的输入状态稳定性。文献[17]考虑了一类受约束的非线性脉冲混杂系统, 通过构造一类障碍 Lyapunov 函数, 结合矩阵理论、凸分析法和数学归纳法, 给出了系统稳定的充分条件。文献[20]针对时滞扰动混杂系统, 利用单 Lyapunov 函数得出了系统渐近稳定的充分条件。

本文首先给出一般时间尺度混杂系统在双测度条件下的稳定性概念, 随后充分利用 Lyapunov 函数和比较原理, 得出了该系统实用稳定性判据。

1 预备知识及系统描述

本节给出下列定义作为本文的预备知识^[22-23]。

* 收稿日期: 2023-11-02 修回日期: 2024-06-04 网络出版时间: 2025-05-19T09:01

资助项目: 国家自然科学基金——青年科学基金项目(No. 12001362), 面上项目(No. 11526132); 上海市自然科学基金项目(No. 16ZR1412700)

第一作者简介: 夏正威, 男, 讲师, 研究方向为系统动力学稳定性, E-mail: zwxia@sspu.edu.cn; 通信作者简介: 邵文婷, 女, 副教授, 博士, E-mail: wtshao@sspu.edu.cn

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/50.1165.n.20250515.1857.030>

令 $T: t_0 \rightarrow \infty$ 是一个时间测度, T 是 $\mathbf{R}$ 的任意非空闭子集, 且具有顺序和拓扑结构。时间尺度可以是连续的, 也可以是离散的。因此引入跳跃运算符的概念。

定义 1 令映射 $\sigma, \rho: T \rightarrow T$, 且满足 $\sigma(t) = \inf\{s \in T \mid s > t\}$, $\rho(t) = \sup\{s \in T \mid s < t\}$, 称 σ, ρ 为跳跃运算符。

定义 2 假设 $t \in T$, 如果映射 $\sigma(t) > t$, 则称点 t 是右离散的, 记作 s_R ; 如果映射 $\sigma(t) = t$, 称点 t 是右稠密的, 记作 d_R ; 如果映射 $\rho(t) < t$, 称点 t 是左离散的, 记作 s_L ; 如果映射 $\rho(t) = t$, 称点 t 是左稠密的, 记作 d_L 。

定义 3 令映射 $\mu^*: T \rightarrow \mathbf{R}_0^+$, $\mu^*(t) = \sigma(t) - t$ 。当 $T = \mathbf{Z}$ 时, $\mu^*(t) \equiv 1$; 当 $T = \mathbf{R}$ 时, $\mu^*(t) \equiv 0$ 。

定义 4 令映射 $g: T \rightarrow \mathcal{X}$ 是 d_R 连续, 其中 $\mathcal{X}$ 是一个 Banach 空间, 且满足:

- 1) 在每一个 d_R 的点 $t (t \in T)$ 处, 则 g 是连续的;
- 2) 在每一个 d_L 的点 $t (t \in T)$ 处, 则左极限 $\lim_{t \rightarrow t^-} g(t)$ 存在。

进一步地, 记从 T 到 $\mathcal{X}$ 上所有 d_R 连续映射所构成的集合为 $C_{d_R}[T, \mathcal{X}]$ 。需要注意的是, 如果 T 包含 d_L 和 s_R 的点 $t (t \in T)$, 则 d_R 连续将不包含连续性, 然而在离散时间域上这两者是统一的。

定义 5 映射 $u: T \rightarrow \mathcal{X}$ 在点 $t (t \in T)$ 处可微: 如果存在 $a \in \mathcal{X}$, 使得对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 t 的邻域 $N(\epsilon)$, 满足对任意的 $s (s \in N(\epsilon))$, 有 $|u(\sigma(t)) - u(s) - a(\sigma(t) - s)| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$ 。

特别地, 当 $T = \mathbf{Z}$ 时, $a = u(t+1) - u(t)$; 当 $T = \mathbf{R}$ 时, $a = d(u(t))/d(t)$, 如下定义一个 u 的导数 $u^\Delta(t)$ 。

定义 6 定义 $u(t)$ 的一种导数 $u^\Delta(t)$, 具有下列基本性质:

