运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20250408

一类系统广义变分-半变分不等式的 α-适定性研究*

赵　宇[1]，舒巧媛[2]，陶　佳[2]
(1. 重庆第二师范学院 人工智能学院；2. 重庆第二师范学院 数学与大数据学院，重庆 400067)

摘要：针对系统广义变分-半变分不等式研究其 α-适定性。首先，定义了 α-近似序列以及构造集合 $\Omega_\alpha(\varepsilon)$、$\Psi_\alpha(\varepsilon)$等，在适当假设下证明了 2 个集合的等价性以及闭性。其次，在相关算子适当的假设下，讨论了系统广义变分-半变分不等式的度量性质。通过证明得到该系统广义变分-半变分不等式 α-强适定、α-广义强适定性的充分必要条件。该结果进一步推广了变分-半变分不等式适定性的相关定理，为该领域的进一步研究奠定基础。

关键词：系统广义变分-半变分不等式；度量性质；α-强适定性；广义强适定性
中图分类号：O244；O221.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2025)04-0034-08

适定性是优化领域的经典研究内容，早期的研究至少要追溯到 1966 年，当时 Tykhonov 针对无约束极小值问题首次引入适定性的概念，即讨论极小值问题解的存在唯一性，并且要求每个最小值序列都收敛到唯一的最小值[1]。由于无约束极小值问题在适当假设下可以转化为变分不等式问题，因此，适定性的概念被推广到变分不等式的研究。近年来，针对变分不等式、半变分不等式适定性的研究内容主要聚焦于对各种适定性的讨论，如 Tykhonov 适定性[2-4]、Levitin-Polyak 适定性[5-7]、α-适定性、α-L 适定性[8-10]以及扰动适定性[11-13]等。当前，在各类变分不等式和半变分不等式的适定性度量、适定条件的探讨，以及变分不等式及其相关包含问题的各种等价结果的研究方面，已经取得了大量优秀的成果。例如，近期 Cen 等人[14]针对 Banach 空间中椭圆型半变分不等式的可解性及解集的紧性进行研究。文中，讨论了一类椭圆型变分不等式的度量性质，给出了广义强、弱适定的充分条件。在变分-半变分不等式方面，Xiao 等人[15]提出了一类带扰动的变分-半变分不等式，研究了该变分-半变分不等式的一些度量性质，给出了广义强适定的条件。此外，在一定的假设下，他们还证明了该变分-半变分不等式的适定性与相应包含问题的适定性之间的等价性。另一方面，大量学者将变分不等式的形式进行推广，形成了系统变分、半变分不等式。这种推广形式在工程、力学、经济学等领域有着重要的应用。Hu 等人[16]提出了可分逆变分不等式系统，并对适定性进行了讨论。随后，Wang 等人[17]提出了一类系统半变分不等式。在适当假设下，他们给出了该半变分不等式系统适定性的度量性质以及与包含问题适定的等价性。近期，Ceng 等人[18]对 Wang 等人[17]的研究内容进行了进一步推广，讨论集值映射下系统半变分不等式的 α-适定性，并给出了系统半变分不等式包含问题的适定性的一些等价结果。

受上述研究内容的启发，本文提出了一类系统广义变分-半变分不等式(GVHI)。通过采用度量刻画该变分不等式的适定性，得到其适定的充分必要条件。GVHI 具体的形式为：设对 $i=1,2$，V_i 为 Banach 空间，V_i^* 为 V_i 的对偶空间，$V=V_1\times V_2$ 为积空间，对任意的 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)\in V$，范数定义为 $\|\boldsymbol{u}\|_V=\|u_1\|_{V_1}+\|u_2\|_{V_2}$。$A_i:V_1\times V_2\to 2^{V_i^*}$ 表示从 $V_1\times V_2$ 到 $2^{V_k^*}$ 的集值映射，f_i 为对偶空间 V_i^* 中的任意一个元素，$J_i:V_1\times V_2\to\mathbf{R}$ 为空间 $V_1\times V_2$ 上的泛函，$j_i:V_i\times V_i\to\mathbf{R}$ 为关于第二变元下半连续的函数。于是 GVHI 可表示为：寻找 $(u_1,u_2)\in V_1\times V_2$ 和 $(\omega_1,\omega_2)\in A_1(u_1,u_2)\times A_2(u_1,u_2)$ 使得：

$$(\mathrm{GVHI})\begin{cases}\langle\omega_1-f_1,v_1-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^\circ(u_1,u_2;v_1-u_1)+j_1(u_1,v_1)\geqslant 0,\ \forall\, v_1\in V_1;\\ \langle\omega_2-f_2,v_2-u_2\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^\circ(u_1,u_2;v_2-u_2)+j_2(u_2,v_2)\geqslant 0,\ \forall\, v_2\in V_2。\end{cases}$$

