

具有竞争机制的觅食者-掠夺者模型解的全局有界性^{*}

陈 欢, 吴 春

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:为研究具有竞争机制的觅食者-掠夺者模型解的全局有界性,通过应用 Neumann 热半群理论和 Hölder 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式、Young 不等式、内插不等式等一系列经典不等式,逐步建立了模型解的先验估计。首先,利用抛物比较原理和分部积分法,得到了食物资源浓度的有界性估计;然后,结合 Neumann 热半群的正则化性质和相关不等式,进一步得到了觅食者和掠夺者种群密度的有界性估计;最后,通过构造能量泛函和应用 Moser-Alikakos 迭代方法证明了当初值和参数在一定条件下,模型存在唯一的全局有界经典解。

关键词:全局存在;有界性;Neumann 热半群理论;觅食者-掠夺者模型

中图分类号:O175

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2025)03-0103-09

趋化性在生物系统中普遍存在,它的推广在数学生物学领域引起了学者们的高度重视。Tania 等人^[1]最初提出了如下模型:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w) + h_u(u, v), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - \chi_2 \nabla \cdot (v \nabla w) + h_v(u, v), & x \in \Omega, t > 0, \\ w_t = d \Delta w - \lambda(u + v)w - \mu w + r, & x \in \Omega, t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $h_u(u, v)$ 和 $h_v(u, v)$ 项可进行 2 种类型之间的切换,特别是每种类型的逻辑增长;光滑边界的有界域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geq 2)$; λ 表示线性消耗率; $\chi_i > 0 (i = 1, 2)$ 表示趋向性效应; μ 表示自然降解速率; d 表示食物资源扩散的速率; $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 分别表示觅食者与掠夺者的种群密度, $w(x, t)$ 表示两者消耗的食物资源的浓度, $r(x, t)$ 表示食物资源的生产率,分别简记为 u, v, w, r 。

在 $n = 1, h_u = h_v = 0$ 且 r 是正常数情形下,Tao 等人^[2]证明了式(1)存在唯一的全局经典解 (u, v, w) 。在 $n = 2, h_u = \eta_1(u - u^m), h_v = \eta_2(v - v^l)$ 且 $\eta_1, \eta_2 > 0, m, l > 1$ 适当大的情形下,Black^[3]证明了式(1)至少存在 1 个全局广义解,同时对该广义解的最终光滑性进行了深入研究。2020 年,Wang 等人^[4]在 $n \geq 2, h_u = h_v = 0$ 的情形下证明了式(1)的唯一非负经典解的整体存在性和有界性;而当 $n = 2, h_u = \eta_1(u - u^m), h_v = \eta_2(v - v^l)$ 时,他们也证明了式(1)的经典解在 $\eta_1 > 0, \eta_2 = 0$ 和 χ_2 充分小的条件下唯一存在并保持全局有界;且当 $\eta_1 > 0, \eta_2 > 0$ 时,正 logistic 降解率 m, l 则是防止爆破的充分条件。

此外,Liu 等人^[5]研究了在高维空间中具有竞争机制的觅食者-掠夺者模型:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla w) + a_1 u - a_1 b_1 u^\alpha - a_1 \delta_1 uv, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - \xi \nabla \cdot (v \nabla w) + a_2 v - a_2 b_2 v^\beta - a_2 \delta_2 uv, & x \in \Omega, t > 0, \\ w_t = \Delta w - \lambda(u + v)w - \mu w + r, & x \in \Omega, t > 0. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geq 3)$ 是光滑有界域,正常数 $\chi, \xi, a_i, b_i, \delta_i (i = 1, 2), \alpha, \beta > 0, a_1 u - a_1 b_1 u^\alpha - a_1 \delta_1 uv$ 和 $a_2 v - a_2 b_2 v^\beta - a_2 \delta_2 uv$ 分别表示觅食者与掠夺者的竞争,并且证明了当初值和参数满足一定的正则性和限制条件 $p > \frac{n}{2} + 1$ 时,可得到式(2)的解在高维空间中的全局存在性和有界性。

^{*} 收稿日期:2024-07-06 修回日期:2025-02-24 网络出版时间:2025-05-16T10:03

资助项目:重庆市自然科学基金面上项目(No. CSTB2024NSCQ-MSX0220)

第一作者简介:陈欢,女,研究方向为偏微分方程,E-mail:chenhuan_2023@foxmail.com;通信作者简介:吴春,男,副教授,博士,E-mail:wuchun@cqnu.edu.cn

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250515.1657.014

受到上述研究启发,本文考虑了如下模型:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w) + a_1 u - a_1 b_1 u^\alpha - a_1 \delta_1 uv, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - \chi_2 \nabla \cdot (v \nabla w) + a_2 v - a_2 b_2 v^\beta - a_2 \delta_2 uv, & x \in \Omega, t > 0, \\ w_t = \Delta w - \frac{u+v}{(1+u+v)^\tau} w - \mu w + r, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), w(x, 0) = w_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) 是光滑有界域, ν 表示边界 $\partial \Omega$ 的外法向量; τ, μ 是正常数, $\alpha, \beta > 1$, 参数 $a_i, b_i, \chi_i > 0$ ($i = 1, 2$)。本文的目标在于当 $n \geq 2, a_1, a_2, b_1, b_2, \tau > 0$ 时, 建立式(3)解的整体有界性。在本文中, 假设初始数据 u_0, v_0, w_0 满足 $u_0, v_0, w_0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$, 在 Ω 的闭区间 $\bar{\Omega}$ 上有 $u_0, v_0, w_0 \geq 0, \neq 0$, 以及在 $\partial \Omega$ 上有:

