

含多个导数项的分数阶微分方程无穷区间非局部边值问题^{*}

高惠敏, 周文学, 陈 满
(兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

摘要: 研究一类无穷区间上 Riemann-Liouville 分数阶微分方程非局部边值问题, 其中方程的非线性项依赖于 3 个低阶分数阶导数项, 边值条件为分数阶积分与多点边值条件的和。首先构造出相应边值问题的 Green 函数, 并得到它具有的一些性质; 接着利用 Leray-Schauder 非线性抉择定理、Green 函数的有关性质以及单调迭代法研究此边值问题解的存在性与多解性。在得到此边值问题分别有无界解及 2 个正解的充分性条件后, 举例验证主要结果的适用性与可行性。研究结果推广了已有的一些学术研究成果。

关键词: 分数阶微分方程; 无穷区间; 非局部边值问题; Leray-Schauder 非线性抉择定理; 单调迭代法

中图分类号: O175.8

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2025)03-0112-13

分数阶微积分历史悠久, 几乎与整数阶微积分同期萌芽。作为传统微积分的延伸分支, 分数阶微积分已成为现代数学学科的重要研究方向。然而, 尽管分数阶微积分和整数阶微积分共享着深厚的历史底蕴, 但由于前者在理论上较为复杂且在实际应用中也面临着许多挑战, 因此它在很长一段时期内相较于后者而言比较“新颖”。目前, 分数阶微积分正以自身独特的魅力和广泛的应用前景吸引着越来越多的学者和工程师的关注, 而随着计算机技术的不断发展和数值计算方法的不断改进, 它在分数阶动力学系统、物理学、工程学等领域的应用日益广泛^[1-3]。由于分数阶微积分具有独特的数学特性和对实际物理现象的深刻刻画能力, 因此可用它来描述具有复杂动态行为的系统, 例如: 文献[1]中使用分数阶差分方法对 COVID-19 与结核病共感染模型进行深度分析, 进而提出 COVID-19 和结核病传播动力学的分数阶混合感染模型。同时, 与传统的整数阶微积分相比, 分数阶微积分能够更精确地描述具有记忆效应、遗传特性或长期相关性的物理系统, 例如: Tarasov^[2]使用了基于 Grünwald-Letnikov 分数阶差分的分数阶算子来处理物理晶格模型。另外, 对于工程学领域, 将分数阶控制器引入控制系统设计中, 可使系统更好地处理不确定性和干扰因素, 进而提高系统的鲁棒性和稳定性, 已有大量论著对经典的 PID(比例、积分、微分)控制器的输出方程进行了推广, 将积分与微分的阶数由整数推广为了任意实数, 称为 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器(λ, μ 分别为积分阶数、微分阶数)^[3]。

在求解分数阶微分方程问题时, 常常会给定特殊的边值条件, 由此产生了分数阶微分方程边值问题。鉴于有限区间的相对紧性, 有限区间上分数阶微分方程边值问题解的存在性、多解性等研究已经取得了明显进展^[4-11], 为分数阶微积分理论的深入发展和实际应用提供了有力支持; 而关于无穷区间上解的性质研究则相对较少^[12-14]。

文献[13]运用多种不动点定理及 Banach 压缩映射原理得到了如下非局部边值问题解的存在性、唯一性与多重性:

$$\begin{cases} {}^H D_{1+}^{\alpha} x(t) + a(t)f(t, x(t)) = 0, 2 < \alpha < 3, t \in (1, +\infty), \\ {}^H D_{1+}^{\alpha-1} x(+\infty) = \sum_{m=1}^p \alpha_m {}^H I_{1+}^{\gamma_m} x(v) + b \sum_{n=1}^q \delta_n x(\zeta_n), \\ x(1) = x'(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

* 收稿日期: 2024-06-25 修回日期: 2025-01-08 网络出版时间: 2025-05-16T11:28

资助项目: 国家自然科学基金地区科学基金项目(No. 11961039)

第一作者简介: 高惠敏, 女, 研究方向为分数阶微分方程, E-mail: gaohm37@163.com; 通信作者简介: 周文学, 男, 教授, 博士, E-mail: wxzhou2006@126.com

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250515.1901.040>

其中: ${}^H D_{1+}^{\alpha}$ 为 α 阶 Hadamard 型分数阶导数; ${}^H I_{1+}^{\gamma_m}$ 为 $\gamma_m > 0 (m=1, 2, \dots, p)$ 阶 Hadamard 型分数阶积分; $\alpha_m, b, \delta_n \geq 0, 1 < v < \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_q < +\infty (m=1, 2, \dots, p, n=1, 2, \dots, q)$ 为给定常数; $a \in C([1, +\infty), \mathbf{R}^+)$ 在 $[1, +\infty)$ 的任意子区间上不恒为 0, 且 $0 < \int_0^{+\infty} a(s) \frac{ds}{s} < +\infty$; $f \in C([1, +\infty) \times \mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+)$ 且 $f(t, 0)$ 在 $[1, +\infty)$ 的任意子区间上不恒为 0。

Liu 等人^[14]利用单调迭代技巧得到如下无穷区间上分数阶微分方程带积分和离散边值条件问题 2 个正解的存在性结论,并给出了误差估计:

$$\begin{cases} {}^H D_{1+}^{\theta} x(t) + r(t)f(t, x(t), {}^H D_{1+}^{\theta-2} x(t), {}^H D_{1+}^{\theta-1} x(t)) = 0, 2 < \theta \leq 3, \\ {}^H D_{1+}^{\theta-1} x(+\infty) = \int_1^{+\infty} w(t)x(t) \frac{dt}{t} + \sum_{i=1}^m \beta_i x(\eta_i), \\ x(1) = x'(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $t \in (1, +\infty)$, ${}^H D_{1+}^{\theta}$ 表示 θ 阶 Hadamard 型分数阶导数, $w \in L^1[1, +\infty) \geq 0, \beta_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为任意正常数, $1 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_m < +\infty, f \in C([1, +\infty) \times [0, +\infty)^3, [0, +\infty))$ 且 $f(t, 0, 0, 0)$ 在 $[1, +\infty)$ 的任意子区间上不恒为 0; $r \in C([1, +\infty), \mathbf{R}^+)$ 在 $[1, +\infty)$ 的任意子区间上不恒为 0, 且 $0 < \int_0^{+\infty} r(s) \frac{ds}{s} < +\infty$ 。

本文沿用式(1)的边值条件,但改用 Riemann-Liouville 型分数阶导数与积分定义。对分数阶微积分理论进行研究时,尤其是针对分数阶微分方程的求解和性质进行分析时,已有文献中常见的方程往往只包含 1 项或至多 2 项低阶分数阶导数项。而本文则在式(2)的基础上再增加 1 个分数阶导数项,从而增加了问题的复杂性和挑战性。为了在这样的方程上定义合理的解空间,需构造一个新的 Banach 空间,并为这个新的 Banach 空间赋予适当的范数。基于以上改动,本文聚焦于探讨一类在无穷区间上定义的分数阶微分方程边值问题,方程中包含了 3 个低阶的分数阶导数项,并伴随有非局部边值条件;本文的目标是分析这类复杂问题中解的存在性,并进一步探索解可能存在的多重性;该问题的具体描述如下:

$$\begin{cases} D^{\alpha} u(t) + \lambda h(t)f(t, u(t), D^{\alpha-3} u(t), D^{\alpha-2} u(t), D^{\alpha-1} u(t)) = 0, \\ u^{(n)}(0) = 0, n = 0, 1, 2, \dots, m-2, \\ D^{\alpha-1} u(+\infty) = \mu \sum_{i=1}^q r_i I^{\beta_i} u(\rho) + \sum_{j=1}^p k_j u(\eta_j). \end{cases} \quad (3)$$

其中: $t \in [0, +\infty)$; $m-1 < \alpha \leq m, m \geq 4$; D^{α} 为 α 阶 Riemann-Liouville 型分数阶导数; $\lambda \in (0, 1)$; $D^{\alpha-1} u(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} D^{\alpha-1} u(t)$; I^{β_i} 为 $\beta_i > 0, i=1, 2, \dots, q$ 阶 Riemann-Liouville 型分数阶积分; $0 < \rho < \infty, \mu, r_i, k_j, \eta_j \geq 0, i=1, 2, \dots, q, j=1, 2, \dots, p$ 为给定常数,且定义 $\Delta = \Gamma(\alpha) - \mu \sum_{i=1}^q r_i \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta_i)} \rho^{\alpha + \beta_i - 1} - \sum_{j=1}^p k_j \eta_j^{\alpha-1} \neq 0$ 。

通过构造相应边值问题的 Green 函数,借助它的性质及 Leray-Schauder 非线性抉择定理可得式(3)无界解存在的充分性条件,再利用单调迭代法可近似构造出式(3)的 2 个正解。