* **收稿日期**：2024-09-10　　**网络出版时间**：2025-05-19T09:43
资助项目：重庆市自然科学基金面上项目(No. CSTB2022NSCQ-MSX0404)；重庆市教育委员会科学技术研究计划青年项目(No. KJQN 202401624)
第一作者简介：赵宇，男，讲师，博士研究生，研究方向为最优化理论及应用、计算机视觉，E-mail：zhaoyu@cque.edu.cn；**通信作者**：舒巧媛，女，讲师，博士研究生，E-mail：shuqy@cque.edu.cn
网络出版地址：https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250507.1635.022

其中：$J_i^{\circ}(u_i,u_j)$表示 $J(\cdot,u_j)$的广义方向导数，定义为：

$$J_i^{\circ}(u_i,u_j;v_i-u_i)=\lim_{w\to u_i,\lambda\downarrow 0}\sup\frac{J(w+\lambda(v_i-u_i),u_j)-J(w,u_j)}{\lambda}。$$

当 A_i，j_i 取一些特殊值时，上述系统广义变分不等式可退化为如下几种形式。

情形 1，当 $i=1,2$，$j_i=0$，$A_i(\cdot,\cdot)$为集值映射时，GVHI 退化为系统半变分不等式：

$$(\mathrm{SGHVI})\begin{cases}\langle\omega_1-f_1,v_1-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^{\circ}(u_1,u_2;v_1-u_1)\geqslant 0,\forall\, v_1\in V_1;\\ \langle\omega_2-f_2,v_2-u_2\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^{\circ}(u_1,u_2;v_2-u_2)\geqslant 0,\forall\, v_2\in V_2。\end{cases}$$

上式中，$(\omega_1,\omega_2)\in A_1(u_1,u_2)\times A_2(u_1,u_2)$。Ceng 等[18]对上述系统广义半变分不等式的 α-适定的度量性质进行了刻画，不仅如此，他们还给出了该广义半变分不等式系统及其导出的半变分包含问题的强 α-适定的等价结果。

情形 2，当 $i=1,2$，$j_i=0$，$A_i(\cdot,\cdot)$为单值映射时，则 GVHI 退化为系统半变分不等式：

$$(\mathrm{SHVI})\begin{cases}\langle A_1(u_1,u_2)-f_1,v_1-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^{\circ}(u_1,u_2;v_1-u_1)\geqslant 0,\forall\, v_1\in V_1;\\ \langle A_2(u_1,u_2)-f_2,v_2-u_2\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^{\circ}(u_1,u_2;v_2-u_2)\geqslant 0,\forall\, v_2\in V_2。\end{cases}$$

上述系统半变分不等式形式上与 SGHVI 相近，最大的区别在于算子 $A_i(\cdot,\cdot)$为单值映射。Wang 等人[17]针对上述系统半变分不等式讨论了其强适定和广义适定的充要条件，得到了该系统与半变分包含问题适定的等价性。

情形 3，当 $i=1,2$，$j_i=G(v_i)-G(u_i)$，$A_i(u_1,u_2)=A_i(u_i)$且 $u_2=Tu_1$ 时，则 GVHI 退化为系统可分变分-半变分不等式：

$$(\mathrm{SVHVI})\begin{cases}u_2=Tu_1;\\ \langle A_1u_1-f_1,v_1-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^{\circ}(u_1;v_1-u_1)+G(v_1)-G(u_1)\geqslant 0,\forall\, v_1\in V_1;\\ \langle A_2u_2-f_2,v_2-u_2\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^{\circ}(u_2;v_2-u_2)+G(v_2)-G(u_2)\geqslant 0,\forall\, v_2\in V_2。\end{cases}$$

Hu 等人[19]对上述系统可分变分-半变分不等式的变分包含问题的等价性进行了研究，在适当假设下得到强、弱适定与 SVHVI 解存在的等价条件。

通过文献分析可知，对 GVHI 的 α-适定性进行研究是系统变分不等式、系统可分变分-半变分不等式的进一步推广，具有重要的理论研究价值。

1　预备知识

定义 1　设 A 为 Banach 空间 V 中的非空子集，则集合 A 的非紧性测度 μ 定义为：

$$\mu(A)=\inf\{\varepsilon>0:A\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\mathrm{diam}(A_i)<\varepsilon,i=1,2,\cdots,n\},$$