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = \frac{\partial w_0}{\partial \nu} = 0, \quad (4)$$

生产率函数 r 是非负的且满足:

$$r \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, \infty)) \cap L^\infty(\Omega \times (0, \infty)) \quad r^* := \|r\|_{L^\infty(\Omega \times (0, \infty))}, \quad (5)$$

其中: C^2 表示二阶连续可微函数空间, L^∞ 表示本性有界可测函数空间。

基于以上假设, 本文的研究结果如下。

定理 1 设 $n \geq 2, \Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是光滑有界域, 参数 $a_i, b_i, \chi_i > 0$ ($i = 1, 2$), τ, μ 是正常数。设 $r(x, t)$ 满足式(5)且 u_0, v_0, w_0 满足式(4), 假设 τ, α, β 满足:

$$\begin{cases} \alpha, \beta > \frac{(n+2)(1-\tau)}{2}, & \text{若 } 0 < \tau < \frac{n}{n+2}, \\ \alpha, \beta > 1, & \text{若 } \tau \geq \frac{n}{n+2}. \end{cases}$$

则对任意的 $p > n$, 式(3)在有界域 $\bar{\Omega} \times (0, \infty)$ 上存在唯一非负全局有界解:

$$(u, v, w) \in [C([0, \infty); W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \infty))]^3.$$

注 1 1) 当 $\tau = 0$ 时, Liu 等人^[5]对式(2)中 $\lambda = 1$ 的情况进行了详细的研究。因此本文仅需研究 $\tau > 0$ 的情形; 2) 当 $u, v \geq 0$ 和 $\tau \geq 1$ 时, 容易得到 $\frac{u+v}{(1+u+v)^\tau} \leq u+v$, 则式(3)退化为式(2)。因此证明定理 1 时只需关注 $\tau \in (0, 1)$ 即可。

1 准备工作

引理 1^[2] 设 $n \geq 1, \Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是边界光滑的有界域, 设 a_i, b_i ($i = 1, 2$) > 0 和 $\alpha, \beta > 1$, 设参数 $\tau, \mu, \chi_i > 0$ ($i = 1, 2$) 是给定的正常数, $r(x, t)$ 是给定的非负函数且满足式(5)以及初始数据 u_0, v_0, w_0 满足式(4), 则存在时间的最大值 $T_{\max} \in (0, \infty]$, 对任意的 $p > n$, 使得式(3)存在唯一非负经典解:

$$(u, v, w) \in [C([0, \infty); W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \infty))]^3;$$

此外, 若 $T_{\max} < \infty$, 则有:

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \sup (\|u(\cdot, t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|w(\cdot, t)\|_{W^{1,p}(\Omega)}) = \infty.$$

引理 2^[6,14] (Gagliardo-Nirenberg 不等式) 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是光滑的有界域, l, k 是任意整数, 且 $0 \leq l < k, 1 \leq q, \lambda \leq \infty, p \in \mathbf{R}^+, \frac{l}{k} \leq \theta^* \leq 1$, 并满足 $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} = \theta^* \left(\frac{1}{q} - \frac{k}{n} \right) + \frac{1}{\lambda} (1 - \theta^*)$, 则对任意的 $\varphi \in W^{k,q}(\Omega) \cap L^\lambda(\Omega)$, 存在正常数 C_{GN} , 使得

$$\|D^l \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{GN} (\|D^k \varphi\|_{L^q(\Omega)}^{\theta^*} \|\varphi\|_{L^\lambda(\Omega)}^{1-\theta^*} + \|\varphi\|_{L^\lambda(\Omega)}). \quad (6)$$

特别地, 当 $l = 0, k = 1$ 时, 由式(6)可知, 对任意 $\varphi \in W^{1,q}(\Omega) \cap L^\lambda(\Omega)$, 当 $\theta^* \in (0, 1)$, 满足 $\frac{1}{p} = \theta^* \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n} \right) +$

$\frac{1}{\lambda}(1-\theta^*)$, 则有 $\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{GN}(\|\nabla\varphi\|_{L^q(\Omega)}^{\theta^*} \|\varphi\|_{L^\lambda(\Omega)}^{1-\theta^*} + \|\varphi\|_{L^\lambda(\Omega)})$ 。

引理 3^[7,15] 1) 设 $p \in [1, \infty)$, 则对任意的 $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ 在边界上满足 $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{v}}=0$, 有:

$$\|\nabla\varphi\|_{L^{\frac{2(p+1)}{2(p+1)-p}}(\Omega)}^2 \leq 2(4p^2+n)\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}^{p-1} D^2\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2。$$