1 预备知识

在本文中,将用到以下 4 个条件:

1) $h \in C([0, +\infty), \mathbf{R}^+)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 的任意子区间上不恒为 0, 且 $0 < \int_0^{+\infty} h(s) ds < +\infty$;

2) $f \in C([0, +\infty)^5, \mathbf{R}^+)$ 且 $f(t, 0, 0, 0, 0)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 的任意子区间上不恒为 0, 且当 w, x, y, z 有界时, 得到 $f(t, (1+t^{\alpha-1})w, (1+t^2)x, (1+t)y, z)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上有界;

3) 对任意 $t \in [0, +\infty)$ 及 $w, x, y, z \in [0, +\infty)$, $f(t, w, x, y, z)$ 是非递减且连续的, 即满足:

$$f(t, w_1, x_1, y_1, z_1) - f(t, w_2, x_2, y_2, z_2) \geq 0,$$

其中: $w_1 > w_2, x_1 > x_2, y_1 > y_2, z_1 > z_2$;

4) 存在正常数 Λ , 使对任意 $(t, w, x, y, z) \in [0, +\infty) \times [0, \Lambda]^4$, 有:

$$f(t, (1+t^{a-1})w, (1+t^2)x, (1+t)y, z) \leq \frac{\Delta \cdot \Lambda}{\Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} h(t) dt}.$$

同时为方便起见, 本文给出以下基本定义以及引理。

定义 1^[15] 函数 $y: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ 的 $\alpha (\alpha > 0)$ 阶 Riemann-Liouville 分数积分定义为:

$$I_{0+}^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds,$$

等式右端在 $(0, +\infty)$ 有定义, 其中 $\Gamma(\alpha)$ 为 Gamma 函数, 定义为 $\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \operatorname{Re}\{z\} > 0$ 。

定义 2^[15] 连续函数 $y: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ 的 $\alpha (\alpha > 0)$ 阶 Riemann-Liouville 分数导数定义为:

$$D_{0+}^{\alpha} y(t) = D^n I_{0+}^{n-\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds,$$

等式右端在 $(0, +\infty)$ 有定义。其中 $n-1 < \alpha \leq n$ 。

引理 1^[15] 设 $\alpha > 0$, 若 $y \in C[0, +\infty) \cap L[0, +\infty)$ 有 α 阶导数, 且 $D_{0+}^{\alpha} y \in C[0, +\infty) \cap L[0, +\infty)$, 则

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} y(t) = y(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_n t^{\alpha-n}$$

对任意 $c_i (c_i \in \mathbf{R}, i=1, 2, \cdots, n)$ 均成立, 其中 $n = [\alpha] + 1$ 。

引理 2^[16] 若 $\rho, \theta > 0$, 则 $I^{\rho}(t^{\theta}) = \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\rho+\theta+1)} t^{\rho+\theta}, D^{\rho}(t^{\theta}) = \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta-\rho+1)} t^{\theta-\rho}$ 。

引理 3 若函数 $y \in C([0, +\infty), \mathbf{R}^+)$, 且满足 $0 < \int_0^{+\infty} y(s) ds < +\infty$, 则下述边值问题

$$\begin{cases} D^{\alpha} u(t) + y(t) = 0, t \in [0, +\infty), \alpha \in (m-1, m], m \geq 4, \\ u^{(n)}(0) = 0, n = 0, 1, 2, \cdots, m-2, \\ D^{\alpha-1} u(+\infty) = \mu \sum_{i=1}^q r_i I^{\beta_i} u(\rho) + \sum_{j=1}^p k_j u(\eta_j), \end{cases} \quad (4)$$

有唯一解 $u(t) = \int_0^{+\infty} G(t, s) y(s) ds$, 其中:

$$\begin{aligned} G(t, s) &= g(t, s, \alpha) + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{\Delta} \sum_{i=1}^q r_i g(\rho, s, \alpha + \beta_i) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} \sum_{j=1}^p k_j g(\eta_j, s, \alpha), \\ g(t, s, \alpha) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t < +\infty, \\ t^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq s < +\infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

证明 因为 $D^{\alpha} u(t) + y(t) = 0$, 故由引理 1 有 $u(t) = -I^{\alpha} y(t) + l_1 t^{\alpha-1} + l_2 t^{\alpha-2} + \cdots + l_m t^{\alpha-m}$ 。根据条件 $u^{(n)}(0) = 0, n = 0, 1, 2, \cdots, m-2$, 考虑到 α 及 m 的取值范围, 要使 $n = 0, 1, 2, \cdots, m-2$ 阶导数均在 $t=0$ 时有意义, 只能有 $l_2 = l_3 = \cdots = l_m = 0$, 于是 $u(t) = -I^{\alpha} y(t) + l_1 t^{\alpha-1}$ 。

根据式(4)的边值条件 $D^{\alpha-1} u(+\infty) = \mu \sum_{i=1}^q r_i I^{\beta_i} u(\rho) + \sum_{j=1}^p k_j u(\eta_j)$, 利用含参积分求导公式可得:

$$\begin{aligned} D^{\alpha-1} u(+\infty) &= D^{\alpha-1} \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} (-I^{\alpha} y(t) + l_1 t^{\alpha-1}) \right] = - \int_0^{+\infty} y(s) ds + l_1 \Gamma(\alpha) = \mu \sum_{i=1}^q r_i I^{\beta_i} u(\rho) + \\ &\sum_{j=1}^p k_j u(\eta_j) = \mu \sum_{i=1}^q r_i [-I^{\alpha+\beta_i} y(\rho) + l_1 I^{\beta_i}(\rho^{\alpha-1})] + \sum_{j=1}^p k_j [-I^{\alpha} y(\eta_j) + l_1 \eta_j^{\alpha-1}] = \mu \sum_{i=1}^q r_i \cdot \\ &\left[-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta_i)} \int_0^{\rho} (\rho-s)^{\alpha+\beta_i-1} y(s) ds + \frac{l_1 \Gamma(\alpha) \rho^{\alpha+\beta_i-1}}{\Gamma(\alpha+\beta_i)} \right] + \sum_{j=1}^p k_j \left[-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta_j} (\eta_j-s)^{\alpha-1} y(s) ds + l_1 \eta_j^{\alpha-1} \right], \end{aligned}$$

移项后可得:

$$l_1 = \frac{1}{\Delta} \int_0^{+\infty} y(s) ds - \frac{\mu \sum_{i=1}^q r_i}{\Delta \Gamma(\alpha+\beta_i)} \int_0^{\rho} (\rho-s)^{\alpha+\beta_i-1} y(s) ds - \frac{\sum_{j=1}^p k_j}{\Delta \Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta_j} (\eta_j-s)^{\alpha-1} y(s) ds =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y(s) ds + \frac{\mu \sum_{i=1}^q r_i}{\Delta} \int_0^{+\infty} g(\rho, s, \alpha + \beta_i) y(s) ds + \frac{\sum_{j=1}^p k_j}{\Delta} \int_0^{+\infty} g(\eta_j, s, \alpha) y(s) ds,$$

于是有:

$$\begin{aligned} u(t) &= -I^\alpha y(t) + l_1 t^{a-1} = -\int_0^t \frac{(t-s)^{a-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds + \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds + \\ &\quad -\frac{\mu t^{a-1} \sum_{i=1}^q r_i}{\Delta} \int_0^{+\infty} g(\rho, s, \alpha + \beta_i) y(s) ds + \frac{t^{a-1} \sum_{j=1}^p k_j}{\Delta} \int_0^{+\infty} g(\eta_j, s, \alpha) y(s) ds = \int_0^{+\infty} g(t, s, \alpha) y(s) ds + \\ &\quad -\frac{\mu t^{a-1} \sum_{i=1}^q r_i}{\Delta} \int_0^{+\infty} g(\rho, s, \alpha + \beta_i) y(s) ds + \frac{t^{a-1} \sum_{j=1}^p k_j}{\Delta} \int_0^{+\infty} g(\eta_j, s, \alpha) y(s) ds = \int_0^{+\infty} G(t, s) y(s) ds. \quad \text{证毕} \end{aligned}$$

注1 在化简过程中,需根据积分区间的可加性进行变换 $-\int_0^\rho (\cdot) ds = \int_\rho^{+\infty} (\cdot) ds - \int_0^{+\infty} (\cdot) ds, -\int_0^{\eta_j} (\cdot) ds$ 也同理进行操作;并适当加减项 $-(\rho-s)^{a+\beta_i-1} = \rho^{a+\beta_i-1} - (\rho-s)^{a+\beta_i-1} - \rho^{a+\beta_i-1}, -(\eta_j-s)^{a-1}$ 也同理进行操作。