其中：对 $i=1,\cdots,n$，A_i 为 V 中的非空子集，$\mathrm{diam}(A_i)=\sup\{\|x_1-x_2\|:x_1,x_2\in A_i\}$表示集合 A_i 的直径。

定义 2　设 A,B 为 Banach 空间 V 中的 2 个非空子集，则 A 与 B 的 Hausdroff 距离定义为：$\mathcal{H}(A,B)=\max\{e(A,B),e(B,A)\}$，其中 $e(A,B)=\sup\limits_{a\in A}d(a,B)$，$d(a,B)=\inf\limits_{b\in B}\|a-b\|$。

定义 3　设 $C_B(V^*)$表示 V^* 中所有非空有界闭子集组成的集合，$A:V\to C_B(V^*)$为集值算子，则：

1) 如果对任意的 $u,v\in V$，从$[0,1]$到$[0,+\infty)$的泛函 $t\longmapsto\mathcal{H}(A(u+t(v-u)),A(u))$在 0^+ 处连续，则称 A 为 $\mathcal{H}$-半连续。

2) 如果对任意的 $\varepsilon>0$ 以及任意固定的 $u_0\in V$，存在 $\delta>0$ 使得对任意的 $v\in V$，$\|v-u_0\|<\delta$ 有 $\mathcal{H}((A(v),A(u_0))<\varepsilon$，则称 A 为 $\mathcal{H}$-连续。

引理 1　设 $C_B(V)$是范数向量空间 V 中所有非空有界闭子集构成的集合。如果集合 V_1,V_2 为 $C_B(V)$的子集，那么对每个 $\varepsilon>0$ 和 $u\in V_1$，存在 $v\in V_2$，使得 $\|u-v\|_V\leqslant(1+\varepsilon)\mathcal{H}(V_1,V_2)$。此外，若集合 V_1 为 V 的紧子集，则有 $\|u-v\|_V\leqslant\mathcal{H}(V_1,V_2)$。

定义 4　设 V 为 Banach 空间，V^* 为对偶空间，$J:V\to\mathbf{R}$ 为 V 上的局部 Lipschitz 泛函，则 J 在点 $u\in V$ 和方向 $v\in V$ 的 Clarke 广义方向导数定义为：

$$J^{\circ}(u;v)=\limsup_{w\to u,\lambda\downarrow 0}\frac{J(w+\lambda v)-J(w)}{\lambda}。$$

此外,$\partial J(u)$表示 J 在点 u 处的 Clarke 广义次微分,定义为:

$$\partial J(u)=\{\xi\in V^{*}:J^{\circ}(u;v)\geqslant\langle\xi,v\rangle_{V^{*}\times V},\forall v\in V\}。$$

命题 1 设 $J:V\to\mathbf{R}$ 为 V 上的局部 Lipschitz 泛函,对给定的 $u,v\in V$ 有:

1) 广义方向导数 $J^{\circ}(u;v)$关于第二变元是有限的,并且具有正齐次性和次可加性;

2) $J^{\circ}(u;v)$在 $V\times V$ 上是上半连续的;

3) $J^{\circ}(u;-v)=(-J)^{\circ}(u;v)$;

4) 对所有的 $u\in V$,$\partial J(u)$是 V^{*} 上的非空、凸、有界弱星紧集;

5) 对所有的 $v\in V$ 有 $J^{\circ}(u;v)=\max\{\langle\xi,v\rangle_{V^{*}\times V}:\xi\in\partial J(u)\}$,其中:$\partial J(u)$的图像在 $X\times(w^{*}-X^{*})$上是闭的,这里$(w^{*}-X^{*})$表示 X^{*} 中赋予弱星拓扑。如果$\{u_n\}\subset V^{*}$,$\{u_n^{*}\}\subset V^{*}$,存在 $u\in V$ 和 $u^{*}\in V^{*}$,使得 $u_n^{*}\in\partial J(u_n)$,$u_n\to u$ 并且 u_n^{*} 弱星收敛到 u^{*},则 $u^{*}\in\partial J(u)$。