- 1) 如果 $u(t)$ 在 t 处可微, 则它在 t 处连续;
- 2) 如果 $u(t)$ 在 t 处可微且点 t 是 s_R 点, 则 $u(t)$ 是可微的, 并且 $u^\Delta(t) \triangleq \frac{u(\sigma(t)) - u(t)}{\mu^*(t)}$ 。

定义 7 定义 Dini 导数 $D^+ u^\Delta(t)$: 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 t 的右邻域 $N_R(\epsilon) \subset N(\epsilon)$, 对任意的 $s, s \in N_R(\epsilon)$, $s > t$, 满足 $\frac{u(\sigma(t)) - u(s)}{\mu(t, s)} < D^+ u^\Delta(t) + \epsilon$, 其中 $\mu(t, s) \equiv \sigma(t) - s$ 。

进一步地, 如果 t 是 s_R 点且 u 在 t 处连续, 则定义 $D^+ u^\Delta(t) = \frac{u(\sigma(t)) - u(t)}{\mu^*(t)}$ 。

定义 8 令映射 $g: T \rightarrow \mathcal{X}$ 。若映射 $f: T \rightarrow \mathcal{X}$ 在 T 上可微且满足 $f^\Delta(t) = g(t)$, 对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 则称 $f(t)$ 是 $g(t)$ 在 T 上的反导数。具有以下性质:

- 1) 如果 $g(t)$ 是 d_R 连续的, 则有反导数 $f: t \rightarrow \int_r^t g(s) ds, r, t \in T$;
- 2) 如果 d_R 连续函数集 $\{g_n: T \rightarrow \mathcal{X}\}_{n \in \mathbf{N}}$ 在 $[r, s]$ 上一致收敛到 d_R 连续函数 g , 则有:

$$\left\{ \int_r^s g_n(t) dt \right\}_{n \in \mathbf{N}} \Rightarrow \int_r^s g(t) dt \in \mathcal{X}。$$

定义 9 映射 $f: T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 是 d_R 连续的, 如果:

- 1) f 在点 (t, x) 处关于 d_R 点 $t (t \in T)$ 连续;
- 2) 极限 $\lim_{(s, y) \rightarrow (t^-, x)} f(s, y) = f(t^-, x), \lim_{y \rightarrow x} f(t, y) = f(t, x)$ 在点 (t, x) 处关于 d_L 的点 t 存在。

由定义 7, 假设 $V \in C_{d_R}[T \times \mathbf{R}^n, I]$, 其中 $I = [0, +\infty)$ 。Dini 导数 $D^+ V^\Delta(t, x(t))$ 定义为: 对任意的 $\epsilon (\epsilon > 0)$, 存在 t 的右邻域 $N_R(\epsilon) \subset N(\epsilon)$, 对任意的 $s, s \in N_R(\epsilon), s > t$, 满足:

$$\frac{1}{\mu(t, s)} [V(\sigma(t), x(\sigma(t))) - V(s, x(s) - \mu(t, s)f(t, x(t)))] < D^+ V^\Delta(t, x(t)) + \epsilon。$$

进一步地, 如果 $V(t, x)$ 在 s_R 点 t 处连续, 则有:

$$D^+ V^\Delta(t, x(t)) = \frac{V(\sigma(t), x(\sigma(t))) - V(t, x(t))}{\mu^*}。$$

定义 10 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的包含原点的开子集。函数 $\phi: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ 在 Ω 上是单调增加的: 当 $u > v$ 时, $\phi(u) > \phi(v)$; 当 $u \geq v$ 时, $\phi(u) \geq \phi(v), \forall u, v \in \Omega$ 。

现在考虑如下定义在一般时间尺度 T 上的混杂系统:

$$x^\Delta = f(t, x, \lambda_k(\tau_k, x_k)), t \in [\tau_k, \tau_{k+1}], \quad (1)$$

$$x(\tau_k) = x_k \in \mathbf{R}^n, k=0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

其中:映射 $f \in C_{d_R}[T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n], \lambda_k \in [T \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$ 。 $\tau_k (\tau_k \in T)$ 满足 $0 \leq t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots, \tau_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ 。