根据引理2及式(5)可得:

$$D^{a-1} u(t) = \int_0^{+\infty} G_1(t, s) y(s) ds,$$

$$G_1(t, s) = g_1(t, s, \alpha) + \frac{\mu \Gamma(\alpha)}{\Delta} \sum_{i=1}^q r_i g(\rho, s, \alpha + \beta_i) + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta} \sum_{j=1}^p k_j g(\eta_j, s, \alpha), \quad (6)$$

$$g_1(t, s, \alpha) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq t < +\infty, \\ 1, & 0 \leq t \leq s < +\infty; \end{cases}$$

$$D^{a-2} u(t) = \int_0^{+\infty} G_2(t, s) y(s) ds,$$

$$G_2(t, s) = g_2(t, s, \alpha) + \frac{t \mu \Gamma(\alpha)}{\Delta} \sum_{i=1}^q r_i g(\rho, s, \alpha + \beta_i) + \frac{t \Gamma(\alpha)}{\Delta} \sum_{j=1}^p k_j g(\eta_j, s, \alpha), \quad (7)$$

$$g_2(t, s, \alpha) = \begin{cases} s = t - (t-s), & 0 \leq s \leq t < +\infty, \\ t, & 0 \leq t \leq s < +\infty; \end{cases}$$

$$D^{a-3} u(t) = \int_0^{+\infty} G_3(t, s) y(s) ds,$$

$$G_3(t, s) = g_3(t, s, \alpha) + \frac{\mu t^2 \Gamma(\alpha)}{2\Delta} \sum_{i=1}^q r_i g(\rho, s, \alpha + \beta_i) + \frac{t^2 \Gamma(\alpha)}{2\Delta} \sum_{j=1}^p k_j g(\eta_j, s, \alpha), \quad (8)$$

$$g_3(t, s, \alpha) = \frac{1}{2} \begin{cases} t^2 - (t-s)^2, & 0 \leq s \leq t < +\infty, \\ t^2, & 0 \leq t \leq s < +\infty. \end{cases}$$

引理4 若 $\Delta > 0$, 则对所有 $(t, s) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, Green 函数 $G(t, s)$ 有如下性质:

1) $G(t, s)$ 是非负连续的;

2) $G(t, s)$ 对 t 单调递增;

3) $\frac{G(t, s)}{1+t^{a-1}} \leq \frac{G(t, s)}{t^{a-1}} \leq \frac{1}{\Delta}$;

4) $0 \leq G_1(t, s) \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta}, 0 \leq \frac{G_2(t, s)}{1+t} \leq \frac{G_2(t, s)}{t} \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta}, 0 \leq \frac{G_3(t, s)}{1+t^2} \leq \frac{G_3(t, s)}{t^2} < \frac{\Gamma(\alpha)}{2\Delta}$.

证明 1) 根据 Green 函数 $G(t, s)$ 的定义(式(5))及条件 $0 < \rho < \infty, \mu, r_i, k_j, \eta_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, p$ 得 $G(t, s)$ 非负连续。

2) 根据 Green 函数 $G(t, s)$ 的定义(式(5)), 只需要证明 $g(t, s, \alpha)$ 对 t 单调递增即可。令 $g_1(t) = t^{a-1} - (t-s)^{a-1}, 0 \leq s \leq t < +\infty$ 且 $g_2(t) = t^{a-1}, 0 \leq t \leq s < +\infty$, 于是有 $g_1'(t) = (\alpha-1)[t^{a-2} - (t-s)^{a-2}] \geq 0$ 且 $g_2'(t) = (\alpha-1)t^{a-2} \geq 0$, 即 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 均关于 t 单调递增。因此对任意 $t_1, t_2 \in [0, +\infty), t_1 < t_2$ 有 $g_1(t_1) \leq$

$g_1(t_2), g_2(t_1) \leq g_2(t_2)$ 以及 $g_2(t_1) \leq g_2(s) = g_1(s) \leq g_1(t_2)$ 。

3) 根据 $G(t, s)$ 的定义式(5), 有:

$$\begin{aligned} G(t, s) &= t^{a-1} \cdot \left\{ \frac{g(t, s, \alpha)}{t^{a-1}} + \frac{\mu}{\Delta} \sum_{i=1}^q r_i g(\rho, s, \alpha + \beta_i) + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^p k_j g(\eta_j, s, \alpha) \right\} \leq \\ & t^{a-1} \cdot \left\{ \frac{t^{a-1}}{\Gamma(\alpha) t^{a-1}} + \frac{\mu}{\Delta} \sum_{i=1}^q r_i g(\rho, s, \alpha + \beta_i) + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^p k_j g(\eta_j, s, \alpha) \right\} \leq \\ & \frac{t^{a-1}}{\Delta \Gamma(\alpha)} \cdot \left[\Gamma(\alpha) - \mu \sum_{i=1}^q r_i \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta_i)} \rho^{a+\beta_i-1} - \sum_{j=1}^p k_j \eta_j^{a-1} \right] + \\ & \frac{t^{a-1}}{\Delta} \left[\mu \sum_{i=1}^q r_i \frac{\rho^{a+\beta_i-1}}{\Gamma(\alpha + \beta_i)} + \sum_{j=1}^p k_j \frac{\eta_j^{a-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] = \frac{1}{\Delta} t^{a-1} \leq \frac{1}{\Delta} (1 + t^{a-1}), \end{aligned}$$

于是 $\frac{G(t, s)}{1+t^{a-1}} \leq \frac{G(t, s)}{t^{a-1}} \leq \frac{1}{\Delta}$ 。

4) 由式(6)可得:

$$\begin{aligned} 0 \leq G_1(t, s) &= g_1(t, s, \alpha) + \frac{\mu \Gamma(\alpha)}{\Delta} \sum_{i=1}^q r_i g(\rho, s, \alpha + \beta_i) + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta} \sum_{j=1}^p k_j g(\eta_j, s, \alpha) \leq \\ & 1 + \frac{\mu \Gamma(\alpha)}{\Delta} \sum_{i=1}^q r_i \frac{\rho^{a+\beta_i-1}}{\Gamma(\alpha + \beta_i)} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta} \sum_{j=1}^p k_j \frac{\eta_j^{a-1}}{\Gamma(\alpha)} \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta}. \end{aligned}$$

于是 $0 \leq G_1(t, s) \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta}$ 。

同理由式(7)、(8)可得: $0 \leq \frac{G_2(t, s)}{1+t} \leq \frac{G_2(t, s)}{t} \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta}, 0 \leq \frac{G_3(t, s)}{1+t^2} \leq \frac{G_3(t, s)}{t^2} < \frac{\Gamma(\alpha)}{2\Delta}$ 。

证毕

引理 5^[17] (Leray-Schauder 非线性抉择定理) 令 C 是 Banach 空间 E 的一个凸子集, U 是 C 的一个开子集且 $\theta \in U$, 则每个全连续映射 $T: \bar{U} \rightarrow C$ 有如下性质:

- 1) 存在一个 $u \in \bar{U}$ 使得 $Tu = u$;
- 2) 存在一个 $v \in \partial U$ 及 $\lambda \in (0, 1)$ 使得 $v = \lambda Tv$ 。

2 主要结果

考虑如下空间:

$$\begin{aligned} X = \left\{ u: u, D^{a-3}u, D^{a-2}u, D^{a-1}u \in C([0, +\infty), \mathbf{R}), \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|u(t)|}{1+t^{a-1}} < +\infty, \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-3}u(t)|}{1+t^2} < +\infty, \right. \\ \left. \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-2}u(t)|}{1+t} < +\infty, \sup_{t \in [0, +\infty)} |D^{a-1}u(t)| < +\infty \right\}, \end{aligned}$$

并赋予范数 $\|u\|_\infty = \max \left\{ \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|u(t)|}{1+t^{a-1}}, \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-3}u(t)|}{1+t^2}, \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-2}u(t)|}{1+t}, \sup_{t \in [0, +\infty)} |D^{a-1}u(t)| \right\}$, 易证得 $(X, \|u\|_\infty)$ 为 Banach 空间。

再定义一个锥 $Y \subset X$ 为 $Y = \{u \in X: u(t) \geq 0, D^{a-3}u(t) \geq 0, D^{a-2}u(t) \geq 0, D^{a-1}u(t) \geq 0, t \in [0, +\infty)\}$ 。为简便起见, 在此作如下标记: $F(u(s)) = f(s, u(s), D^{a-3}u(s), D^{a-2}u(s), D^{a-1}u(s)), F(u_k(s)) = f(s, u_k(s), D^{a-3}u_k(s), D^{a-2}u_k(s), D^{a-1}u_k(s)), k=0, 1, 2, \dots, n$ 。定义算子 $T: Y \rightarrow X$ 为:

$$Tu(t) = \int_0^{+\infty} G(t, s) h(s) F(u(s)) ds, t \in [0, +\infty)。$$

由于区间 $[0, +\infty)$ 的非紧性, Arzela-Ascoli 定理在空间 Y 中不再成立, 因此为证明上述定义的算子 T 的紧性, 需使用下述改进的紧性准则。