命题 2 如果序列$\{u_n\}\in V$,$\{u_n^{*}\}\in V^{*}$ 满足 $u_n\to u$,$u_n^{*}\overset{w^{*}}{\to}u^{*}$,则$\langle u_n^{*},u_n\rangle_{V^{*}\times V}\to\langle u^{*},u_n\rangle_{V^{*}\times V}$。

2 系统广义变分-半变分不等式的 α-适定性

本节将对系统广义变分-半变分不等式的 α-适定性进行研究。为了方便后续讨论,本文先给出如下定义。

定义 5 称序列$\{\boldsymbol{u}^{n}\}\subset V_1\times V_2$ 是系统广义变分-半变分不等式 GVHI 的 α-近似序列,当且仅当存在 $0<\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$以及$(\omega_1^{n},\omega_2^{n})\in A_1(u_1^{n},u_2^{n})\times A_2(u_1^{n},u_2^{n})$,满足:

$$\begin{cases}\langle\omega_1^{n}-f_1,v_1-u_1^{n}\rangle_{V_1^{*}\times V_1}+J_1^{\circ}(u_1^{n},u_2^{n};v_1-u_1^{n})+j_1(u_1^{n},v_1)\geqslant-\varepsilon_n\alpha_1(v_1-u_1^{n}),\forall v_1\in V_1;\\ \langle\omega_2^{n}-f_2,v_2-u_2^{n}\rangle_{V_2^{*}\times V_2}+J_2^{\circ}(u_1^{n},u_2^{n};v_2-u_2^{n})+j_2(u_2^{n},v_2)\geqslant-\varepsilon_n\alpha_2(v_2-u_2^{n}),\forall v_2\in V_2。\end{cases}$$

其中:$\boldsymbol{u}^{n}=(u_1^{n},u_2^{n})$,并且对 $i=1,2$,$\alpha_i:V_i\to[0,+\infty)$为具有正齐次性的连续、凸泛函。

定义 6 称系统广义变分-半变分不等式 GVHI 是 α-强(弱)适定的,如果 GVHI 存在唯一解 $\boldsymbol{u}$,并且对 GVHI 的每一个 α-近似序列$\{\boldsymbol{u}^{n}\}$都强(弱)收敛到 $\boldsymbol{u}$。

定义 7 称系统广义变分-半变分不等式 GVHI 是广义 α-强(弱)适定的,如果 GVHI 的解集非空,并且对 GVHI 的每一个 α-近似序列都存在子序列$\{\boldsymbol{u}^{n_k}\}$强(弱)收敛到解集中的某一点。

为了便于后续证明,接下来首先定义如下 2 个集合。对任意的 $\varepsilon>0$,$\Omega_{\alpha}(\varepsilon)$与 $\Psi_{\alpha}(\varepsilon)$定义为:

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha}(\varepsilon)=\{&(u_1,u_2)\in V_1\times V_2:\exists(\omega_1,\omega_2)\in A_1(u_1,u_2)\times A_2(u_1,u_2);\\ &\langle\omega_1-f_1,v_1-u_1\rangle_{V_1^{*}\times V_1}+J_1^{\circ}(u_1,u_2;v_1-u_1)+j_1(u_1,v_1)\geqslant-\varepsilon\alpha_1(v_1-u_1),\forall v_1\in V_1;\\ &\langle\omega_2-f_2,v_2-u_2\rangle_{V_2^{*}\times V_2}+J_2^{\circ}(u_1,u_2;v_2-u_2)+j_2(u_2,v_2)\geqslant-\varepsilon\alpha_2(v_2-u_2),\forall v_2\in V_2。\}\\ \Psi_{\alpha}(\varepsilon)=\{&(u_1,u_2)\in V_1\times V_2:\forall(\mu_1,\mu_2)\in A_1(v_1,u_2)\times A_2(u_1,v_2);\\ &\langle\mu_1-f_1,v_1-u_1\rangle_{V_1^{*}\times V_1}+J_1^{\circ}(u_1,u_2;v_1-u_1)+j_1(u_1,v_1)\geqslant-\varepsilon\alpha_1(v_1-u_1),\forall v_1\in V_1;\\ &\langle\mu_2-f_2,v_2-u_2\rangle_{V_2^{*}\times V_2}+J_2^{\circ}(u_1,u_2;v_2-u_2)+j_2(u_2,v_2)\geqslant-\varepsilon\alpha_2(v_2-u_2),\forall v_2\in V_2。\}\end{aligned}$$

接着,针对算子 A,j,J,α,本文进行如下假设:

H(A) 1) 对 $i=1,2$,$A_i:V_1\times V_2\to 2^{V_i^{*}}$ 为集值映射。

2) $A_1:V_1\times V_2\to 2^{V_1^{*}}$ 关于第 1 个变元单调,即对任意的 $u_1,v_1\in V_1$,$u_2\in V_2$ 有:

$$\langle u_1^{*}-v_1^{*},u_1-v_1\rangle\geqslant 0,\forall u_1^{*}\in A_1(u_1,u_2),v_1^{*}\in A_1(v_1,u_2)。$$

3) $A_2:V_1\times V_2\to 2^{V_2^{*}}$ 关于第 2 个变元单调,即对任意的 $u_1\in V_1$,$u_2,v_2\in V_2$ 有:

$$\langle u_2^{*}-v_2^{*},u_2-v_2\rangle\geqslant 0,\forall u_2^{*}\in A_2(u_1,u_2),v_2^{*}\in A_2(u_1,v_2)。$$

4) $A_1:V_1\times V_2\to 2^{V_1^{*}}$ 是非空紧值的且为 $\mathcal{H}$-半连续映射。

5) $A_2:V_1\times V_2\to 2^{V_2^{*}}$ 是非空紧值的且为 $\mathcal{H}$-半连续映射。

6) $A_1:V_1\times V_2\to 2^{V_1^{*}}$ 是非空紧值的且为 $\mathcal{H}$-连续映射。

7) $A_2: V_1\times V_2\to 2^{V_2^*}$ 是非空紧值的且为 $\mathcal{H}$-连续映射。

H(j)　1) 对 $i=1,2, j_i: V_i\times V_i\to\mathbf{R}, \mathrm{dom}(j_i)\neq\varnothing$。

2) 对任意的 $(u,u)\in V_1\times V_2$, $j_i(u,u)=0$。

3) 对任意的 $u\in V_1$, $j_i(u,\cdot)$是凸的，即 $\forall t\in(0,1)$

$j_i(u,tv_1+(1-t)v_2)\leqslant tj_i(u,v_1)+(1-t)j_i(u,v_2)$, $\forall v_1,v_2\in V_2$。

4) 对任意的 $v\in V_2$, $j_i(\cdot,v)$是上半连续的，即若序列 $u_n\to u$ 有 $\limsup\limits_{n\to\infty} j_i(u_n,v)\leqslant j_i(u,v)$。

5) 对任意的 $u\in V_1$, $j_i(u,\cdot)$的下半连续的，即若序列 $v_n\to v$ 有 $\liminf\limits_{n\to\infty} j_i(u,v_n)\geqslant j_i(u,v)$。

H(J)　1) 对 $i=1,2, J_i: V_1\times V_2\to\mathbf{R}$ 关于第 1 变元和第 2 变元是局部 Lipschitz 的。

2) 对任意的 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)\in V_1\times V_2$，有 $J_i(u_1,u_2)+J_i(v_1,v_2)=J_i(u_1,v_2)+J_i(v_1,u_2)$。

H(α)　1) 对 $i=1,2,\alpha_i: V_i\to[0,+\infty)$为连续凸泛函。

2) α_i 具有正齐次性，即对任意的 $v_i\in V_i$ 和 $s>0$ 有 $\alpha_i(sv_i)=s\alpha_i(v_i)$。

引理 2　设 $i=1,2, V_i$ 为 Banach 空间，V_i^* 为对偶空间，若 A_i, j_i, J_i, α_i 分别满足 H(A)的 1)～5)，H(j)的 1)～3)，H(J)和 H(α)，则有 $\Omega_\alpha(\varepsilon)=\Psi_\alpha(\varepsilon)$。

证明　要证 $\Omega_\alpha(\varepsilon)=\Psi_\alpha(\varepsilon)$只需要证明 $\Omega_\alpha(\varepsilon)\subseteq\Psi_\alpha(\varepsilon)$并且 $\Psi_\alpha(\varepsilon)\subseteq\Omega_\alpha(\varepsilon)$。由于 A_1 关于第 1 变元，A_2 第 2 变元具有单调性，即对任意的 $(\omega_1,\omega_2)\in A_1(u_1,u_2)\times A_2(u_1,u_2)$, $\mu_1\in A_1(v_1,u_2)$, $\mu_2\in A_2(u_1,v_2)$有：

$$\begin{cases}\langle\mu_1-\omega_1, v_1-u_1\rangle\geqslant 0,\\ \langle\mu_2-\omega_2, v_2-u_2\rangle\geqslant 0。\end{cases}$$

