

一类具有性别结构的 SIQR 传染病模型的动力学分析*

邵红, 杨志春

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:对一类男女比率不同的传染病模型进行动力学行为分析。首先验证模型的正定性和有界性;其次通过再生矩阵法计算传染病模型的基本再生数,即传染病最终是否消亡的阈值;然后利用 Hurwitz 判据讨论平衡点的局部稳定性;最后构造 Lyapunov 泛函,通过 LaSalle 不变集原理得到全局渐近稳定的阈值条件。研究结果为无病平衡点在基本再生数小于 1 时局部稳定且全局渐近稳定,基本再生数大于 1 时存在唯一的正平衡点,该点局部稳定且全局渐近稳定。研究结果拓展了与性别结构有关的传染病动力学模型的内容。

关键词:性别结构;SIQR 传染病模型;基本再生数;平衡点;全局稳定性

中图分类号:O175

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2025)03-0096-07

传染病严重威胁人类健康,给人类社会经济发展带来诸多不利影响;为了实现对传染病的有效防控,科学家们通过各种方法对它进行研究。其中,传染病动力学主要是通过数学方法对传染病进行定量研究。近些年来,国际上的传染病动力学的发展迅速,大量的数学模型被用于分析各种各样的传染病问题。

Kermack 等人^[1]于 1927 年创立了经典的“SIR 仓室”模型,其他如 SIQR、SIER 等传染病模型均在此基础上建立。1927 年之后,学者们研究了一系列关于 SIQR 传染病模型的动力学阈值问题^[2-6],但均未考虑性别结构的因素。也有学者分析了具有性别结构的传染病模型,2014 年, Athithan 等人^[7]研究了一类具有感染者筛查与性别结构的 HIV/AIDS 模型;2017 年, Gumel 等人^[8]提出了具有 2 组性别的传播动力学模型,用于评估社区层面的治疗措施和避孕套使用对梅毒传播动态及其防控效果的影响;2021 年, Rathinasamy^[9]在文献^[7]的基础上考虑具有白噪声的动力学模型;2022 年, 赵晓琦^[10]证明了文献^[9]中一个不等式是错误的,并重新给出证明方法,证明了疾病的灭绝;2023 年, 杨雪^[11]讨论了一类带有性别结构的 HIV/AIDS 模型,该模型考虑了 HIV 在同性(男)与异性之间的传播。但上述文献未考虑具有隔离因素的传染病模型,而一些传染病对于男性与女性有着不同的感染率,故使用相同感染率的传染病模型对这些疾病的预测会出现偏差。因此,本文基于 SIQR 模型^[12]提出了一种新的具有性别结构的 SIQR 传染病动力学模型。

1 模型的建立

本文在马知恩等人^[12]建立的 SIQR 模型的基础上,考虑感染者有男、女性别之分的模型。首先构建该传染病模型的传播机理图(图 1)。图 1 中: A 表示常数输入率, μ 为自然死亡率系数, μ_1 为未隔离感染者的死亡率系数, μ_2 为隔离感染者的死亡率系数, ϵ 为感染者隔离的隔离率系数, β_1 为男性感染者的感染率系数, β_2 为女性感染者的感染率系数, γ 为感染者的恢复率系数, δ 为隔离者的恢复率系数, S 为易感者人群, I_m 为男性感染者人群, I_w 为女性感染者人群, Q 为隔离人群, R 为恢复人群。

* 收稿日期:2024-04-23 修回日期:2024-08-18 网络出版时间:2025-05-16T11:49

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11971081, No. 12471153);重庆市英才计划项目(No. cstc2024ycjh-bgzxm0046);中国高等教育学会高等教育科学研究规划课题(No. 24SX0305);重庆师范大学高等教育教学改革研究项目(No. 202223)

第一作者简介:邵红,男,研究方向为微分方程与动力系统,E-mail:1404814231@qq.com;通信作者:杨志春,男,教授,博士生导师,E-mail: yangzhch@126.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250515.1659.022