引理 6^[18] 假设 U 是 Y 中的一个有界子集, 只要以下条件成立:

- 1) 对 $u(t) \in U, \frac{u(t)}{1+t^{a-1}}, \frac{D^{a-3}u(t)}{1+t^2}, \frac{D^{a-2}u(t)}{1+t}$ 与 $D^{a-1}u(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 的任意紧子区间上等度连续;

2) U 在无穷远处等度收敛,即对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $v = v(\epsilon) > 0$ 使得对任意 $t_1, t_2 > v, u \in U$ 有:

$$\left| \frac{u(t_2)}{1+t_2^{a-1}} - \frac{u(t_1)}{1+t_1^{a-1}} \right| < \epsilon, \left| \frac{D^{a-3}u(t_2)}{1+t_2^2} - \frac{D^{a-3}u(t_1)}{1+t_1^2} \right| < \epsilon,$$

$$\left| \frac{D^{a-2}u(t_2)}{1+t_2} - \frac{D^{a-2}u(t_1)}{1+t_1} \right| < \epsilon, |D^{a-1}u(t_2) - D^{a-1}u(t_1)| < \epsilon;$$

则 U 在 Y 中相对紧。

引理 7^[19] (Lebesgue 控制收敛定理) 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数, $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列, 且一切 $f_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 均可积。若 $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ a. e., 则

$$\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx.$$

引理 8 若条件 1)、2) 成立, 则 $T: Y \rightarrow Y$ 是全连续的。

证明 以下分 3 步证明算子 T 的全连续性。

第 1 步, 证明积分算子 $T: Y \rightarrow Y$ 。对任意 $t \in [0, +\infty), u \in Y$, 显然 $Tu, D^{a-3}(Tu), D^{a-2}(Tu), D^{a-1}(Tu) \in C([0, +\infty), \mathbf{R})$ 。根据条件 2) 可知, 存在 $M > 0$ 使得:

$$f(t, (1+t^{a-1}) \frac{u(t)}{1+t^{a-1}}, (1+t^2) \frac{D^{a-3}u(t)}{1+t^2}, (1+t) \frac{D^{a-2}u(t)}{1+t}, D^{a-1}u(t)) \leq M,$$

于是有:

$$\frac{Tu(t)}{1+t^{a-1}} = \int_0^{+\infty} \frac{G(t,s)}{1+t^{a-1}} h(s) F(u(s)) ds \leq$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(s)}{\Delta} f\left(s, \frac{(1+s^{a-1})u(s)}{1+s^{a-1}}, \frac{(1+s^2)D^{a-3}u(s)}{1+s^2}, \frac{(1+s)D^{a-2}u(s)}{1+s}, D^{a-1}u(s)\right) ds \leq \int_0^{+\infty} \frac{M}{\Delta} h(s) ds < +\infty,$$

同理, 有 $\frac{D^{a-3}(Tu(t))}{1+t^2} < +\infty, \frac{D^{a-2}(Tu(t))}{1+t} < +\infty, D^{a-1}(Tu(t)) < +\infty$, 因此 $T: Y \rightarrow Y$ 。

第 2 步, 证明积分算子 T 的连续性。设 $\{u_n(t)\}$ 是 Y 中的一个序列, 且对任意 $t \in Y$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_0\| = 0$ 。因此 $\{u_n(t)\}$ 有界, 即存在正常数 b 使得 $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|u_n\| \leq b, \|u_0\| \leq b$ 。要证算子 $T: Y \rightarrow Y$ 的连续性, 只需证明 $\|Tu_n - Tu_0\| \rightarrow 0$ 。

由引理 7 及 f 的连续性可得:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{G(t,s)}{1+t^{a-1}} h(s) F(u_n(s)) ds = \int_0^{+\infty} \frac{G(t,s)}{1+t^{a-1}} h(s) F(u_0(s)) ds,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} G_1(t,s) h(s) F(u_n(s)) ds = \int_0^{+\infty} G_1(t,s) h(s) F(u_0(s)) ds,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{G_2(t,s)}{1+t} h(s) F(u_n(s)) ds = \int_0^{+\infty} \frac{G_2(t,s)}{1+t} h(s) F(u_0(s)) ds,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{G_3(t,s)}{1+t^2} h(s) F(u_n(s)) ds = \int_0^{+\infty} \frac{G_3(t,s)}{1+t^2} h(s) F(u_0(s)) ds.$$

接着, 借助引理 4 可得:

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|Tu_n(t) - Tu_0(t)|}{1+t^{a-1}} \leq \sup_{t \in [0, +\infty)} \int_0^{+\infty} \frac{G(t,s)}{1+t^{a-1}} h(s) |F(u_n(s)) - F(u_0(s))| ds \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty,$$

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} |D^{a-1}Tu_n(t) - D^{a-1}Tu_0(t)| \leq \sup_{t \in [0, +\infty)} \int_0^{+\infty} G_1(t,s) h(s) |F(u_n(s)) - F(u_0(s))| ds \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty,$$

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-2}Tu_n(t) - D^{a-2}Tu_0(t)|}{1+t} \leq \sup_{t \in [0, +\infty)} \int_0^{+\infty} \frac{G_2(t,s)}{1+t} h(s) |F(u_n(s)) - F(u_0(s))| ds \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty,$$

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-3}Tu_n(t) - D^{a-3}Tu_0(t)|}{1+t^2} \leq \sup_{t \in [0, +\infty)} \int_0^{+\infty} \frac{G_3(t,s)}{1+t^2} h(s) |F(u_n(s)) - F(u_0(s))| ds \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

因此算子 $T: Y \rightarrow Y$ 是连续的。

第 3 步, 证明积分算子 $T: Y \rightarrow Y$ 的相对紧性。首先假设 Ω 是锥 Y 中的一个有界子集, 于是存在 $k > 0$, 对任

意 $u \in \Omega$, 有 $\|u\|_{\infty} \leq k$. 下证 $T\Omega$ 也为锥 Y 中的一个有界子集.

令 $M_k = \sup\{f(t, (1+t^{a-1})w, (1+t^2)x, (1+t)y, z) \mid (t, w, x, y, z) \in [0, +\infty) \times [0, k]^4\}$, 利用引理 4, 可得:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|Tu(t)|}{1+t^{a-1}} &\leq \int_0^{+\infty} \frac{G(t, s)}{1+t^{a-1}} h(s) |F(u(s))| ds \leq \\ \frac{1}{\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) f\left(s, \frac{(1+s^{a-1})u(s)}{1+s^{a-1}}, \frac{(1+s^2)D^{a-3}u(s)}{1+s^2}, \frac{(1+s)D^{a-2}u(s)}{1+s}, D^{a-1}u(s)\right) ds &\leq \frac{M_k}{\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) ds < +\infty, \\ \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-3}Tu(t)|}{1+t^2} &\leq \int_0^{+\infty} \frac{G_3(t, s)}{1+t^2} h(s) |F(u(s))| ds \leq \frac{\Gamma(\alpha)M_k}{2\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) ds < +\infty, \\ \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-2}Tu(t)|}{1+t} &\leq \int_0^{+\infty} \frac{G_2(t, s)}{1+t} h(s) |F(u(s))| ds \leq \frac{\Gamma(\alpha)M_k}{\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) ds < +\infty, \\ \sup_{t \in [0, +\infty)} |D^{a-1}Tu(t)| &\leq \int_0^{+\infty} G_1(t, s) h(s) |F(u(s))| ds \leq \frac{\Gamma(\alpha)M_k}{\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) ds < +\infty. \end{aligned}$$

即证得 $T\Omega$ 在锥 Y 中有界.