定义混杂系统(1)~(2)的解为:

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), t_0 \leq t \leq \tau_1; \\ x_1(t), \tau_1 \leq t \leq \tau_2; \\ \dots \\ x_k(t), \tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}; \\ \dots \end{cases}$$

其中: $x_k(t) = x_k(t, \tau_k, x_k)$ 是动力系统 $x_k^\Delta = f(t, x_k(t), \lambda_k(\tau_k, x_k)), \tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}, x_k(\tau_k) = x_k \in \mathbf{R}^n, k=0, 1, 2, \dots$ 的解。不失一般性,假设对任意的 $t(t \geq t_0)$, 系统(1)~(2)的解存在且唯一。

同时引入纯量比较混杂动力系统:

$$u^\Delta = g(t, u, \sigma_k(u_k)), \tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}, \quad (3)$$

$$u(\tau_k) = u_k \in I, k=0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

其中:映射 $g \in C_{d_R}[T \times I \times I, \mathbf{R}], \sigma_k \in C[I, \mathbf{R}]$ 。定义最大解 $r(t) = r(t, t_0, u_0)$, 即:

$$r(t) = \begin{cases} r_0(t), t_0 \leq t \leq \tau_1; \\ r_1(t), \tau_1 \leq t \leq \tau_2; \\ \dots \\ r_k(t), \tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}; \\ \dots \end{cases}$$

其中: $r_k(t) = r_k(t, \tau_k, u_k)$ 满足系统 $u^\Delta = g(t, u_k(t), \sigma_k(u_k)), \tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}, u_k(\tau_k) = u_k \in I$ 。

2 主要结论

首先利用 Lyapunov 函数证明所需的比较定理。

定理 1 假设: 1) $V \in C_{d_R}[T \times \mathbf{R}^n, I], V(t, x)$ 对于任意 d_R , 点 $t(t \in T)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件且当 $\tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}, k=0, 1, 2, \dots$ 时, 有:

$$D^+ K(t) V(t, x(t)) + K(t) D^+ V(t, x(t)) \leq g(t, K(t) V(t, x(t)), \sigma_k(K(\tau_k) V(\tau_k, x_k))), \\ K(\tau_k^+) V(\tau_k^+) \leq \psi(K(\tau_k^+) V(\tau_k^+)).$$

2) $K: I \rightarrow I, g \in C_{d_R}[T \times I \times I, \mathbf{R}], \sigma_k \in C[I, \mathbf{R}], g(t, u, v) \mu^*(t) + u$ 对每一个 (t, v) 在 u 上非减, $\sigma_k(v), g(t, u, v)$ 关于 v 非减;

3) 系统(3)~(4)的最大解 $r(t) = r(t, t_0, u_0), t \geq t_0, t \in T$ 存在。

那么当 $K(t_0) V(t_0, x_0) \leq u_0$ 时, 对系统(1)~(2)的任意解 $x(t) = x(t, t_0, u_0)$ 有以下估计:

$$K(t) V(t, x(t)) \leq r(t), t \geq t_0, t \in T。$$

其中:

$$K(t) V(t, x(t)) = \begin{cases} K(t) V(t, x_0(t)) \leq r_0(t), t_0 \leq t \leq \tau_1; \\ K(t) V(t, x_1(t)) \leq r_1(t), \tau_1 \leq t \leq \tau_2; \\ \dots \\ K(t) V(t, x_k(t)) \leq r_k(t), \tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}; \\ \dots \end{cases}$$

证明 由于

$$D^+ [K(t) V(t, x(t))] = D^+ K(t) V(t, x(t)) + K(t) D^+ V(t, x(t)),$$

此时, 令 $m(t) = K(t) V(t, x(t))$ 。不失一般性, 假设存在一个 $t_1 > t_0$, 令 $t \in (t_0, t_1) \cap T$ 。由定理的已知条件及比较文献[24]的引理得到 $m(t) \leq r(t)$ 。特别地, $m(t_1) \leq r(t_1)$ 。由条件 1) 得到:

$$m(t_1^+) \leq \phi(K(t_1)V(t_1, x(t_1))) \leq \phi(r(t_1)) = r(t_1^+).$$

类似地,总可以证得 $m(t) \leq r(t)$, 即 $K(t)V(t, x(t)) \leq r(t), t \in (t_i, t_{i+1}) \cap T, i=1, 2, \dots$