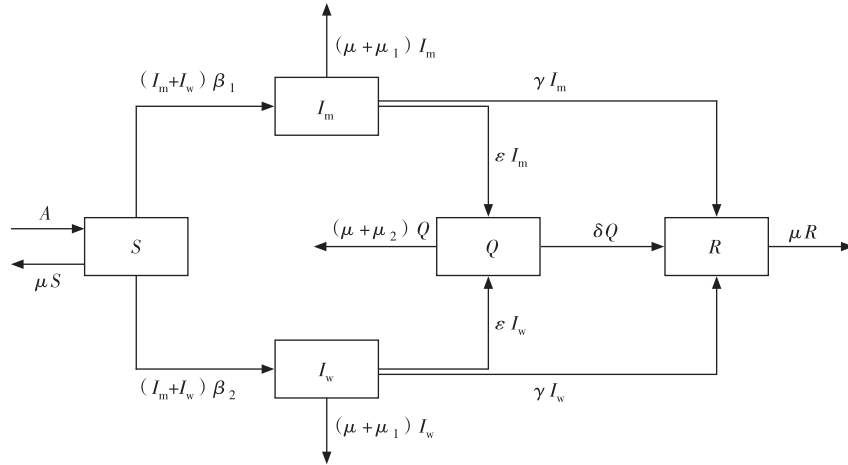


图1 传染病传播机理

Fig. 1 Mechanism diagram of infectious disease transmission

根据以上内容,建立如下的生物数数学模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta_1(I_m + I_w)S - \beta_2(I_m + I_w)S - \mu S, \\ \frac{dI_m}{dt} = \beta_1(I_m + I_w)S - (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)I_m, \\ \frac{dI_w}{dt} = \beta_2(I_m + I_w)S - (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)I_w, \\ \frac{dQ}{dt} = \epsilon(I_m + I_w) - (\delta + \mu + \mu_2)Q, \\ \frac{dR}{dt} = \delta Q + \gamma(I_m + I_w) - \mu R. \end{cases}$$

因为上述系统的前4个方程与第5个无关,故考虑以下系统:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta_1(I_m + I_w)S - \beta_2(I_m + I_w)S - \mu S, \\ \frac{dI_m}{dt} = \beta_1(I_m + I_w)S - (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)I_m, \\ \frac{dI_w}{dt} = \beta_2(I_m + I_w)S - (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)I_w, \\ \frac{dQ}{dt} = \epsilon(I_m + I_w) - (\delta + \mu + \mu_2)Q. \end{cases} \quad (1)$$

接下来对模型解的存在性及稳定性进行分析,并给出模型的数值模拟。

2 解的非负性和有界性

为了使提出的系统符合生物背景,下面讨论模型解的正性与有界性,并且在定理1的生物背景下讨论系统(1)的动力学行为。

定理1 若 $(S(t), I_m(t), I_w(t), Q(t), R(t))$ 是系统(1)的解,且满足初值条件:

$$S(0) > 0, I_m(0) > 0, I_w(0) > 0, Q(0) > 0, R(0) > 0,$$

则系统(1)的解具有正性且最终一致有界。

证明 利用反证法证明 $S(t) \geq 0$ 。

假设 t_1 为 $S(t)$ 第1次穿过 t 轴的时间,则 $S(t_1) = 0$,且在 t_1 的右邻域 $S(t)$ 为负。将 t_1 代入系统(1)的第1个方程,有 $\dot{S}(t_1) = A > 0$,则存在充分小的 $\epsilon_1 > 0$,使得在区间 $(t_1, t_1 + \epsilon_1)$ 上有 $S(t) > 0$ 成立,这与假设矛盾,从而 $S(t)$ 不会穿过 t 轴,即 $S(t) \geq 0$ 。