为使用引理 6, 首先需证明 $T\Omega$ 在 $[0, +\infty)$ 的任意紧子区间上等度连续. 对 $u \in \Omega, t_1, t_2 \in [L_1, L_2] \subset [0, +\infty)$, 不失一般性, 令 $t_1 < t_2$, 于是有:

$$\begin{aligned} \left| \frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{a-1}} - \frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{a-1}} \right| &\leq M_k \int_0^{t_2} \left| \frac{G(t_2, s)}{1+t_2^{a-1}} - \frac{G(t_1, s)}{1+t_1^{a-1}} \right| h(s) ds + M_k \int_{t_2}^{+\infty} \left| \frac{G(t_2, s)}{1+t_2^{a-1}} - \frac{G(t_1, s)}{1+t_1^{a-1}} \right| h(s) ds \leq \\ M_k \int_0^{t_2} \left| \frac{G(t_2, s)}{1+t_2^{a-1}} - \frac{G(t_1, s)}{1+t_1^{a-1}} \right| h(s) ds &+ \frac{M_k}{\Delta} \int_{t_2}^{+\infty} \left| \frac{t_2^{a-1}}{1+t_2^{a-1}} - \frac{t_1^{a-1}}{1+t_1^{a-1}} \right| h(s) ds, \\ \left| \frac{D^{a-3}Tu(t_2)}{1+t_2^2} - \frac{D^{a-3}Tu(t_1)}{1+t_1^2} \right| &\leq M_k \int_0^{t_2} \left| \frac{G_3(t_2, s)}{1+t_2^2} - \frac{G_3(t_1, s)}{1+t_1^2} \right| h(s) ds + \\ M_k \int_{t_2}^{+\infty} \left| \frac{G_3(t_2, s)}{1+t_2^2} - \frac{G_3(t_1, s)}{1+t_1^2} \right| h(s) ds &\leq \\ M_k \int_0^{t_2} \left| \frac{G_3(t_2, s)}{1+t_2^2} - \frac{G_3(t_1, s)}{1+t_1^2} \right| h(s) ds &+ \frac{\Gamma(\alpha)M_k}{2\Delta} \int_{t_2}^{+\infty} \left| \frac{t_2^2}{1+t_2^2} - \frac{t_1^2}{1+t_1^2} \right| h(s) ds, \\ \left| \frac{D^{a-2}Tu(t_2)}{1+t_2} - \frac{D^{a-2}Tu(t_1)}{1+t_1} \right| &\leq M_k \int_0^{t_2} \left| \frac{G_2(t_2, s)}{1+t_2} - \frac{G_2(t_1, s)}{1+t_1} \right| h(s) ds + \\ M_k \int_{t_2}^{+\infty} \left| \frac{G_2(t_2, s)}{1+t_2} - \frac{G_2(t_1, s)}{1+t_1} \right| h(s) ds &\leq \\ M_k \int_0^{t_2} \left| \frac{G_2(t_2, s)}{1+t_2} - \frac{G_2(t_1, s)}{1+t_1} \right| h(s) ds &+ \frac{\Gamma(\alpha)M_k}{\Delta} \int_{t_2}^{+\infty} \left| \frac{t_2}{1+t_2} - \frac{t_1}{1+t_1} \right| h(s) ds. \end{aligned}$$

由于函数 $\frac{G(t, s)}{1+t^{a-1}}, \frac{t^{a-1}}{1+t^{a-1}}, \frac{t^2}{1+t^2}$ 与 $\frac{t}{1+t}$ 分别在任意紧集 $[L_1, L_2] \times [L_1, L_2], [L_1, L_2], [L_1, L_2]$ 及 $[L_1, L_2]$

$(0 \leq L_1, L_2 < +\infty)$ 上一致连续, 因此可得:

$$\left| \frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{a-1}} - \frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{a-1}} \right| \rightarrow 0, \left| \frac{D^{a-3}Tu(t_2)}{1+t_2^2} - \frac{D^{a-3}Tu(t_1)}{1+t_1^2} \right| \rightarrow 0, \left| \frac{D^{a-2}Tu(t_2)}{1+t_2} - \frac{D^{a-2}Tu(t_1)}{1+t_1} \right| \rightarrow 0,$$

当 $t_1 \rightarrow t_2, u \in \Omega$ 时一致成立.

另外, 观察到 $D^{a-1}u(t) = \int_0^{+\infty} G_1(t, s)y(s)ds$, 而函数 $G_1(t, s) \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$ 与 t 无关. 因此,

$T\Omega$ 在 $[0, +\infty)$ 上局部等度连续.

接着证明 $T\Omega$ 在无穷远处等度收敛. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由 $0 < \int_0^{+\infty} h(s)ds < +\infty$ 知存在 $B_1 > 0$ 使得 $0 <$

$$\int_{B_1}^{+\infty} M_k h(s)ds < \varepsilon. \text{ 由于 } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t^{a-1}} = 1, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{1+t^2} = 1, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{1+t} = 1, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t, B_1, \alpha)}{1+t^{a-1}} = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g_3(t, B_1, \alpha)}{1+t^2} = 0,$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g_2(t, B_1, \alpha)}{1+t} = 0$, 因此对于上述 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $B_2 > 0, B_3 > B_1$, 使得对所有 $t_1, t_2 > B_2$, 有

$$\left| \frac{t_2^{a-1}}{1+t_2^{a-1}} - \frac{t_1^{a-1}}{1+t_1^{a-1}} \right| \leq \left| 1 - \frac{t_2^{a-1}}{1+t_2^{a-1}} \right| + \left| 1 - \frac{t_1^{a-1}}{1+t_1^{a-1}} \right| < \varepsilon.$$

同时, 对所有 $t_1, t_2 > B_3, 0 \leq s \leq B_1$, 根据 $g(t, s, \alpha)$ 的定义及 $0 \leq s \leq B_1 < B_3 < t_1, t_2$, 可得 $g(t_1, s, \alpha) = \frac{t_1^{a-1} - (t_1 - s)^{a-1}}{\Gamma(\alpha)} \leq \frac{t_1^{a-1} - (t_1 - B_1)^{a-1}}{\Gamma(\alpha)}$, 即 $g(t_1, s, \alpha) \leq g(t_1, B_1, \alpha)$, 同理 $g(t_2, s, \alpha) \leq g(t_2, B_1, \alpha)$. 因此有:

$$\left| \frac{g(t_2, s, \alpha)}{1+t_2^{a-1}} - \frac{g(t_1, s, \alpha)}{1+t_1^{a-1}} \right| \leq \left| \frac{g(t_2, B_1, \alpha)}{1+t_2^{a-1}} \right| + \left| \frac{g(t_1, B_1, \alpha)}{1+t_1^{a-1}} \right| < \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}.$$

类似地, 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $B_4 > 0, B_5 > B_1$ 使得对所有 $t_1, t_2 > B_4$, 有 $\left| \frac{t_2^2}{1+t_2^2} - \frac{t_1^2}{1+t_1^2} \right| < \varepsilon$, 以及对所有 $t_1, t_2 > B_5$ 及 $0 \leq s \leq B_1$, 有 $\left| \frac{g_3(t_2, s, \alpha)}{1+t_2^2} - \frac{g_3(t_1, s, \alpha)}{1+t_1^2} \right| \leq \left| \frac{g_3(t_2, B_1, \alpha)}{1+t_2^2} \right| + \left| \frac{g_3(t_1, B_1, \alpha)}{1+t_1^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. 且还存在常数 $B_6 > 0, B_7 > B_1$ 使得对所有 $t_1, t_2 > B_6$, 有 $\left| \frac{t_2}{1+t_2} - \frac{t_1}{1+t_1} \right| < \varepsilon$, 以及对任意 $t_1, t_2 > B_7, 0 \leq s \leq B_1$, 有

$$\left| \frac{g_2(t_2, s, \alpha)}{1+t_2} - \frac{g_2(t_1, s, \alpha)}{1+t_1} \right| \leq \left| \frac{g_2(t_2, B_1, \alpha)}{1+t_2} \right| + \left| \frac{g_2(t_1, B_1, \alpha)}{1+t_1} \right| < \varepsilon.$$

令 $B > \max\{B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7\}$, 则对任意 $t_1, t_2 > B$, 有:

$$\begin{aligned} \left| \frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{a-1}} - \frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{a-1}} \right| &\leq \int_{B_1}^{+\infty} \left| \frac{G(t_2, s)}{1+t_2^{a-1}} - \frac{G(t_1, s)}{1+t_1^{a-1}} \right| M_k h(s) ds + \int_0^{B_1} \left| \frac{t_2^{a-1}}{1+t_2^{a-1}} - \frac{t_1^{a-1}}{1+t_1^{a-1}} \right| \\ &\quad \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\mu}{\Delta} \sum_{i=1}^q r_i \frac{\rho^{a+\beta_i-1}}{\Gamma(\alpha+\beta_i)} + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^p k_j \frac{\eta_j^{a-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| M_k h(s) ds \leq \left(\frac{1}{\Delta} \int_0^{B_1} M_k h(s) ds + \frac{2}{\Delta} \right) \varepsilon, \\ |D^{a-1}Tu(t_2) - D^{a-1}Tu(t_1)| &\leq \int_{B_1}^{+\infty} |G_1(t_2, s) - G_1(t_1, s)| M_k h(s) ds \leq \frac{2\Gamma(\alpha)}{\Delta} \varepsilon \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \left| \frac{D^{a-2}Tu(t_2)}{1+t_2} - \frac{D^{a-2}Tu(t_1)}{1+t_1} \right| &\leq \int_{B_1}^{+\infty} \left| \frac{G_2(t_2, s)}{1+t_2} - \frac{G_2(t_1, s)}{1+t_1} \right| M_k h(s) ds + \int_0^{B_1} \left| \frac{t_2}{1+t_2} - \frac{t_1}{1+t_1} \right| \\ &\quad \left| 1 + \frac{\mu\Gamma(\alpha)}{\Delta} \sum_{i=1}^q r_i \frac{\rho^{a+\beta_i-1}}{\Gamma(\alpha+\beta_i)} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta} \sum_{j=1}^p k_j \frac{\eta_j^{a-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| M_k h(s) ds \leq \left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta} \int_0^{B_1} M_k h(s) ds + \frac{2\Gamma(\alpha)}{\Delta} \right) \varepsilon, \\ \left| \frac{D^{a-3}Tu(t_2)}{1+t_2^2} - \frac{D^{a-3}Tu(t_1)}{1+t_1^2} \right| &\leq \int_{B_1}^{+\infty} \left| \frac{G_3(t_2, s)}{1+t_2^2} - \frac{G_3(t_1, s)}{1+t_1^2} \right| M_k h(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^{B_1} \left| \frac{t_2^2}{1+t_2^2} - \frac{t_1^2}{1+t_1^2} \right| \\ &\quad \left| 1 + \frac{\mu\Gamma(\alpha)}{\Delta} \sum_{i=1}^q r_i \frac{\rho^{a+\beta_i-1}}{\Gamma(\alpha+\beta_i)} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta} \sum_{j=1}^p k_j \frac{\eta_j^{a-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| M_k h(s) ds \leq \left(\frac{\Gamma(\alpha)}{2\Delta} \int_0^{B_1} M_k h(s) ds + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta} \right) \varepsilon \end{aligned}$$