于是根据 $\Omega_\alpha(\varepsilon)$, $\Psi_\alpha(\varepsilon)$的定义显然有对任意的 $\varepsilon>0$, $\Omega_\alpha(\varepsilon)\subseteq\Psi_\alpha(\varepsilon)$。

接下来证明 $\Psi_\alpha(\varepsilon)\subseteq\Omega_\alpha(\varepsilon)$。假设对任意固定的 $(u_1,u_2)\in\Psi_\alpha(\varepsilon)$，根据 $\Psi_\alpha(\varepsilon)$的定义，则对任意的 $(v_1,v_2)\in V_1\times V_2$ 有：

$$\begin{cases}\langle\mu_1-f_1, v_1-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^\circ(u_1,u_2;v_1-u_1)+j_1(u_1,v_1)\geqslant-\varepsilon\alpha_1(v_1-u_1), \forall\mu_1\in A_1(v_1,u_2);\\ \langle\mu_2-f_2, v_2-u_2\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^\circ(u_1,u_2;v_2-u_2)+j_2(u_2,v_2)\geqslant-\varepsilon\alpha_2(v_2-u_2), \forall\mu_2\in A_2(u_1,v_2)。\end{cases}\tag{1}$$

于是对任意的 $(\omega_1,\omega_2)\in V_1\times V_2$ 和任意的 $t\in(0,1)$，令 $v_i:=w_{i,t}=u_i+t(\omega_i-u_i)$以及 $(\omega_1^t,\omega_2^t)\in A_1(w_{1,t},u_2)\times A_2(u_1,w_{2,t})$，并代入式(1)有：

$$\begin{cases}\langle\omega_1^t-f_1, w_{1,t}-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J^\circ{}_1(u_1,u_2;w_{1,t}-u_1)+j_1(u_1,w_{1,t})\geqslant-\varepsilon\alpha_1(w_{1,t}-u_1),\\ \langle\omega_2^t-f_2, w_{2,t}-u_2\rangle_{V_2^*\times V_2}+J^\circ{}_2(u_1,u_2;w_{2,t}-u_2)+j_2(u_2,w_{2,t})\geqslant-\varepsilon\alpha_2(w_{2,t}-u_2)。\end{cases}\tag{2}$$

根据假设 H(j)2)～3)可知，当 $i=1,2$ 时，有：

$$j_i(u_i,u_i+t(\omega_i-u_i))\leqslant tj_i(u_i,\omega_i)+(1-t)j_i(u_i,u_i)=tj_i(u_i,\omega_i)。\tag{3}$$

根据式(2)、(3)可得：

$$\begin{cases}\langle\omega_1^t-f_1, t(\omega_1-u_1)\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^\circ(u_1,u_2;t(\omega_1-u_1))+tj_1(u_1,\omega_1)\geqslant-\varepsilon\alpha_1(t(\omega_1-u_1)),\\ \langle\omega_2^t-f_2, t(\omega_2-u_2)\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^\circ(u_1,u_2;t(\omega_2-u_2))+tj_2(u_2,\omega_2)\geqslant-\varepsilon\alpha_2(t(\omega_2-u_2))。\end{cases}\tag{4}$$

根据命题 1 的结论 1)及 α_1,α_2 的正齐次性，则上式可整理为：

$$\begin{cases}\langle\omega_1^t-f_1, \omega_1-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J^\circ{}_1(u_1,u_2;\omega_1-u_1)+j_1(u_1,\omega_1)\geqslant-\varepsilon\alpha_1(\omega_1-u_1),\\ \langle\omega_2^t-f_2, \omega_2-u_2\rangle_{V_2^*\times V_2}+J^\circ{}_2(u_1,u_2;\omega_2-u_2)+j_2(u_2,\omega_2)\geqslant-\varepsilon\alpha_2(\omega_2-u_2)。\end{cases}\tag{5}$$

根据假设 H(A)的 4)～5)可知 $A_1(w_{1,t},u_2)$, $A_2(u_1,w_{2,t})$, $A_1(u_1,u_2)$, $A_2(u_1,u_2)$为非空紧集。结合引理 1 可知，对任意的 $t\in(0,1)$, $(\omega_1^t,\omega_2^t)\in A_1(w_{1,t},u_2)\times A_2(u_1,w_{2,t})$，存在 $(\mu_1^t,\mu_2^t)\in A_1(u_1,u_2)\times A_2(u_1,u_2)$满足：

$$\begin{cases}\|\omega_1^t-\mu_1^t\|_{V_1^*}\leqslant\mathcal{H}(A_1(w_{1,t},u_2),A_1(u_1,u_2)),\\ \|\omega_2^t-\mu_2^t\|_{V_2^*}\leqslant\mathcal{H}(A_2(u_1,w_{2,t}),A_2(u_1,u_2))。\end{cases}\tag{6}$$