同理可假设 t_2 为第 1 个使 $S(t)=0$ 的点, 证明 $S(t) \neq 0$, 最终有 $S(t) > 0$ 。

为了方便计算, 记 $I_m + I_w = I$, 将系统(1)的第 2、3 式相加得: $\frac{dI}{dt} = (\beta_1 + \beta_2)SI - (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)I$, 可解得微分方程 $I(t) = Ce^{(\beta_1 + \beta_2) \int S(t) dt - (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)t}$, 代入初值 $I(0) > 0$, 可得 $C > 0$, 故有 $I(t) > 0$ 。

由系统(1)的第 4 个式子可得

$$\frac{dQ}{dt} = \epsilon I - (\mu + \delta + \mu_2)Q \geq -(\mu + \delta + \mu_2)Q,$$

由比较定理得 $Q(t) \geq Q(0)e^{-(\delta + \mu + \mu_2)t} > 0$ 。

同理可证 $I_m(t) > 0, I_w(t) > 0$ 。记 $N(t) = S(t) + I_m(t) + I_w(t) + Q(t) + R(t)$, 则有:

$$\frac{dN}{dt} = A - \mu N - \mu_1 I - \mu_2 Q \leq A - \mu N,$$

由比较定理可得 $N(t) \leq \frac{A}{\mu} - \frac{A}{\mu}e^{-\mu t} + N(0)e^{-\mu t}$, 进而有 $\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{A}{\mu}$ 。

综上所述, 系统(1)的解是正的且有界的, 故

$$D = \left\{ (S, I_m, I_w, Q) \in \mathbf{R}^4 \mid S > 0, I_m > 0, I_w > 0, Q > 0, 0 < S + I_m + I_w + Q \leq \frac{A}{\mu} \right\}$$

是系统(1)的正不变集, 定理 1 得证。

证毕

下面讨论系统(1)的平衡点的存在唯一性与基本再生数。

3 平衡点与基本再生数

由于 R_0 是一个非常重要的阈值条件, 也是本文的关键点, 所以接下来先求得系统(1)的基本再生数 R_0 , 再利用 R_0 讨论平衡点的稳定性。

令 $\mathbf{X} = (I_m, I_w, Q)$, 则在 E_0 处的 Jacobian 矩阵可分解为:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \beta_1 S_0 & \beta_1 S_0 & 0 \\ \beta_2 S_0 & \beta_2 S_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \epsilon + \mu + \gamma + \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon + \mu + \gamma + \mu_1 & 0 \\ -\epsilon & -\epsilon & \mu + \mu_2 + \delta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{FV}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1 A}{\mu(\epsilon + \mu + \gamma + \mu_1)} & \frac{\beta_1 A}{\mu(\epsilon + \mu + \gamma + \mu_1)} & 0 \\ \frac{\beta_2 A}{\mu(\epsilon + \mu + \gamma + \mu_1)} & \frac{\beta_2 A}{\mu(\epsilon + \mu + \gamma + \mu_1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此, 根据下一代矩阵法^[13], 得到基本再生数 R_0 为 $\mathbf{FV}^{-1}$ 的谱半径, 且 $R_0 = \rho(\mathbf{FV}^{-1}) = \frac{(\beta_1 + \beta_2)A}{\mu(\epsilon + \mu + \gamma + \mu_1)}$ 。

定理 2 系统(1)有唯一的无病平衡点 $E_0 = (S_0, 0, 0, 0)$, 其中 $S_0 = \frac{A}{\mu}$ 。当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)存在唯一的正平衡点 $E^* = (S^*, I_m^*, I_w^*, Q^*)$, 其中:

$$S^* = \frac{\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon}{\beta_1 + \beta_2}, I_m^* = \frac{\beta_1(A(\beta_1 + \beta_2) - \mu(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon))}{(\beta_1 + \beta_2)^2(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)} = \frac{\beta_1\mu(R_0 - 1)}{(\beta_1 + \beta_2)^2},$$

$$I_w^* = \frac{\beta_2(A(\beta_1 + \beta_2) - \mu(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon))}{(\beta_1 + \beta_2)^2(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)} = \frac{\beta_2\mu(R_0 - 1)}{(\beta_1 + \beta_2)^2},$$

$$Q^* = \frac{\epsilon(A(\beta_1 + \beta_2) - \mu(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon))}{(\mu + \mu_2 + \delta)(\beta_1 + \beta_2)(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)} = \frac{\epsilon\mu(R_0 - 1)}{(\mu + \mu_2 + \delta)(\beta_1 + \beta_2)}.$$