成立, 因此 $T\Omega$ 在无穷远处等度收敛, 根据引理 6 可得积分算子 $T: Y \rightarrow Y$ 的全连续性.

证毕

定理 1 若条件 1)、2) 成立, 且 $\Delta > 0$, 并存在正常数 $\zeta > 0$ 使得

$$\zeta \geq \frac{M\Gamma(\alpha)}{\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) ds, M = \sup F(u(s)), \quad (9)$$

那么式(3)有无界解 $u = u(t)$, 且满足 $0 \leq \|u\|_\infty \leq \zeta, t \in [0, +\infty)$.

证明 根据引理 5, 求解式(3)等价于求解不动点问题 $u = \lambda Tu$. 设 $K = \{u \in Y \mid \|u\|_\infty \leq \zeta\}$. 易知当 $u = \lambda Tu, \lambda \in (0, 1)$ 时 $u \notin \partial K$. 因为若存在 $u_0 \in \partial K$ 使 $u_0 = \lambda Tu_0$, 那么对于 $\lambda \in (0, 1)$, 由 $\|u\|_\infty$ 的定义有:

$$\begin{aligned} \|u_0\|_\infty &= \max \left\{ \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|\lambda Tu_0(t)|}{1+t^{a-1}}, \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-3}\lambda Tu_0(t)|}{1+t^2}, \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-2}\lambda Tu_0(t)|}{1+t}, \sup_{t \in [0, +\infty)} |D^{a-1}\lambda Tu_0(t)| \right\} = \\ &= \zeta = \|\lambda Tu_0\|_\infty, \end{aligned}$$

即有:

$$\zeta = \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|\lambda Tu_0(t)|}{1+t^{a-1}} \leq \sup_{t \in [0, +\infty)} \left| \int_0^{+\infty} \frac{G(t, s)}{1+t^{a-1}} h(s) F(u(s)) ds \right| \leq \frac{M}{\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) ds < \frac{M\Gamma(\alpha)}{\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) ds;$$

或有:

$$\zeta = \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-3} \lambda T u_0(t)|}{1+t^2} \leq \sup_{t \in [0, +\infty)} \left| \int_0^{+\infty} \frac{G_3(t,s)}{1+t^2} h(s) F(u(s)) ds \right| < \\ \frac{M\Gamma(\alpha)}{2\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) ds < \frac{M\Gamma(\alpha)}{\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) ds;$$

又或有:

$$\zeta = \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-2} \lambda T u_0(t)|}{1+t} \leq \sup_{t \in [0, +\infty)} \left| \int_0^{+\infty} \frac{G_2(t,s)}{1+t} h(s) F(u(s)) ds \right| \leq \frac{M\Gamma(\alpha)}{\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) ds;$$

再或有:

$$\zeta = \sup_{t \in [0, +\infty)} |D^{a-1} \lambda T u_0(t)| \leq \sup_{t \in [0, +\infty)} \left| \int_0^{+\infty} G_1(t,s) h(s) F(u(s)) ds \right| \leq \frac{M\Gamma(\alpha)}{\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) ds.$$

综上所述, $\zeta \leq \frac{M\Gamma(\alpha)}{\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) ds$, 这与式(9)相矛盾。根据引理 5, 可知式(3)有无界解 $u = u(t)$, 且满足 $0 \leq \|u\|_{\infty} \leq \zeta, t \in [0, +\infty)$ 。证毕

定理 2 若条件 1)~4) 成立, 则可通过 2 个显式单调迭代序列近似得到式(3)的 2 个正解 $x^*(t)$ 与 $y^*(t)$, 并且 $\|x^*\|, \|y^*\| \in (0, \Lambda], x^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t), y^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$, 其中序列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足:

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq x^* \leq \dots \leq y^* \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_1 \leq y_0,$$

以及

$$\begin{cases} x_{n+1}(t) = \lambda \int_0^{+\infty} G(t,s) h(s) f(s, x_n(s), D^{a-3} x_n(s), D^{a-2} x_n(s), D^{a-1} x_n(s)) ds, \\ y_{n+1}(t) = \lambda \int_0^{+\infty} G(t,s) h(s) f(s, y_n(s), D^{a-3} y_n(s), D^{a-2} y_n(s), D^{a-1} y_n(s)) ds, \end{cases} \quad (10)$$

初值为 $x_0(t) = 0, y_0(t) = \frac{\Lambda}{\Gamma(\alpha)} t^{a-1}, \Lambda > 0$ 。

证明 定义 $Y_{\Lambda} = \{u \in Y \mid 0 \leq \|u\|_{\infty} \leq \Lambda\}$, $(Hu)(t) = \lambda(Tu)(t)$ 。易得 $H(Y_{\Lambda}) \subset Y_{\Lambda}$ 。因为对任意 $u \in Y_{\Lambda}$, 根据条件 4) 及引理 4, 有:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|Hu(t)|}{1+t^{a-1}} &\leq \sup_{t \in [0, +\infty)} \int_0^{+\infty} \frac{G(t,s)}{1+t^{a-1}} h(s) |F(u(s))| ds \leq \\ \frac{1}{\Delta} \int_0^{+\infty} h(s) f\left(s, \frac{(1+s^{a-1})u(s)}{1+s^{a-1}}, \frac{(1+s^2)D^{a-3}u(s)}{1+s^2}, \frac{(1+s)D^{a-2}u(s)}{1+s}, D^{a-1}u(s)\right) ds &\leq \\ \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\Delta \cdot \Lambda}{\Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} h(s) ds} \int_0^{+\infty} h(s) ds &= \frac{\Lambda}{\Gamma(\alpha)} < \Lambda, \\ \sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-3}Hu(t)|}{1+t^2} &\leq \sup_{t \in [0, +\infty)} \int_0^{+\infty} \frac{G_3(t,s)}{1+t^2} h(s) |F(u(s))| ds \leq \\ \frac{\Gamma(\alpha)}{2\Delta} \cdot \frac{\Delta \cdot \Lambda}{\Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} h(s) ds} \int_0^{+\infty} h(s) ds &= \frac{\Lambda}{2} < \Lambda, \end{aligned}$$

同理可得 $\sup_{t \in [0, +\infty)} \frac{|D^{a-2}Hu(t)|}{1+t} \leq \Lambda, \sup_{t \in [0, +\infty)} |D^{a-1}Hu(t)| \leq \Lambda$ 。

根据算子 H 的定义及条件 3), 可知算子 H 是一个非递减算子。对任意 $t \in [0, +\infty)$, 定义 $x_0(t) = 0, x_1(t) = Hx_0(t), x_2(t) = Hx_1(t) = H^2x_0(t)$ 。由于 $x_0(t) = 0 \in Y_{\Lambda}$ 及 $H(Y_{\Lambda}) \subset Y_{\Lambda}$, 可知 $x_1(t) \in Y_{\Lambda}, x_2(t) \in Y_{\Lambda}$ 且对任意 $t \in [0, +\infty)$, 有: $x_1(t) = Hx_0(t) = H[0(t)] \geq 0 = x_0(t), D^{a-3}x_1(t) = D^{a-3}Hx_0(t) \geq D^{a-3}x_0(t), D^{a-2}x_1(t) = D^{a-2}Hx_0(t) \geq D^{a-2}x_0(t), D^{a-1}x_1(t) = D^{a-1}Hx_0(t) \geq D^{a-1}x_0(t)$ 。