证毕

定义 11^[23] 令 $h_0, h \in G \triangleq \{h \in C[I \times \mathbf{R}^n, I] \mid \inf h(t, x) = 0\}$. 混杂系统(1)~(2)是:

- 1) (h_0, h) -实用稳定的:若给定 $(\lambda, A), 0 < \lambda < A, h_0(t_0, x_0) < \lambda$ 蕴含 $h(t, x(t)) < A$ 成立, 其中 $t \geq t_0, t \in T$;
- 2) (h_0, h) -拟实用稳定的:若给定 $(\lambda, B, T_0) > 0, h_0(t_0, x_0) < \lambda$ 蕴含 $h(t, x(t)) < B$ 成立, 其中 $t \geq t_0 + T_0, t_0 + T_0 \in T$;
- 3) (h_0, h) -强实用稳定的, 若 1) 和 2) 同时成立;
- 4) (h_0, h) -实用渐近稳定的, 若 1) 成立且对任意给定的 $\epsilon > 0, \lambda > 0$, 存在 $T_0 > 0, t_0 + T_0 \in T, h_0(t_0, x_0) < \lambda$ 蕴含 $h(t, x(t)) < \epsilon$ 成立, 其中 $t \geq t_0 + T_0$.

下面对混杂系统(1)~(2)的实用稳定性进行分析, 给出系统关于 (h_0, h) -实用稳定的充分条件.

定理 2 假设定理 1 的条件 1) 和 2) 成立, 且 $K(t)V(t, x(t))$ 满足:

$$b(h(t, x)) \leq K(t)V(t, x) \leq a(h(t, x)), (t, x) \in T \times \mathbf{R}^n,$$

其中: $a, b \in M \triangleq \{d \in C[I, I]\}$ 使得 $d(0) = 0, d(v)$ 递增且 $a(\lambda) < b(A), h \in G$. 那么比较系统(3)~(4)的实用稳定性蕴含混杂系统(1)~(2)相应的 (h_0, h) -实用稳定性.

证明 首先假设比较系统(3)~(4)是实用稳定的. 给定 $(a(\lambda), b(A))$, 于是由 $0 \leq u_0 < a(\lambda)$ 得到混杂系统(3)~(4)的任意解 $u(t, t_0, u_0)$ 满足 $u(t, t_0, u_0) < b(A), t \geq t_0, t \in T$. 令 $h_0(t_0, x_0) < \lambda$, 则有混杂系统(1)~(2)的任意解 $x(t) = x(t, t_0, u_0)$ 满足: $h(t, x(t)) < A, t \geq t_0, t \in T$.

否则, 必然存在一个 $t_1 > t_0, t_1 \in T$ 以及解 $x(t) = x(t, t_0, u_0)$, 当 $h_0(t_0, x_0) < \lambda$ 时, 有:

$$h(t_1, x(t_1)) \geq A, h(t, x(t)) < A, t_0 \leq t \leq t_1.$$

从而有:

$$K(t_1)V(t_1, x(t_1)) \geq b(h(t_1, x(t_1))) \geq b(A). \quad (5)$$

取 $K(t_0)V(t_0, x_0) = u_0$, 则有 $K(t)V(t, x) \leq r(t, t_0, K(t_0)V(t_0, x_0)), t_0 \leq t \leq t_1$.

进一步得到:

$$K(t_1)V(t_1, x_1) \leq r(t_1, t_0, K(t_0)V(t_0, x_0)) \leq r(t_1, t_0, a(\lambda)) < b(A),$$

上式与式(5)矛盾. 由此证明了混杂系统(1)~(2)是 (h_0, h) -实用稳定的.

最后, 将证明混杂系统(1)~(2)对于给定的 $(\lambda, A, B, T_0), \lambda < A, t_0 + T_0 \in T$ 是实用稳定的.