证明 无病平衡点的存在性是显然的。

下面求正平衡点。令系统(1)等于 0, 将系统(1)的第 2、3 式相加得:

$$S^* = \frac{\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon}{\beta_1 + \beta_2}. \quad (2)$$

将式(2)代入系统(1)的第2式得: $\beta_1 I^* S^* = (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon) I_m^*$, 解得 $I_m^* \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} = I_w^* \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}$ 。系统(1)的前3式相加得 $A - \mu S^* = (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon) I^*$, 进而有:

$$I_m^* = \frac{\beta_1 (A(\beta_1 + \beta_2) - \mu(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon))}{(\beta_1 + \beta_2)^2 (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)} = \frac{\beta_1 \mu (R_0 - 1)}{(\beta_1 + \beta_2)^2}, \quad (3)$$

$$I_w^* = \frac{\beta_2 (A(\beta_1 + \beta_2) - \mu(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon))}{(\beta_1 + \beta_2)^2 (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)} = \frac{\beta_2 \mu (R_0 - 1)}{(\beta_1 + \beta_2)^2}. \quad (4)$$

将式(3)、(4)代入系统(1)的第4式得:

$$Q^* = \frac{\epsilon (A(\beta_1 + \beta_2) - \mu(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon))}{(\mu + \mu_2 + \delta)(\beta_1 + \beta_2)(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)} = \frac{\epsilon \mu (R_0 - 1)}{(\mu + \mu_2 + \delta)(\beta_1 + \beta_2)}.$$

综上所述,当 $R_0 > 1$ 时,正平衡点存在且唯一,正平衡点为 $E^* = (S^*, I_m^*, I_w^*, Q^*)$, 定理2得证。证毕

4 平衡点的局部稳定性

定理3 当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点 $E_0 = (S_0, 0, 0, 0)$ 局部渐近稳定; $R_0 > 1$ 时,无病平衡点 $E_0 = (S_0, 0, 0, 0)$ 不稳定,正平衡点 $E^* = (S^*, I_m^*, I_w^*, Q^*)$ 局部渐近稳定。

证明 系统(1)在 E_0 处的线性化 Jacobian 矩阵为:

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\mu & -(\beta_1 + \beta_2)S_0 & -(\beta_1 + \beta_2)S_0 & 0 \\ 0 & \beta_1 S_0 - (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon) & \beta_1 S_0 & 0 \\ 0 & \beta_2 S_0 & \beta_2 S_0 - (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon) & 0 \\ 0 & \epsilon & \epsilon & -(\mu + \mu_2 + \delta) \end{bmatrix},$$

特征方程为:

$$|\lambda E - J_{E_0}| = (\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \mu_2 + \delta) \begin{vmatrix} \lambda - \beta_1 S_0 + (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon) & -\beta_1 S_0 \\ -\beta_2 S_0 & \lambda - \beta_2 S_0 + (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon) \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \mu_2 + \delta)(\lambda^2 - ((\beta_1 + \beta_2)S_0 - 2(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon))\lambda - (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)^2(R_0 - 1)).$$

显然关于 λ 有2个根 $\lambda_1 = -\mu < 0, \lambda_2 = -(\mu + \mu_2 + \delta) < 0$, 另外2个根由方程

$$\lambda^2 - ((\beta_1 + \beta_2)S_0 - 2(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon))\lambda - (\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)^2(R_0 - 1)$$

决定。

当 $R_0 < 1$ 时,有 $(\beta_1 + \beta_2)\frac{A}{\mu} < \mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon$, 从而有 $(\beta_1 + \beta_2)\frac{A}{\mu} - 2(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon) < 0$, 且 $-(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)^2(R_0 - 1) > 0$ 。