定义一个序列 $Hx_n = x_{n+1}, n \in \mathbf{N}$ 。显然, 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset Y_{\Lambda}$ 且满足对任意 $t \in [0, +\infty)$, 有: $x_{n+1}(t) \geq x_n(t), D^{a-3}x_{n+1}(t) \geq D^{a-3}x_n(t), D^{a-2}x_{n+1}(t) \geq D^{a-2}x_n(t), D^{a-1}x_{n+1}(t) \geq D^{a-1}x_n(t)$ 。由算子 H 的全连续性

知存在一个序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset Y_A, x^* \in Y_A$, 使得 $x_{n_k} \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty$ 。这与序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的单调性一起表明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ 。因为 H 是连续的且 $Hx_n = x_{n+1}$, 于是 $Hx^* = H(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Hx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$, 即 x^* 是算子 H 的一个不动点。

对任意 $t \in [0, +\infty)$, 再定义 $y_0(t) = \frac{\Lambda}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, y_1 = Hy_0, y_2 = Hy_1 = H^2 y_0$ 。于是有:

$$\begin{aligned} \frac{|y_0(t)|}{1+t^{\alpha-1}} &= \frac{\Lambda t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1+t^{\alpha-1})} < \Lambda, \frac{|D^{\alpha-3} y_0(t)|}{1+t^2} = \frac{\Lambda \Gamma(\alpha) t^2}{2\Gamma(\alpha)(1+t^2)} \leq \frac{\Lambda}{2} < \Lambda, \\ \frac{|D^{\alpha-2} y_0(t)|}{1+t} &= \frac{\Lambda \Gamma(\alpha) t}{\Gamma(\alpha)(1+t)} < \Lambda, |D^{\alpha-1} y_0(t)| = \Lambda, \end{aligned}$$

即 $y_0(t) = \frac{\Lambda}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \in Y_A$, 由 $H(Y_A) \subset Y_A$ 得 $y_1(t) \in Y_A, y_2(t) \in Y_A$ 。

根据引理4及条件4)可得:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (Hy_0)(t) = \lambda \int_0^{+\infty} G(t,s) h(s) f(s, y_0(s), D^{\alpha-3} y_0(s), D^{\alpha-2} y_0(s), D^{\alpha-1} y_0(s)) ds \leq \\ &\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\Delta} h(s) \frac{\Lambda \cdot \Delta}{\Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} h(s) ds} ds = \frac{\Lambda t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = y_0(t), \\ D^{\alpha-3} y_1(t) &= D^{\alpha-3} Hy_0(t) = \lambda \int_0^{+\infty} G_3(t,s) h(s) f(s, y_0(s), D^{\alpha-3} y_0(s), D^{\alpha-2} y_0(s), D^{\alpha-1} y_0(s)) ds \leq \\ &\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \Gamma(\alpha)}{2\Delta} h(s) \frac{\Lambda \cdot \Delta}{\Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} h(s) ds} ds = \frac{\Lambda t^2}{2} = D^{\alpha-3} y_0(t), \\ D^{\alpha-2} y_1(t) &= D^{\alpha-2} Hy_0(t) = \lambda \int_0^{+\infty} G_2(t,s) h(s) F(y_0(s)) ds \leq \Lambda t = D^{\alpha-2} y_0(t), \\ D^{\alpha-1} y_1(t) &= D^{\alpha-1} Hy_0(t) = \lambda \int_0^{+\infty} G_1(t,s) h(s) F(y_0(s)) ds \leq \Lambda = D^{\alpha-1} y_0(t). \end{aligned}$$

定义一个序列 $Hy_n = y_{n+1}, n \in \mathbf{N}$ 。根据条件3)可得:

$$y_k(t) - y_{k+1}(t) = Hy_{k-1}(t) - Hy_k(t) = \int_0^{+\infty} G(t,s) h(s) F(y_{k-1}(s)) ds - \int_0^{+\infty} G(t,s) h(s) F(y_k(s)) ds \geq 0,$$

借助引理4, 同理可得:

$$D^{\alpha-3} y_k(t) - D^{\alpha-3} y_{k+1}(t) \geq 0, D^{\alpha-2} y_k(t) - D^{\alpha-2} y_{k+1}(t) \geq 0, D^{\alpha-1} y_k(t) - D^{\alpha-1} y_{k+1}(t) \geq 0.$$

于是, 序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y_A$, 同时满足对任意 $t \in [0, +\infty)$, 有: $y_{n+1}(t) \leq y_n(t), D^{\alpha-3} y_{n+1}(t) \leq D^{\alpha-3} y_n(t), D^{\alpha-2} y_{n+1}(t) \leq D^{\alpha-2} y_n(t), D^{\alpha-1} y_{n+1}(t) \leq D^{\alpha-1} y_n(t)$ 。与前面类似, 可知存在 $y^* \in P$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$ 。因为 H 是连续的且 $Hy_n = y_{n+1}$, 于是 $Hy^* = H(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Hy_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = y^*$, 即 y^* 也是算子 H 的一个不动点。

根据以上推断, 可知 $x_n(t) \leq y_n(t), t \in [0, +\infty), n=0, 1, 2, \dots$; 再结合 $x_{n+1}(t) \geq x_n(t), y_{n+1}(t) \leq y_n(t)$, 得到 $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_1 \leq y_0$; 结合 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$, 进一步可得到 $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq x^* \leq \dots \leq y^* \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_1 \leq y_0$, 由条件2)知 $u=0$ 不是式(3)的解。

由上述过程可知 x^* 与 y^* 是式(3)的2个正解, 且可通过2个显式单调迭代序列即式(10)建立。证毕

3 实例

例1 考虑如下分数阶边值问题:

$$\begin{cases} D^{\frac{7}{2}} u(t) + \lambda e^{-\frac{t}{2}} f(t, u(t), D^{\frac{1}{2}} u(t), D^{\frac{3}{2}} u(t), D^{\frac{5}{2}} u(t)) = 0, \\ u^{(n)}(0) = 0, n = 0, 1, 2, \dots, m-2, \\ D^{\frac{5}{2}} u(+\infty) = \sum_{i=1}^q r_i I^{\beta_i} u(\rho) + \sum_{j=1}^p k_j u(\eta_j). \end{cases} \quad (11)$$

其中:

$$\lambda = \frac{1}{2}, r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 4, \beta_1 = \frac{3}{2}, \beta_2 = \frac{1}{2}, \rho = \frac{1}{2}, k_1 = 1, k_2 = \frac{1}{8}, \eta_1 = \frac{1}{2}, \eta_2 = \frac{1}{4},$$

$$f(t, u(t), D^{\frac{1}{2}}u(t), D^{\frac{3}{2}}u(t), D^{\frac{5}{2}}u(t)) = 1 + e^{-t} +$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{u(t)}{1+t^{\frac{5}{2}}+u(t)}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{D^{\frac{1}{2}}u(t)}{1+t^2+D^{\frac{1}{2}}u(t)}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{D^{\frac{3}{2}}u(t)}{1+t+D^{\frac{3}{2}}u(t)}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{D^{\frac{5}{2}}u(t)}{1+D^{\frac{5}{2}}u(t)}\right).$$

于是有:

$$0 < \int_0^{+\infty} h(s)ds = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{2}}ds = 2 < +\infty, f(t, 0, 0, 0, 0) = 1 + e^{-t} \neq 0,$$

$$f(t, (1+t^{\frac{5}{2}})w, (1+t^2)x, (1+t)y, z) = 1 + e^{-t} + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+t^{\frac{5}{2}})w(t)}{1+t^{\frac{5}{2}}+(1+t^{\frac{5}{2}})w(t)}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{z(t)}{1+z(t)}\right) +$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+t^2)x(t)}{1+t^2+(1+t^2)x(t)}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+t)y(t)}{1+t+(1+t)y(t)}\right) \leq 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6,$$

$$\Delta = \Gamma(\alpha) - \sum_{i=1}^q r_i \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta_i)} \rho^{a+\beta_i-1} - \sum_{j=1}^p k_j \eta_j^{a-1} \approx 2.8332 > 0.$$

因此条件 1)、2) 成立, 根据式(9), 选择 $\zeta > 13.9376$, 再根据定理 1, 可得式(11) 有无界解 $u = u(t)$ 使得 $0 \leq \|u\|_{\infty} \leq \zeta, t \in [0, +\infty)$.