假设比较系统(3)~(4)关于 $(a(\lambda), b(A), b(B), T_0) > 0$ 是 (h_0, h) -强实用稳定的. 根据稳定性的定义, 只需证明混杂系统(1)~(2)是 (h_0, h) -拟实用稳定的.

由于比较系统(3)~(4)是 (h_0, h) -拟实用稳定的, 从而有 $0 \leq u_0 < a(\lambda)$, 于是得到比较系统(3)~(4)的任意解 $u(t, t_0, u_0)$ 满足 $u(t, t_0, u_0) < b(B), t \geq t_0 + T_0$.

另一方面, 由于比较系统(3)~(4)是 (h_0, h) -实用稳定的, 则 $h_0(t_0, x_0) < \lambda$, 由此得到 $h(t, x(t)) < A, t \geq t_0$. 于是有如下估计:

当 $t \geq t_0$ 时, 有 $K(t)V(t, x) \leq r(t, t_0, u_0)$;

当 $t \geq t_0 + T_0$ 时, 有 $b(h(t, x(t))) \leq K(t)V(t, x) \leq r(t, t_0, K(t_0)V(t_0, x_0)) \leq r(t, t_0, a(\lambda)) < b(A)$.

由此发现只要 $h_0(t_0, x_0) < \lambda$, 就有 $h(t, x(t)) < A, t \geq t_0 + T_0$ 成立. 即混杂系统(1)~(2)的 (h_0, h) -强实用稳定性获证.

用同样的方法可以证明混杂系统(1)~(2)的渐近稳定性.

证毕

3 结束语

本文研究了一般时间尺度上的混杂系统在双测度条件下的实用稳定性, 给出了这类系统的实用稳定性的一些判据. 目前混杂系统在双测度条件下的稳定性研究成果并不多, 期待本文的工作能丰富该方面的研究.

参考文献:

- [1] 李卫东, 王中科. 混杂系统稳定性条件扩展及等价分析[J]. 大连交通大学学报, 2012, 33(2): 87-89.