2) 设 $p \in [2, \infty)$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_\varepsilon > 0$, 使任意函数 $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ 在边界上有 $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{v}}=0$, 并满足:

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla\varphi|^{2(p-1)} \left| \frac{\partial|\nabla\varphi|^2}{\partial\mathbf{v}} \right| dS \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^{2(p-2)} |\nabla|\nabla\varphi|^2|^2 dx + C_\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^{2p} dx。$$

引理 4^[4,8] 设 $a, b > 0$, 对任意的 $T \in (0, \infty]$ 以及 $\sigma = \min\left\{1, \frac{T}{2}\right\}$, 存在非负函数 $h \in L^1_{loc}([0, T))$, $y \in C([0, T)) \cap C^1((0, T))$ 满足:

1) 对任意 $t \in (0, T)$, 有 $y'(t) + ay(t) \leq h(t)$;

2) 对任意 $t \in (0, T-\sigma)$, $\int_t^{t+\sigma} h(s) ds \leq b$;

则对任意 $t \in (0, T)$, 有 $y(t) \leq y(0) + 2b + \frac{b}{a}$ 。

引理 5^[9,16] 设 $n \geq 1$, $T > 0$, $\sigma = \min\left\{1, \frac{T}{2}\right\}$ 。假设 $p > 1$ 以及常数 $L_1, L_2 > 0$, 对任意 $t \in (0, T-\sigma)$ 有 $\int_t^{t+\sigma} \int_{\Omega} |f|^p dx ds \leq L_1$, $\int_t^{t+\sigma} \int_{\Omega} |z|^p dx ds \leq L_2$, 若 $f \in C(\bar{\Omega} \times (0, T))$ 和 $z \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T))$ 是下式的解:

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + f(x, t), & x \in \Omega, t \in (0, T), \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{v}} = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T), \\ z(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

其中 $z_0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $(z_0 \geq 0)$, 且在边界 $\partial\Omega$ 上满足 $\frac{\partial z_0}{\partial \mathbf{v}}=0$; 则存在 $C > 0$, 使得对任意 $t \in (0, T-\sigma)$ 有:

$$\int_t^{t+\sigma} \|z_t\|_{L^p(\Omega)}^p ds + \int_t^{t+\sigma} \|z\|_{W^{2,p}(\Omega)}^p ds \leq C(\|z_0\|_{W^{2,p}(\Omega)}^p + L_1 + L_2)。$$

特别地, 能找到 $C_1 > 0$, 使得对任意 $t \in (0, T-\sigma)$, 有 $\int_t^{t+\sigma} \|\Delta z\|^p ds \leq C_1(\|z_0\|_{W^{2,p}(\Omega)}^p + L_1 + L_2)$ 。

2 定理 1 的证明

首先, 设 $\iota = \min\left\{1, \frac{T_{\max}}{2}\right\}$, $T_{\max}^* = T_{\max} - \iota$, 然后给出以下引理。

引理 6 设 $n \geq 1, \alpha, \beta > 1$ 和 $M = \|w_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{r^*}{\mu}$, 则对任意的 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} u dx \leq M_1, \quad \int_{\Omega} v dx \leq M_2, \quad (8)$$

其中: $M_1 = \int_{\Omega} u_0 dx + |\Omega| \left(\frac{1}{b_1}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $M_2 = \int_{\Omega} v_0 dx + |\Omega| \left(\frac{1}{b_2}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$; 并存在 $k > 0, \bar{k} > 0$, 使得对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\int_t^{t+\iota} \int_{\Omega} u^\alpha dx ds \leq k b_1^{-1} (b_1^{\frac{1}{\alpha-1}} + 1), \quad \int_t^{t+\iota} \int_{\Omega} v^\beta dx ds \leq \bar{k} b_2^{-1}. \quad (9)$$

证明 对式(3)的第3个方程使用抛物比较原理可得到式(7); 对式(8)、(9)的证明可参考文献[10]。证毕

引理 7 设 $n \geq 1, 0 < \tau < 1$, 则对 $p \in (1, \infty)$, 存在 $C > 0$, 使得对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\frac{1}{2p} \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p} dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p} dx \leq C \int_{\Omega} u^{(p+1)(1-\tau)} dx + C \int_{\Omega} v^{(p+1)(1-\tau)} dx + C. \quad (10)$$

证明 结合引理 3 中的 1) 和引理 6 式(7), 可得对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p+2} dx &\leq 2(n+4p^2) \|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} |D^2 w|^2 dx \leq \\ 2(n+4p^2) M^2 \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} |D^2 w|^2 dx &=: k \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} |D^2 w|^2 dx. \end{aligned} \quad (11)$$