故方程的另外2个根满足:

$$\lambda_3 \lambda_4 = -(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon)^2(R_0 - 1) > 0, \lambda_3 + \lambda_4 = -(\beta_1 + \beta_2)\frac{A}{\mu} + 2(\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon).$$

从而有 $R_0 < 1$ 时, $\lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$, 又因为 $\lambda_1 = -\mu < 0, \lambda_2 = -(\mu + \mu_2 + \delta) < 0$, 故无病平衡点 $E_0 = (S_0, 0, 0, 0)$ 局部渐近稳定; $R_0 > 1$ 时,无病平衡点 $E_0 = (S_0, 0, 0, 0)$ 不稳定。

下面证明正平衡点的局部稳定性。为了方便运算,记: $\mu + \mu_1 + \gamma + \epsilon = q, \beta_1 + \beta_2 = p, \mu + \mu_2 + \delta = m$, 则有 $p > 0, q > 0, m > 0$, 因此有:

$$E^* = \left(\frac{q}{p}, \frac{\beta_1 \mu (R_0 - 1)}{p^2}, \frac{\beta_2 \mu (R_0 - 1)}{p^2}, \frac{\epsilon \mu (R_0 - 1)}{m p} \right), R_0 = \frac{A p}{q \mu}, I^* = I_m^* + I_w^*, I^* = \frac{A}{q} - \frac{\mu}{p} = \frac{\mu(R_0 - 1)}{p}.$$

$$\text{在 } E^* \text{ 处在线性化 Jacobian 矩阵为 } J_{E^*} = \begin{bmatrix} -\mu - p I^* & -p S^* & -p S^* & 0 \\ \beta_1 I^* & \beta_1 S^* - q & \beta_1 I^* & 0 \\ \beta_2 I^* & \beta_2 I^* & \beta_2 S^* - q & 0 \\ 0 & \epsilon & \epsilon & -m \end{bmatrix}, \text{特征方程为:}$$

$$|\lambda E - J_{E^*}| = \begin{vmatrix} \lambda + \mu + pI^* & pS^* & pS^* & 0 \\ -\beta_1 I^* & \lambda - \beta_1 S^* + q & -\beta_1 I^* & 0 \\ -\beta_2 I^* & -\beta_2 I^* & \lambda - \beta_2 S^* + q & 0 \\ 0 & -\epsilon & -\epsilon & \lambda + m \end{vmatrix} = (\lambda + m)f(\lambda),$$

其中: $f(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$, 且

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu + 2q + p\left(\frac{A}{q} - \frac{\mu}{p}\right) - q = q + \frac{pA}{q}, \\ a_2 &= 2q\mu + q^2 + 2qp\left(\frac{A}{q} - \frac{\mu}{p}\right) - q\mu - qp\frac{q}{p} - (\beta_1^2 + \beta_2^2)\frac{q}{p}\left(\frac{A}{q} - \frac{\mu}{p}\right) - 2\beta_1\beta_2\frac{q}{p}\left(\frac{A}{q} - \frac{\mu}{p}\right) + p^2\frac{q}{p^2}\left(\frac{A}{q} - \frac{\mu}{p}\right) = \\ &= 2pA - q\mu = pA + q\mu(R_0 - 1), \\ a_3 &= q^2\mu + pq^2\left(\frac{A}{q} - \frac{\mu}{p}\right) - q(\beta_1^2 + \beta_2^2)\frac{q}{p}\left(\frac{A}{q} - \frac{\mu}{p}\right) - 2q\beta_1\beta_2\frac{q}{p}\left(\frac{A}{q} - \frac{\mu}{p}\right) - qA\mu + pq^2\left(\frac{A}{q} - \frac{\mu}{p}\right) = \\ &= q(pA - q\mu) = q^2\mu(R_0 - 1). \end{aligned}$$