由于对 $i=1,2, A_i$ 为 $\mathcal{H}$-半连续，则当 $t\to0^+$ 时有：

$$\begin{cases}\|\omega_1^t-\mu_1^t\|_{V_1^*}\leqslant\mathcal{H}(A_1(w_{1,t},u_2),A_1(u_1,u_2))\to0,\\ \|\omega_2^t-\mu_2^t\|_{V_2^*}\leqslant\mathcal{H}(A_2(u_1,w_{2,t}),A_2(u_1,u_2))\to0。\end{cases}\tag{7}$$

由 $A_1(u_1,u_2)$ 和 $A_2(u_1,u_2)$ 为紧集,于是可假设 $(\mu_1^t,\mu_2^t)\to(\gamma_1,\gamma_2)\in A_1(u_1,u_2)\times A_2(u_1,u_2)$。结合式(6)、(7),当 $t\to0^+$ 时有:

$$\begin{cases}\|\omega_1^t-\gamma_1\|_{V_1^*}\leqslant\|\omega_1^t-\mu_1^t\|_{V_1^*}+\|\mu_1^t-\gamma_1\|_{V_1^*}\to0,\\ \|\omega_2^t-\gamma_2\|_{V_2^*}\leqslant\|\omega_2^t-\mu_2^t\|_{V_2^*}+\|\mu_2^t-\gamma_2\|_{V_2^*}\to0。\end{cases}\tag{8}$$

对不等式(5)的左右两边同时取 $t\to0^+$ 有:

$$\begin{cases}\langle\gamma_1-f_1,\omega_1-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^\circ(u_1,u_2;\omega_1-u_1)+j_1(u_1,\omega_1)\geqslant-\varepsilon\alpha_1(\omega_1-u_1),\\ \langle\gamma_2-f_2,\omega_2-u_2\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^\circ(u_1,u_2;\omega_2-u_2)+j_2(u_2,\omega_2)\geqslant-\varepsilon\alpha_2(\omega_2-u_2)。\end{cases}$$

对 $i=1,2$,由于 ω_i^t 依赖于 v_i,故 γ_i 依赖于 v_i。因此,接下来只需要证明 γ_i 与 v_i 无关即可。这里对任意的 $p_i\in V_i$ 和 $t\in(0,1)$,令 $p_i^t=u_i+t(p_i-u_i)\in V_i$。由于 A_i 是非空紧值的,于是对 $(\mu_1^t,\mu_2^t)\in A_1(u_1,u_2)\times A_2(u_1,u_2)$,存在 $(\overline{\mu_1^t},\overline{\mu_2^t})\in A_1(p_1^t,u_2)\times A_2(u_1,p_2^t)$,使得当 $t\to0^+$ 时,有:

$$\begin{cases}\|\overline{\mu_1^t}-\gamma_1\|_{V_1^*}\leqslant\|\overline{\mu_1^t}-\mu_1^t\|_{V_1^*}+\|\mu_1^t-\gamma_1\|_{V_1^*}\to0,\\ \|\overline{\mu_2^t}-\gamma_2\|_{V_2^*}\leqslant\|\overline{\mu_2^t}-\mu_2^t\|_{V_2^*}+\|\mu_2^t-\gamma_2\|_{V_2^*}\to0。\end{cases}$$

现令 $(v_1,v_2)=(p_1^t,p_2^t)$,并代入式(1),根据式(2)~(5)同样的推导可得 $(\overline{\mu_1^t},\overline{\mu_2^t})$ 满足:

$$\begin{cases}\langle\overline{\mu_1^t}-f_1,p_1-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^\circ(u_1,u_2;p_1-u_1)+j_1(u_1,p_1)\geqslant-\varepsilon\alpha_1(p_1-u_1),\\ \langle\overline{\mu_2^t}-f_2,p_2-u_2\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^\circ(u_1,u_2;p_2-u_2)+j_2(u_2,p_2)\geqslant-\varepsilon\alpha_2(p_2-u_2)。\end{cases}\tag{9}$$