对式(3)的第 3 个方程使用齐次 Neumann 边界条件和分部积分, 则对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p} dx &= \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} \nabla w \cdot \nabla w_t dx = \\ \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} \nabla w \cdot \nabla \left(\Delta w - \frac{u+v}{(1+u+v)^\tau} w - \mu w + r \right) dx &= \\ \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} \nabla w \cdot \nabla \Delta w dx - \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} \nabla w \cdot \nabla \left(\frac{u}{(1+u+v)^\tau} w \right) dx &- \\ \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} \nabla w \cdot \nabla \left(\frac{v}{(1+u+v)^\tau} w \right) dx + \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} \nabla w \cdot \nabla r dx - \mu \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p} dx. \end{aligned} \quad (12)$$

由著名等式 $\nabla w \cdot \nabla \Delta w = \frac{1}{2} \Delta |\nabla w|^2 - |D^2 w|^2$, 再结合引理 3 中的 2)、Young 不等式以及式(11), 则存在 $C_1 > 0$, 使得对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} \nabla w \cdot \nabla \Delta w dx \leq -\frac{15}{16} \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} |D^2 w|^2 dx + C_1. \quad (13)$$

再利用 $|\Delta w| \leq \sqrt{n} |D^2 w|$ 和 $\nabla |\nabla w|^2 = 2D^2 w \cdot \nabla w$, 结合式(7)、Young 不等式和式(11), 则存在 $C_2 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$-\int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} \nabla w \cdot \nabla \left(\frac{u}{(1+u+v)^\tau} w \right) dx \leq \frac{5}{16} \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} |D^2 w|^2 dx + C_2 \int_{\Omega} u^{(p+1)(1-\tau)} dx. \quad (14)$$

类似地, 存在 $C_3 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$-\int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} \nabla w \cdot \nabla \left(\frac{v}{(1+u+v)^\tau} w \right) dx \leq \frac{5}{16} \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} |D^2 w|^2 dx + C_3 \int_{\Omega} v^{(p+1)(1-\tau)} dx. \quad (15)$$

最后, 由 $|\Delta w| \leq \sqrt{n} |D^2 w|$ 和 $\nabla |\nabla w|^2 = 2D^2 w \cdot \nabla w$ 以及式(5)、Young 不等式和式(11), 则存在 $C_4 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} \nabla w \cdot \nabla r dx \leq \frac{5}{16} \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p-2} |D^2 w|^2 dx + C_4. \quad (16)$$

将式(13)~(16)代入式(12)中, 则存在 $C_5 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\frac{1}{2p} \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p} dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p} dx \leq C_5 \int_{\Omega} u^{(p+1)(1-\tau)} dx + C_5 \int_{\Omega} v^{(p+1)(1-\tau)} dx + C_5,$$

故引理 7 得证。

证毕

引理 8 设 $n \geq 2, \alpha, \beta > 1$ 和 $0 < \tau < 1$, 假设存在 $p, q > \frac{(n+2)(1-\tau)}{2}$ 和 $k_1, k_2 > 0$, 使得对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\int_t^{t+\epsilon} \int_{\Omega} u^p dx ds \leq k_1, \int_t^{t+\epsilon} \int_{\Omega} v^q dx ds \leq k_2. \quad (17)$$

则存在 $C > 0, \xi_1 > \frac{(n+2)(1-\tau)}{2}$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 满足:

$$\|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^{\frac{\xi_1}{1-\tau}-1}(\Omega)}^2 \leq C(k_1 + k_2 + 1). \quad (18)$$

证明 设 $\xi_1 := \min\{p, q\}$, $\xi_1 > \frac{(n+2)(1-\tau)}{2}$, 利用式(17)、 Ω 的有界性以及 Young 不等式, 则存在 $C_1 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有下式成立:

$$\int_t^{t+\epsilon} \left(\int_{\Omega} (u^{\xi_1} + v^{\xi_1} + 1) dx \right) ds \leq C_1(k_1 + k_2 + 1). \quad (19)$$

由于 $\xi_1 > \frac{(n+2)(1-\tau)}{2}$, 则有 $2\left(\frac{\xi_1}{1-\tau} - 1\right) > n$, 再结合引理 7, 则存在 $C_2, C_3 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \left(\frac{\xi_1}{1-\tau}\right) dx + C_2 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \left(\frac{\xi_1}{1-\tau}\right) dx \leq C_3 \left(\int_{\Omega} (u^{\xi_1} + v^{\xi_1} + 1) dx \right). \quad (20)$$

结合式(19)、(20)以及引理 4, 有:

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 \left(\frac{\xi_1}{1-\tau}\right) dx \leq \int_{\Omega} |\nabla w_0|^2 \left(\frac{\xi_1}{1-\tau}\right) dx + \left(2 + \frac{1}{C_2}\right) C_3 C_1 (k_1 + k_2 + 1) \leq C_4 (k_1 + k_2 + 1),$$

其中: $C_4 = \int_{\Omega} |\nabla w_0|^2 \left(\frac{\xi_1}{1-\tau}\right) dx + \left(2 + \frac{1}{C_2}\right) C_3 C_1 + 1 > 1$. 因此对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^2\left(\frac{\xi_1}{1-\tau}\right)(\Omega)} \leq (C_4 (k_1 + k_2 + 1))^{\frac{1}{2\left(\frac{\xi_1}{1-\tau}-1\right)}} \leq C_4 (k_1 + k_2 + 1).$$