显然有:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q + \frac{pA}{q} & q^2\mu(R_0 - 1) \\ 1 & pA + q\mu(R_0 - 1) \end{vmatrix} = q\mu(1 - \mu) + \frac{2A^2p^2}{q} + pA(\mu_1 + \gamma + \epsilon) > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3\Delta_2 = \Delta_2 q^2\mu(R_0 - 1). \end{aligned}$$

当 $R_0 > 1$ 时, 有 $\Delta_3 > 0$, 故由 Routh-Hurwitz 判据^[14]可知, 当 $R_0 > 1$ 时, 正平衡点 E^* 局部渐近稳定。 证毕

5 平衡点的全局稳定性

本节将借助 2 个 Lyapunov 函数, 由 Lyapunov 定理以及 Lyapunov-LaSalle 不变集原理得出 2 个平衡点的全局渐近稳定性。

定理 4 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 全局渐近稳定; $R_0 > 1$ 时, 正平衡点 E^* 全局渐近稳定。

证明 首先证明无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的, 构造 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \left(S - S_0 - S_0 \ln \frac{S}{S_0}\right) + I_w + I_m.$$

显然 $V(t) \geq 0$, 且有 $V(t) = 0 \Rightarrow S = S_0, I_m = I_{m0} = 0, I_w = I_{w0} = 0$ 。 $V(t)$ 沿系统(1)的全导数为:

$$V'(t) = (1 - S_0)\frac{dS}{dt} + \frac{dI_m}{dt} + \frac{dI_w}{dt} = A - S\mu - pSI - \frac{S_0}{S}A + \mu S_0 + pS_0I + pSI - qI.$$

又因为 $S_0 = \frac{A}{\mu} \Rightarrow A = \mu S_0$, 则上式可变换为:

$$V'(t) = 2A - S\mu - \frac{S_0}{S}A + I\left(\frac{pA}{\mu} - q\right) = A\left(2 - \frac{S\mu}{A} - \frac{A}{S\mu}\right) + \frac{I}{q}(R_0 - 1),$$

其中: $A\left(2 - \frac{S\mu}{A} - \frac{A}{S\mu}\right) \leq 0$ 恒成立。由此可知当 $R_0 < 1$ 时, $V'(t) < 0$ 。从而再由 Lyapunov 渐近稳定定理^[15]可知, $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 全局渐近稳定。

下面证明正平衡点 E^* 的全局渐近稳定性, 当 $R_0 > 1$ 时, 构造 Lyapunov 函数:

$$V_1(t) = S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} + \left((I_m + I_w) - (I_m^* + I_w^*) - (I_m^* + I_w^*) \ln \frac{I_m + I_w}{I_m^* + I_w^*}\right),$$

该函数沿系统(1)的导数为:

$$V_1'(t) = \left(1 - \frac{S^*}{S}\right)\frac{dS}{dt} + \left(1 - \frac{I_m^* + I_w^*}{I_m + I_w}\right)\left(\frac{dI_m}{dt} + \frac{dI_w}{dt}\right) =$$

$$A - \mu S - pSI - \frac{S^*}{S}A + \mu S^* + pS^*I + pSI - qI - PSI^* + qI^*。 \quad (5)$$

将 $S^* = \frac{q}{p}, I^* = \frac{A}{q} - \frac{\mu}{p} = \frac{\mu(R_0 - 1)}{p}$, 代入式(5)可得:

$$V_1'(t) = 2A - \mu S - \frac{S^*}{S}A - pS \frac{\mu(R_0 - 1)}{p} = 2A - \frac{S^*A}{S} - \frac{S}{S^*A} = \frac{-A(S - S^*)^2}{SS^*} \leq 0。$$

注意到 $V_1'(t) = 0 \Rightarrow S = S^*$ 。易得 $V_1'(t) = 0$ 的最大不变子集只有 $\{(S^*, I_m^*, I_w^*)\}$, 故由 LaSalle 不变性原理^[16]可知, (S^*, I_m^*, I_w^*) 在 $\mathbf{R}_+^3$ 上全局渐近稳定。故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} I_m(t) = I_m^*, \lim_{t \rightarrow +\infty} I_w(t) = I_w^*$, 由系统(1)的第4式可得:

$$Q(t) = \frac{e^{-mt_0} \int_{t_0}^t \epsilon I(u) e^{mu} du + Q(0)}{e^{m(t-t_0)}}, \lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-mt_0} \int_{t_0}^t \epsilon I(u) e^{mu} du + Q(0)}{e^{m(t-t_0)}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon I}{m} = \frac{\epsilon I^*}{m} = Q^*。$$