- LI W D, WANG Z K. Equivalent analysis of stability condition extension for hybrid systems[J]. Journal of Dalian Jiaotong University, 2012, 33(2): 87-89.
- [2] 高琛,白雪,赵不赓. 一类随机混杂系统的稳定性分析[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(6): 62-64.
GAO C, BAI X, ZHAO B H. Stability analysis of a class of stochastic hybrid systems[J]. Computer Engineering and Applications, 2013, 49(6): 62-64.
- [3] LI F F. On the logical control of Markovian jump Boolean networks; a generalization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2023, 53(3): 1872-1881.
- [4] 李芳菲,孙继涛. 切换布尔网络稳定性的牵制控制[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(3): 390-398.
LI F F, SUN J T. Pinning control for the stability of switched Boolean networks[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2016, 36(3): 390-398.
- [5] LI F F, LU X W. Stability of a switched Boolean network *via* designing switching laws[J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2016, 15(2): 491-502.
- [6] LI F F. Stability of Boolean networks with delays using pinning control[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2018, 5(1): 179-185.
- [7] ZHANG Y, BAI Y, HU J, et al. Control design, stability analysis, and traffic flow implications for cooperative adaptive cruise control systems with compensation of communication delay[J]. Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board, 2020, 2674(8): 638-652.
- [8] SUO J H, SUN J T. Asymptotic stability of differential systems with impulsive effects suffered by logic choice[J]. Automatica, 2015, 51: 302-307.
- [9] 王诗云,赵宇,单锋,等. 混杂系统的双测度稳定性及应用[J]. 沈阳航空工业学院学报, 2009, 26(4): 88-90.
WANG S Y, ZHAO Y, SHAN F, et al. The stability in terms of two measures of hybrid system and its application[J]. Journal of Shenyang Institute of Aeronautical Engineering, 2009, 26(4): 88-90.
- [10] YANG H T, ZHANG Y. Finite-time stability of homogeneous impulsive positive systems of degree one[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2019, 38(11): 5323-5341.
- [11] HONG S S, ZHANG Y. Stability of switched positive linear delay systems with mixed impulses[J]. International Journal of Systems Science, 2019, 50(16): 3022-3037.
- [12] LIN Y, ZHANG Y. New results on stability of discrete-time impulsive systems with time delays[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2019, 38(10): 4572-4596.
- [13] YANG H T, ZHANG Y. Impulsive control of continuous-time homogeneous positive delay systems of degree one[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(11): 3341-3362.
- [14] YANG H T, ZHANG Y. Exponential stability analysis for discrete-time homogeneous impulsive positive delay systems of degree one[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(4): 2295-2329.
- [15] YANG H T, ZHANG Y. Exponential stability of homogeneous impulsive positive delay systems of degree one[J]. International Journal of Control, 2021, 94(1): 75-88.
- [16] LI J, ZHANG Y. Input-to-state stability of discrete-time time-varying impulsive delay systems[J]. International Journal of Systems Science, 2022, 53(14): 2860-2875.
- [17] 李亮亮,姜文琳. 障碍函数法在状态约束混杂系统稳定性中的应用[J]. 淮北师范大学学报(自然科学版), 2022(4): 13-17.
LI L L, JIANG W L. Application of barrier function method to stability of state constrained hybrid systems[J]. Journal of Huaibei Normal University (Natural Sciences), 2022(4): 13-17.
- [18] 李卫东,汪军. 一类混杂系统的稳定性分析[J]. 辽宁工程技术大学学报, 2004, 23(1): 133-134.
LI W D, WANG J. Stability analysis of a hybrid system[J]. Journal of Liaoning Technical University, 2004, 23(1): 133-134.
- [19] 宗广灯,武玉强,杨洪勇. 一类离散时间切换混杂系统鲁棒控制[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(5): 728-732.
ZONG G D, WU Y Q, YANG H Y. Robust control for a class of discrete time switched hybrid systems[J]. Control Theory & Applications, 2005, 22(5): 728-732.
- [20] 张贤波. 带时滞的混杂系统的稳定性[J]. 河南科技, 2011, 30(6): 41.
ZHANG X B. Stability of hybrid systems with time delay[J]. Journal of Henan Science and Technology, 2011, 30(6): 41.
- [21] 王娟,何俊杰,慕小武. 一类不确定离散混杂系统的稳定性[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(16): 197-202.
WANG J, HE J J, MU X W. Stability of a class of discrete-time complex system[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2013,

43(16):197-202.

- [22] LAKSHMIKANTHAM V, SIVASUNDARAM S, KAYMAKÇALAN B. Dynamic systems on measure chains[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [23] LAKSHMIKANTHAM V, LEELA S, MARTYNYUK A A. Practical stability of nonlinear systems[M]. Singapore: World Science, 1990.
- [24] LIU X Z. Practical stabilization of control systems with impulse effects[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992, 166(2):563-576.

Practical Stability Analysis for Hybrid Systems in Terms of Two Measures

XIA Zhengwei, SHAO Wenting

(Department of Mathematics, School of Mathematics, Physics and Statistics,
Shanghai Polytechnic University, Shanghai 201209, China)

Abstract: The hybrid system is a kind of dynamic systems on time scales, its evolution demonstrates the interplay of continuous variables and discrete events. The research of the stability for control systems is an important issue to the theory exploring and engineering practice. For the hybrid system, even if each subsystem is stable, it does not mean that the whole system is stable; on the contrary, if one or several subsystems are unstable, the whole system may also be stable, which is the complexity and specificity of the hybrid system. In practice, when the designed system is in a mathematically unstable state and it swings sufficiently close to this state, this performance is acceptable according to the definition of the practical stability. Therefore, it is meaningful to propose the concept of the practical stability on time scales for hybrid systems. The main contribution is to present the practical stability analysis of hybrid systems in terms of two measures on time scales. First, some concepts of the practical stability in terms of two measures are introduced into the research of hybrid systems on general time scales. Then, by means of Lyapunov functions and the comparison principle, some sufficient conditions of the practical stability for hybrid systems in terms of two measures on general time scales are obtained. Above work enriches and promotes the research on the stability of hybrid systems.

Keywords: hybrid systems; practical stability; time scales; two measures; Lyapunov functions; comparison principle

(责任编辑 黄 颖)