由此引理 8 得证。

证毕

引理 9 设 $n \geq 1, \alpha, \beta > 1$, 假设存在常数 $K > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有 $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$, 则对 $p \in (1, \infty)$, 存在 $C > 0$, 使得:

$$\frac{1}{2p} \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p} dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p} dx \leq CK^{2p} \left(\chi_1^{2p+2} \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p+2} dx + \chi_1^{p+1} \int_{\Omega} |\Delta w|^{p+1} dx + 1 \right). \quad (21)$$

证明 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p} dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p} dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p-2} \nabla u \cdot \nabla u_t dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p} dx = \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p-2} \nabla u \cdot \nabla (\Delta u - \chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w) + a_1 u - a_1 b_1 u^\alpha - a_1 \delta_1 uv) dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p} dx \leq \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p-2} \nabla u \cdot \nabla \Delta u dx + \chi_1 \int_{\Omega} \nabla \cdot (|\nabla u|^{2p-2} \nabla u) (\nabla \cdot (u \nabla w)) dx + (a_1 + 1) \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p} dx. \end{aligned}$$

由文献[4]的式(3.14)和式(3.22)的推导可知, 存在任意常数 $C_1 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p} dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p} dx &+ \frac{1}{32} \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p-2} |D^2 u|^2 dx \leq \\ &= C_1 K^{2p} \left(\chi_1^{2p+2} \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p+2} dx + \chi_1^{p+1} \int_{\Omega} |\Delta w|^{p+1} dx + 1 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

鉴于 $\frac{1}{32} \int_{\Omega} |\nabla u|^{2p-2} |D^2 u|^2 dx$ 是非负的, 则由式(22)可以得到式(21)。

证毕

引理 10 假设引理 8 的条件成立, 则存在 $C > 0, \eta_1 > n$, 对任意 $t \in (0, T_{\max}^*)$, 有:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(b_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + 1) + C\chi_1^{\eta_1} (k_1 + k_2 + 1)^{\eta_1} M_1. \quad (23)$$

证明 对式(3)的第 1 个方程运用常数变易法, 则对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$u(\cdot, t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (-\chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w) + a_1 u - a_1 b_1 u^\alpha - a_1 \delta_1 uv) ds,$$

由于 u, v 都是非负函数, 则存在 $C_1 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|e^{t\Delta} u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \chi_1 \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot (u \nabla w)\|_{L^\infty(\Omega)} ds + \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} (a_1 u - a_1 b_1 u^\alpha)\|_{L^\infty(\Omega)} ds + \\ &+ \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} a_1 \delta_1 uv\|_{L^\infty(\Omega)} ds \leq C_1 + \chi_1 \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot (u \nabla w)\|_{L^\infty(\Omega)} ds + \\ &+ \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} (a_1 u - a_1 b_1 u^\alpha)\|_{L^\infty(\Omega)} ds + \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} a_1 \delta_1 uv\|_{L^\infty(\Omega)} ds. \end{aligned} \quad (24)$$

由引理 8 可知存在 $C_2 > 0$ 且 $\xi_1 := \min\{p, q\} > \frac{(n+2)(1-\tau)}{2}$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^2\left(\frac{\xi_1}{1-\tau}\right)(\Omega)} \leq C_2 (k_1 + k_2 + 1).$$

现选择 $m > 0$, 使它满足 $n < m < 2\left(\frac{\xi_1}{1-\tau} - 1\right)$ 。设 $\eta_1 := \frac{2\left(\frac{\xi_1}{1-\tau} - 1\right)m}{2\left(\frac{\xi_1}{1-\tau} - 1\right) - m} > n$, 利用已知的 Neumann 热半群的

的正则化性质、Hölder 不等式和 L^p 插值不等式以及式(8)中的第 1 个不等式, 可知存在 $C_3, C_4 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\begin{aligned} \chi_1 \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot (u \nabla w)\|_{L^\infty(\Omega)} ds &\leq C_3 \chi_1 \int_0^t (1 + (t-s)^{-\frac{m+n}{2m}}) e^{-\lambda_1(t-s)} \|u\|_{L^{\eta_1}(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2\left(\frac{\xi_1}{1-\tau}-1\right)(\Omega)} ds \leq \\ &C_4 (k_1 + k_2 + 1) \chi_1 M_1^{\frac{1}{\eta_1}} \int_0^t (1 + (t-s)^{-\frac{m+n}{2m}}) e^{-\lambda_1(t-s)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{\eta_1-1}{\eta_1}} ds. \end{aligned}$$

设对任意 $t \in (0, T_{\max})$, $L(t) = \sup_{s \in (0,t)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, 则存在 $C_5 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\chi_1 \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot (u \nabla w)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \leq C_5 (k_1 + k_2 + 1) \chi_1 M_1^{\frac{1}{\eta_1}} L^{\frac{\eta_1-1}{\eta_1}}(t). \quad (25)$$