由上述分析可得地方病平衡点 E^* 是全局吸引的, 结合 E^* 的局部稳定性可知 E^* 在

$$D - \{(S, I_m, I_w, Q) \mid I_m = I_w = 0\}$$

上全局渐近稳定, 定理4得证。

证毕

6 数值模拟

前面讨论了无病平衡点与正平衡点的稳定性, 本节利用 Matlab 软件, 对系统(4)进行数值模拟, 验证上面的结论。

分别取 $\mu = 0.4, \beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.25, \mu_1 = 0.05, \mu_2 = 0.01, \gamma = 0.5, \epsilon = 0.4, \delta = 0.4, A = 1.1$, 初始条件取 $S(0) = 2, I_m(0) = 3, I_w(0) = 2, Q(0) = 1$, 计算得 $R_0 \approx 0.713 < 1$, 数值模拟结果如图2所示, 疾病最终会趋于稳定且消失。

取 $\mu = 0.3, \beta_1 = 0.25, \beta_2 = 0.4, \mu_1 = 0.05, \mu_2 = 0.01, \gamma = 0.4, \epsilon = 0.25, \delta = 0.4, A = 1.3$, 初始条件取 $S(0) = 2, I_m(0) = 3, I_w(0) = 2, Q(0) = 1$, 计算可得 $R_0 \approx 2.81 > 1$, 数值模拟结果如图3所示, 疾病最终趋于稳定且形成地方病。

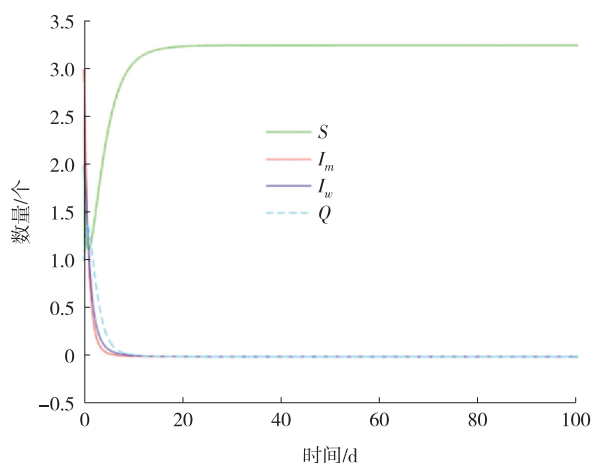


图2 $R_0 < 1$ 时的数值模拟结果

Fig. 2 Numerical simulation ($R_0 < 1$)

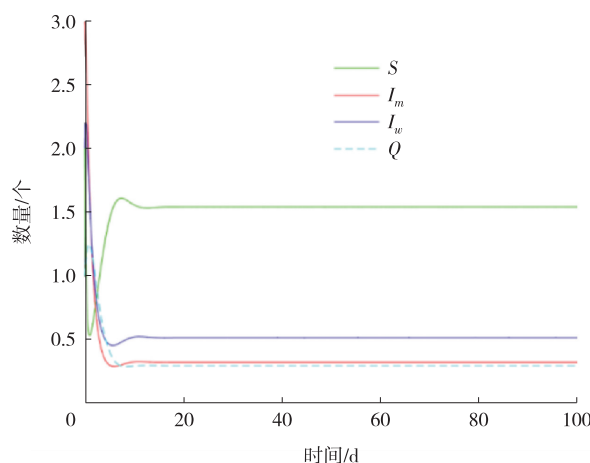


图3 $R_0 > 1$ 时的数值模拟结果

Fig. 3 Numerical simulation ($R_0 > 1$)