例 2 考虑如下分数阶边值问题:

$$\begin{cases} D^{\frac{9}{2}}u(t) + \lambda h(t)f(t, u(t), D^{\frac{3}{2}}u(t), D^{\frac{5}{2}}u(t), D^{\frac{7}{2}}u(t)) = 0, \\ u^{(n)}(0) = 0, n = 0, 1, 2, \dots, m-2, \\ D^{\frac{7}{2}}u(+\infty) = \mu \sum_{i=1}^q r_i I^{\beta_i}u(\rho) + \sum_{j=1}^p k_j u(\eta_j). \end{cases} \quad (12)$$

其中:

$$\lambda = \frac{1}{3}, h(t) = \frac{1}{1+t^2}, \mu = \frac{1}{2}, r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{4}, \beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = \frac{3}{2}, \rho = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{8}, \eta = \frac{1}{2},$$

$$f(t, u(t), D^{\frac{3}{2}}u(t), D^{\frac{5}{2}}u(t), D^{\frac{7}{2}}u(t)) = -4 + \frac{e^{-t}}{1000} + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{u(t)}{4+t^{\frac{7}{2}}+u(t)}\right) +$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{D^{\frac{3}{2}}u(t)}{3+t^2+D^{\frac{3}{2}}u(t)}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{D^{\frac{5}{2}}u(t)}{1+t+D^{\frac{5}{2}}u(t)}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{D^{\frac{7}{2}}u(t)}{2+D^{\frac{7}{2}}u(t)}\right).$$

于是有:

$$0 < \int_0^{+\infty} h(s)ds = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2}ds = \frac{\pi}{2} < +\infty, f(t, 0, 0, 0, 0) = -4 + \frac{e^{-t}}{1000} \neq 0,$$

$$\Delta = \Gamma(\alpha) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q r_i \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta_i)} \rho^{a+\beta_i-1} - k \eta^{a-1} \approx 11.6025 > 0.$$

另外, 对任意 $t \in [0, +\infty)$ 及 $w_1, w_2, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in (0, +\infty)$, 不失一般性, 设 $w_1 > w_2, x_1 > x_2,$

$y_1 > y_2, z_1 > z_2$, 由于 $\frac{w_1}{4+t^{\frac{7}{2}}+w_1} > \frac{w_2}{4+t^{\frac{7}{2}}+w_2}, \frac{x_1}{3+t^2+x_1} > \frac{x_2}{3+t^2+x_2}, \frac{y_1}{1+t+y_1} > \frac{y_2}{1+t+y_2}, \frac{z_1}{2+z_1} > \frac{z_2}{2+z_2},$

因此 $f(t, w_1, x_1, y_1, z_1) - f(t, w_2, x_2, y_2, z_2) > 0$. 当 $(t, w, x, y, z) \in [0, +\infty) \times [0, 1]^4$ 时, 有:

$$f(t, (1+t^{\frac{7}{2}})w, (1+t^2)x, (1+t)y, z) =$$

$$-4 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+t^{\frac{7}{2}})w(t)}{4+t^{\frac{7}{2}}+w(t)}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+t^2)x(t)}{3+t^2+(1+t^2)x(t)}\right) +$$

$$\frac{e^{-t}}{1\,000} + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+t)y(t)}{1+t+(1+t)y(t)}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{z(t)}{2+z(t)}\right) \leq \frac{1}{1\,000} \leq \frac{\Delta \cdot \Lambda}{\Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} h(t) dt} \approx 0.635\,2,$$

故而条件 3)、4) 成立。

根据定理 2 可知式(12)有 2 个正解 x^*, y^* , 且 $\|x^*\|, \|y^*\| \in (0, 1]$, 并可由下述单调迭代序列逼近:

$$\begin{cases} x_{n+1}(t) = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} G(t, s) h(s) f(s, x_n(s), D^{a-3} x_n(s), D^{a-2} x_n(s), D^{a-1} x_n(s)) ds, \\ y_{n+1}(t) = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} G(t, s) h(s) f(s, y_n(s), D^{a-3} y_n(s), D^{a-2} y_n(s), D^{a-1} y_n(s)) ds. \end{cases}$$

4 结论

本文研究了一类含 3 个分数阶导数项的无穷区间上分数阶微分方程非局部边值问题解的存在性及多重性。首先通过 Leray-Schauder 非线性抉择定理及 Green 函数的相关性质得到式(3)无界解存在的充分条件;接着利用单调迭代法近似得到式(3)的 2 个正解。从分数阶微分方程有限区间边值问题到无穷区间边值问题、从两点边值条件到非局部多点边值条件,上述研究范围的不断拓展推动了分数阶微分方程边值问题理论研究的深入发展。本文所得结论适用于分析研究含有多个分数阶导数项的系统,能够更加准确地描述系统的动态行为;但在实际研究过程中,本文所得结论可能不能完全反映实际问题的复杂性。

参考文献:

- [1] JOSHI H, YAVUZ M. Transition dynamics between a novel coinfection model of fractional-order for COVID-19 and tuberculosis via a treatment mechanism[J]. The European Physical Journal Plus, 2023, 138(5): 468.
- [2] TARASOV V E. Fractional-order difference equations for physical lattices and some applications[J]. Journal of Mathematical Physics, 2015, 56(10): 103506.
- [3] PODLUBNY I. Geometric and physical interpretation of fractional intergration and fractional differentiation[J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2002, 5(4): 367-386.
- [4] ZHONG W Y, LIN W. Nonlocal and multiple-point boundary value problem for fractional differential equations[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(3): 1345-1351.
- [5] KHAN R A. Existence and approximation of solutions to three-point boundary value problems for fractional differential equations[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2011(58): 1-8.
- [6] CUI Y J. Uniqueness of solution for boundary value problems for fractional differential equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2016, 51: 48-54.
- [7] MA T T, TIAN Y, HUO Q, et al. Boundary value problem for linear and nonlinear fractional differential equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2018, 86: 1-7.
- [8] SONG S Y, CUI Y J. Existence of solutions for integral boundary value problems of mixed fractional differential equations under resonance[J]. Boundary Value Problems, 2020, 2020(1): 23.
- [9] MATAR M M, ABBAS M I, ALZABUT J, et al. Investigation of the p -Laplacian nonperiodic nonlinear boundary value problem via generalized Caputo fractional derivatives[J]. Advances in Difference Equations, 2021, 2021(1): 68.
- [10] WANG L, ZHANG X Q. Existence of positive solutions for a class of higher-order nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions and a parameter[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2014, 44(1): 293-316.
- [11] 罗茜, 许勇强. 含参数分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2024, 42(6): 177-185.
LUO X, XU Y Q. Existence of positive solutions for boundary value problems of fractional differential equations with parameters[J]. Journal of Guangxi Normal University (Natural Science Edition), 2024, 42(6): 177-185.
- [12] GHOLAMI Y. Existence of an unbounded solution for multi-point boundary value problems of fractional differential equations on an infinite domain[J]. Fractional Differential Calculus, 2014, 4(2): 125-136.
- [13] ZHANG W, LIU W B. Existence, uniqueness, and multiplicity results on positive solutions for a class of Hadamard-type fractional boundary value problem on an infinite interval[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2020, 43(5): 2251-2275.

- [14] LIU J H, ZHANG K M, XIE X J. The existence of solutions of Hadamard fractional differential equations with integral and discrete boundary conditions on infinite interval[J]. Electronic Research Archive, 2024, 32(4): 2286-2309.
- [15] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及应用[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2013.
- BAI Z B. Theory and application of boundary value problems for fractional differential equations[M]. Beijing: China Science and Technology Press, 2013.
- [16] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Amsterdam: Elsevier, 2006: vii-x.
- [17] ZHAO X K, GE W G. Unbounded solutions for a fractional boundary value problems on the infinite interval[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2010, 109(2): 495-505.
- [18] SU X W, ZHANG S Q. Unbounded solutions to a boundary value problem of fractional order on the half-line[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 61(4): 1079-1087.
- [19] 许天周. 应用泛函分析[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- XU T Z. Applied functional analysis[M]. Beijing: Science Press, 2002.

A Class of Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations with Multiple Derivative Terms on Infinite Intervals

GAO Huimin, ZHOU Wenxue, CHEN Xiao

(College of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Consider a nonlocal boundary value problems of a class of Riemann-Liouville fractional differential equations on infinite intervals. The nonlinear term of the equation is dependent on three lower-order fractional derivative terms, and the boundary value condition is the sum of fractional integral and multipoint boundary value conditions. Firstly, the Green function of the corresponding boundary value problem is constructed, and some properties of it are obtained. Then, the existence and multiplicity of solutions to this boundary value problems are studied by using Leray-Schauder nonlinear alternative theorem, the relevant properties of Green function and monotone iterative method. After sufficient conditions for the existence of unbounded solution and two positive solutions to this boundary value problem are obtained, examples are provided to verify the applicability and feasibility of the main results. The existing academic research findings are generalized by the results.

Keywords: fractional differential equations; infinite intervals; nonlocal boundary value problems; Leray-Schauder nonlinear alternative theorem; monotone iteration method

(责任编辑 方 兴)