设 $f(u) = a_1 u - a_1 b_1 u^a$, 则存在 $C_6 > 0$, 有下式成立:

$$a_1 u - a_1 b_1 u^a \leq f\left(\left(\frac{1}{ab_1}\right)^{\frac{1}{a-1}}\right) \leq C_6 b_1^{\frac{1}{1-a}}.$$

结合 Neumann 热半群光滑估计^[11]可知对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 存在任意常数 $C_7, C_8 > 0$, 有:

$$\int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} (a_1 u - a_1 b_1 u^a)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \leq C_7 \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|(a_1 u - a_1 b_1 u^a)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \leq C_8 b_1^{\frac{1}{1-a}}, \quad (26)$$

$$\int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} a_1 \delta_1 uv\|_{L^\infty(\Omega)} ds \leq a_1 \delta_1 \int_0^t (1 + (t-s)^{-\frac{n}{2q}}) e^{-\lambda_1(t-s)} \|uv\|_{L^q(\Omega)} ds. \quad (27)$$

由内插不等式可知存在任意常数 $C_9 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\|uv\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{2q}(\Omega)}^{1-a} + \|v\|_{L^1(\Omega)}^a \leq C_9,$$

其中: $\frac{1}{q} = a + \frac{1-a}{2p}$ ($a \in (0, 1)$)。将此式代入式(27)可知存在任意常数 $C_{10} > 0$, 有:

$$\int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} a_1 \delta_1 uv\|_{L^\infty(\Omega)} ds \leq C_{10}. \quad (28)$$

将式(25)、(26)和(28)代入式(24)中, 利用 Young 不等式, 则存在常数 $C_{11} > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$L(t) \leq C_1 + C_5 (k_1 + k_2 + 1) \chi_1 M_1^{\frac{1}{\eta_1}} L^{\frac{\eta_1-1}{\eta_1}}(t) + C_8 b_1^{\frac{1}{1-a}} + C_{10} \leq C_{11} \chi_1^{\eta_1} (k_1 + k_2 + 1)^{\eta_1} M_1 + C_{11} (b_1^{\frac{-1}{1-a}} + 1) + \frac{1}{2} L(t).$$

然后进一步可得到存在任意常数 $C_{12} > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$L(t) \leq C_{12} (b_1^{\frac{1}{1-a}} + 1) + C_{12} \chi_1^{\eta_1} (k_1 + k_2 + 1)^{\eta_1} M_1,$$

由 $L(t)$ 的定义可得到式(23)。

证毕

注 2 1) 能量泛函是变分法研究是核心对象, 表现为关于函数及它的导数的积分表达式, 在引理 10 中体现为对解的范数(如 L 范数)的逐步控制, 通过迭代提升正则性。2) Moser-Alikakos 迭代是一种通过递归提升解的正则性(从低阶范数到高阶范数)的方法, 最终证明解的全局有界性。

引理 11 假设引理 8 的条件成立, 且存在 $K > 0$, 使得 $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$, 则存在 $C > 0, \eta_2 > n, \bar{q} > \frac{n}{2}$ 和 $\xi_2 > \frac{(n+2)(1-\tau)}{2}$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有以下不等式成立:

$$\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau}-1\right)(\Omega)} \leq C(K+1)(\chi_1+1)^2(k_1+k_2+1), \quad (29)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla v(\cdot, t)|^{2\bar{q}} dx \leq C, \quad (30)$$

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(b_2^{\frac{1}{1-\beta}} + 1) + C(K+1)^{\eta_2} (\chi_1+1)^{2\eta_2} \chi_2^{\eta_2} (k_1+k_2+1)^{\eta_2} M_2. \quad (31)$$

证明 设 $\xi_2 := \min\{p, q\}$, $\xi_2 > \frac{(n+2)(1-\tau)}{2}$, 根据式(17), 则存在常数 $C_1 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max}^*)$, 有:

$$\int_t^{t+\epsilon} \int_{\Omega} u^{\xi_2} dx ds + \int_t^{t+\epsilon} \int_{\Omega} v^{\xi_2} dx ds + 1 \leq C_1(k_1 + k_2 + 1), \quad (32)$$

设 $f(x, t) := -\frac{u+v}{(1+u+v)^{\tau}}w - \mu w + r$, $(x, t) \in \Omega \times (0, T_{\max})$, 则有:

$$|f(x, t)| \leq \frac{u+v}{(1+u+v)^{\tau}}w + \mu w + r \leq u^{1-\tau}w + v^{1-\tau}w + \mu w + r.$$

根据式(5)、(7)和(32), 存在 $C_i > 0 (i=2, 3, 4)$, 对任意 $t \in (0, T_{\max}^*)$, 有:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\epsilon} \int_{\Omega} |f|^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} dx ds &\leq C_2 \int_t^{t+\epsilon} \int_{\Omega} (u^{1-\tau}w)^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} dx ds + C_2 \int_t^{t+\epsilon} \int_{\Omega} (v^{1-\tau}w)^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} dx ds + C_2 \int_t^{t+\epsilon} \int_{\Omega} (\mu w + r)^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} dx ds \leq \\ &C_3 \int_t^{t+\epsilon} \int_{\Omega} u^{\xi_2} dx ds + C_3 \int_t^{t+\epsilon} \int_{\Omega} v^{\xi_2} dx ds + C_3 \leq C_4(k_1 + k_2 + 1). \end{aligned} \quad (33)$$