参考文献:

- [1] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. A contribution to the mathematical theory of epidemics[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1927, 115(772): 700-721.
- [2] EL-MAROUF S A A, ALIHABY S M. Global analysis of an epidemic model with non-linear incidence rate[J]. Journal of Mathematics and Statistics, 2011, 7(4): 319-325.
- [3] WANG S S, DING Y T, LU H F, et al. Stability and bifurcation analysis of SIQR for the COVID-19 epidemic model with time

- delay[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2021, 18(5): 5505-5524.
- [4] REHMAN M A-U, RANA A F, AHMED N, et al. Mathematical and numerical analysis of SIQR epidemic model of measles disease dynamics[J]. Fractals, 2022, 30(5): 2240154.
- [5] ITO H. Isolation-oriented lyapunov-based design of simultaneous feedback strategies for disease control of SIOQ [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(16): 8767-8785.
- [6] PINTO C M A, TENREIRO MACHADO J A, BURGOS-SIMÓN C. Modified SIQR model for the COVID-19 outbreak in several countries[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2024, 47(5): 3273-3288.
- [7] ATHITHAN S, GHOSH M. Analysis of a sex-structured HIV/AIDS model with the effect of screening of infectives[J]. International Journal of Biomathematics, 2014, 7(5): 1450054.
- [8] GUMEL B A, LUBUMA M-S J, SHAROMI O, et al. Mathematics of a sex-structured model for syphilis transmission dynamics [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2018, 41(18): 8488-8513.
- [9] RATHINASAMY A, CHINNADURAI M, ATHITHAN S. Analysis of exact solution of stochastic sex-structured HIV/AIDS epidemic model with effect of screening of infectives[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2021, 179: 213-237.
- [10] 赵晓琦. 具有随机扰动的 AIDS 传染病模型的动力学行为分析[D]. 太原: 太原理工大学, 2022.
ZHAO X Q. Dynamic behavior analysis of an AIDS epidemic model with random perturbations [D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2022.
- [11] 杨雪. 两类艾滋病模型的动力学研究及最优控制[D]. 太原: 中北大学, 2023.
YANG X. Dynamics studies and optimal control of two types of HIV/AIDS models[D]. Taiyuan: North University of China, 2023.
- [12] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
MA Z E, ZHOU Y C, WANG W D, et al. Mathematical modeling and research on dynamics of infectious diseases[M]. Beijing: Science Press, 2004.
- [13] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(1/2): 29-48.
- [14] 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用[M]. 第 2 版. 武汉: 华中师范大学出版社, 2001.
LIAO X X. Mathematical theory and application of stability[M]. 2nd ed. Wuhan: Central China Normal University Press, 2001.
- [15] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 1981.
ZHANG J Y, FENG B Y. Geometric theory and bifurcation problems of ordinary differential equations[M]. Beijing: Peking University Press, 1981.
- [16] HALE J K, LUNEL S M V. Introduction to functional-differential equation[M]. New York: Springer Science & Business Media, 2013.

Dynamics Analysis of a SIQR Epidemic Model with Sex-Structured

SHAO Hong, YANG Zhichun

(College of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The dynamics of a class of infectious disease models with varying male-to-female infection ratios were analyzed initially, the positivity and boundedness of the model were validated, followed by the computation of the basic reproduction number using the regeneration matrix method to determine the threshold for disease extinction. Subsequently, the local stability of equilibrium points was discussed using the Hurwitz criterion. Finally, a Lyapunov functional was constructed, and the threshold conditions for global asymptotic stability were obtained through the LaSalle invariant set principle. The research results show that the disease-free equilibrium point is locally stable and globally asymptotically stable when the basic reproduction number is less than 1, and there is a unique positive equilibrium point when the basic reproduction number is greater than 1, which is locally stable and globally asymptotically stable. This study extends the content of infectious disease dynamics models related to sex-structures.

Keywords: sex-structure; SIQR infectious disease model; basic regeneration number; balance point; global stability

(责任编辑 黄 颖)