由于 $\xi_2 > \frac{(n+2)(1-\tau)}{2}$, 可知 $\frac{\xi_2}{1-\tau} > 2$, 且 $2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right) > n$, 则 w 满足

$$\begin{cases} w_t = \Delta w + f(x, t), & x \in \Omega, t \in (0, T_{\max}), \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T_{\max}), \\ w(x, 0) = w_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (34)$$

再利用式(4)、(7)、(33)和引理5, 则存在 $C_5 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max}^*)$, 有:

$$\int_t^{t+\epsilon} \int_{\Omega} |\Delta w|^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} dx ds \leq C_5(k_1 + k_2 + 1).$$

结合引理9和引理10, 则存在 $C_6 > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} dx \leq \\ &C_6 K^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} \left(\chi_1^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} \int_{\Omega} |\nabla w|^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} dx + \chi_1^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} \int_{\Omega} |\Delta w|^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} dx + 1 \right). \end{aligned} \quad (35)$$

再根据引理2和式(7), 则存在 $C_7, C_8 > 0$, 有:

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} dx = \|\nabla w\|_{L^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}}(\Omega)}^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} \leq C_7 \|\Delta w\|_{L^{\frac{\xi_2}{1-\tau}}(\Omega)}^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} \|w\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} + C_7 \|w\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} \leq C_8 \int_{\Omega} |\Delta w|^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} dx + C_8. \quad (36)$$

将式(36)代入式(35)中, 再利用不等式 $\chi_1^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} \leq \chi_1^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} + \frac{1}{4}$, 则对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 存在 $C_i > 0 (i=9, 10, 11,$

12), 有下式成立:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} dx + C_9 \int_{\Omega} |\nabla u|^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} dx \leq \\ &C_{10} K^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} \left(\chi_1^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} \left(C_8 \int_{\Omega} |\Delta w|^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} dx + C_8 \right) + \chi_1^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} \int_{\Omega} |\Delta w|^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} dx + 1 \right) \leq \\ &C_{10} K^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} \left(\chi_1^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} \left(C_8 \int_{\Omega} |\Delta w|^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} dx + C_8 \right) + \chi_1^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} \int_{\Omega} |\Delta w|^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} dx + 1 \right) \leq \\ &C_{11} K^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} \left((\chi_1^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} + \chi_1^{\frac{\xi_2}{1-\tau}}) \int_{\Omega} |\Delta w|^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} dx + \chi_1^{\frac{\xi_2}{1-\tau}} + 1 \right). \end{aligned}$$

根据式(34)、(36)和引理4, 则存在 $C_{13}, C_{14} > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} dx &\leq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} dx + \left(2 + \frac{1}{C_9}\right) C_{13} K^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} (\chi_1^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} + 1) (k_1 + k_2 + 1) \leq \\ &C_{14} (K^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} + 1) (\chi_1^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} + 1) (k_1 + k_2 + 1) \leq C_{14} (K + 1)^{2\left(\frac{\xi_2}{1-\tau} - 1\right)} (\chi_1 + 1)^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} (k_1 + k_2 + 1). \end{aligned}$$

由于 $0 < \frac{\xi_2}{\xi_2 + \tau - 1} < \frac{n+2}{n} \leq 2$, 则可知存在 $C_{14}, C_{15} > 0$, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^{\frac{2}{\frac{\xi_2}{1-\tau}-1}}(\Omega)} \leq (C_{14}(K+1))^{2(\frac{\xi_2}{1-\tau}-1)} (\chi_1+1)^{\frac{2\xi_2}{1-\tau}} (k_1+k_2+1)^{\frac{1}{2(\frac{\xi_2}{1-\tau}-1)}} \leq$$

$$C_{15}(K+1)(\chi_1+1)^{\frac{\xi_2}{\xi_2+\tau-1}} (k_1+k_2+1) \leq C_{16}(K+1)(\chi_1+1)^2 (k_1+k_2+1).$$

由此可以得到式(29), 同理可得到式(30)。利用类似引理 11 的证明方法可以得到式(31)。 证毕

引理 12 假设引理 8 的条件成立, 则当 $T_{\max} = \infty$ 以及存在 $\sigma \in (0, 1), C > 0$ 时, 对任意 $t \in (0, \infty)$, 有:

$$\|u\|_{C^{2+\sigma, 1+\frac{\sigma}{2}}(\bar{\Omega} \times [t, t+1])} + \|v\|_{C^{2+\sigma, 1+\frac{\sigma}{2}}(\bar{\Omega} \times [t, t+1])} + \|w\|_{C^{2+\sigma, 1+\frac{\sigma}{2}}(\bar{\Omega} \times [t, t+1])} \leq C. \quad (37)$$

证明 由式(7)、(18)、(21)、(29)、(30)和(31)可知: 当 $\bar{p} > n, C > 0$ 时, 对任意 $t \in (0, T_{\max})$, 有:

$$\|u(\cdot, t)\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega)} + \|w(\cdot, t)\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega)} \leq C. \quad (38)$$

再结合引理 1, 可以得到 $T_{\max} = \infty$, 利用式(38)和抛物正则理论^[12](也见文献[13]中的定理 2.1), 则可得式(37)。 证毕

在引理 12 得证基础上对定理 1 作如下证明: 由于 α, β, τ 满足

$$\begin{cases} \alpha, \beta > \frac{(n+2)(1-\tau)}{2}, & \text{如果 } 0 < \tau < \frac{n}{n+2}, \\ \alpha, \beta > 1 > \frac{(n+2)(1-\tau)}{2}, & \text{如果 } \frac{n}{n+2} \leq \tau < 1, \end{cases}$$

结合式(9)可知引理 12 的条件是满足的。由此可以由引理 12 得到定理 1。

3 结束语

本文通过应用 Neumann 热半群理论和 Hölder 不等式、Young 不等式、内插不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式等一系列经典不等式, 发现当初值和参数满足一定的条件时, 可以得到具有竞争机制的觅食者-掠夺者模型的解的全局有界性。

参考文献:

- [1] TANIA N, VANDERLEI B, HEATH J P, et al. Role of social interactions in dynamic patterns of resource patches and forager aggregation[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2012, 109(28): 11228-11233.
- [2] TAO Y S, WINKLER M. Large time behavior in a forager-exploiter model with different taxis strategies for two groups in search of food[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2019, 29(11): 2151-2182.
- [3] BLACK T. Global generalized solutions to a forager-exploiter model with superlinear degradation and their eventual regularity properties[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2020, 30(6): 1075-1117.
- [4] WANG J P, WANG M X. Global bounded solution of the higher-dimensional forager-exploiter model with/without growth sources[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2020, 30(7): 1297-1323.
- [5] 刘洪燕, 刘丹丹, 江利情, 等. 具有竞争机制的觅食者-掠夺者模型的高维空间有界性分析[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2023, 41(4): 530-537.
- LIU H Y, LIU D D, JIANG L Q, et al. Boundedness analysis of high-dimensional space of predator-predator model with competitive mechanism[J]. Journal of Hubei Minzu University (Natural Science Edition), 2023, 41(4): 530-537.
- [6] FRIEDMAN A. Partial Different Equations[M]. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969.
- [7] LI T, SUEN A, WINKLER M, et al. Global small-data solutions of a two-dimensional chemotaxis system with rotational flux terms[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2015, 25(4): 721-746.
- [8] WINKLER M, BAI X L. Equilibration in a fully parabolic two-species chemotaxis system with competitive kinetics[J]. Indiana University Mathematics Journal, 2016, 65(2): 553-583.
- [9] WANG J P. Global existence and stabilization in a forager-exploiter model with general logistic sources[J]. Nonlinear Analysis, 2022, 222: 112985.

- [10] LIU Y Y, ZHUANG Y H. Boundedness in a high-dimensional forager-exploiter model with nonlinear resource consumption by two species[J]. Zeitschrift Angewandte Mathematik und Physik, 2020, 71(5):151.
- [11] CHEN Y, LI Z P. Asymptotic behavior in a forager-exploiter model with nonlinear resource consumption with/without general logistic sources[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2023, 519(1):126793.
- [12] LADYZENSKAJA O A, SOLONNIKOV V A, URALCEVA N N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type[M]. New York: Academic Press, 1968.
- [13] WANG J P, WANG M X. The dynamics of a predator-prey model with diffusion and indirect prey-taxis[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2020, 32(3):1291-1310.
- [14] NIRENBERG L. On elliptic partial differential equations[J]. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 1959, 13:115-162.
- [15] WANG J P, WANG M X. Global solution of a diffusive predator-prey model with prey-taxis[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2019, 77(10):2676-2694.
- [16] JIN H Y, WANG Z A, WU L Y. Global dynamics of a three-species spatial food chain model[J]. Journal of Differential Equations, 2022, 333:144-183.

Global Boundedness of Solutions for Forager-Predator Models with Competitive Mechanism

CHEN Huan, WU Chun

(College of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: To investigate the global boundedness of solutions for a foraging-predator model with competition mechanisms, Neumann heat semigroup theory and a series of classical inequalities including Hölder inequality, Gagliardo-Nirenberg inequality, Young inequality, and interpolation inequality were systematically applied to progressively establish prior estimates for the model solutions. First, boundedness estimates for the food resource concentration were derived through the parabolic comparison principle and integration by parts. Subsequently, combining the regularization properties of the Neumann heat semigroup with relevant inequalities, boundedness estimates for the population densities of both foragers and predators were further obtained. Finally, by constructing energy functionals and applying the Moser-Alikakos iteration method, it was proven that under certain initial value and parameter conditions, the model admits a unique globally bounded classical solution.

Keywords: global existence; boundedness; Neumann thermal semigroup theory; forager-predator model

(责任编辑 方 兴)