根据 A_i 的非空紧值特征和式(9)可知,当 $t\to0^+$ 时有:

$$\begin{cases}\langle\gamma_1-f_1,p_1-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^\circ(u_1,u_2;p_1-u_1)+j_1(u_1,p_1)\geqslant-\varepsilon\alpha_1(p_1-u_1),\\ \langle\gamma_2-f_2,p_2-u_2\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^\circ(u_1,u_2;p_2-u_2)+j_2(u_2,p_2)\geqslant-\varepsilon\alpha_2(p_2-u_2)。\end{cases}$$

由 p_i 的任意性表明 $(u_1,u_2)\in\Omega_\alpha(\varepsilon)$,于是有 $\Psi_\alpha(\varepsilon)\subseteq\Omega_\alpha(\varepsilon)$。 证毕

引理3 设 $i=1,2$,V_i 为 Banach 空间,V_i^* 为对偶空间。若 A_i,j_i,J_i,α_i 分别满足 H(A)的1)~3)和6)~7)以及 H(j),H(J),H(α),则对任意的 $\varepsilon>0$ 有 $\Omega_\alpha(\varepsilon)$ 为 $V_1\times V_2$ 上的闭集。

证明 要证 $\Omega_\alpha(\varepsilon)$ 为 $V_1\times V_2$ 上的闭集,只需要证明 $\Omega_\alpha(\varepsilon)$ 中任何一个强收敛序列,且极限点也在 $\Omega_\alpha(\varepsilon)$ 中。假设 $\{\boldsymbol{u}^n=(u_1^n,u_2^n)\}\subseteq\Omega_\alpha(\varepsilon)$ 且 $(u_1^n,u_2^n)\to(u_1,u_2)\in V_1\times V_2$,于是对任意的 $(v_1,v_2)\in V_1\times V_2$,存在 $(\mu_1^n,\mu_2^n)\in A_1(u_1^n,u_2^n)\times A_2(u_1^n,u_2^n)$ 使得:

$$\begin{cases}\langle\mu_1^n-f_1,v_1-u_1^n\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^\circ(u_1^n,u_2^n;v_1-u_1^n)+j_1(u_1^n,v_1)\geqslant-\varepsilon\alpha_1(v_1-u_1^n),\\ \langle\mu_2^n-f_2,v_2-u_2^n\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^\circ(u_1^n,u_2^n;v_2-u_2^n)+j_2(u_2^n,v_2)\geqslant-\varepsilon\alpha_2(v_2-u_2^n)。\end{cases}\tag{10}$$

与引理2类似的,由于 $A_i,i=1,2$ 为非空紧值且为 $\mathcal{H}$-连续的,于是根据引理1以及式(6)~(8)相同的证明步骤可知,存在 $(\omega_1^n,\omega_2^n)\in A_1(u_1,u_2)\times A_2(u_1,u_2)$,$(\omega_1,\omega_2)\in A_1(u_1,u_2)\times A_2(u_1,u_2)$,使得当 $n\to\infty$ 时,有:

$$\begin{cases}\|\mu_1^n-\omega_1\|_{V_1^*}\leqslant\|\mu_1^n-\omega_1^n\|_{V_1^*}+\|\omega_1^n-\omega_1\|_{V_1^*}\to0,\\ \|\mu_2^n-\omega_2\|_{V_2^*}\leqslant\|\mu_2^n-\omega_2^n\|_{V_2^*}+\|\omega_2^n-\omega_2\|_{V_2^*}\to0。\end{cases}$$

结合 α_i 的连续性、命题1的结论2)以及命题2,对式(10)两边同时取上极限可得:

$$\begin{cases}\langle\omega_1-f_1,v_1-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^\circ(u_1,u_2;v_1-u_1)+j_1(u_1,v_1)\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\langle\mu_1^n-f_1,v_1-u_1^n\rangle_{V_1^*\times V_1}+\\ \quad\limsup\limits_{n\to\infty}(J_1^\circ(u_1^n,u_2^n;v_1-u_1^n)+j_1(u_1^n,v_1))\geqslant-\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon\alpha_1(v_1-u_1^n)=-\varepsilon\alpha_1(v_1-u_1),\\ \langle\omega_2-f_2,v_2-u_2\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_2^\circ(u_1,u_2;v_2-u_2)+j_2(u_2,v_2)\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\langle\mu_2^n-f_2,v_2-u_2^n\rangle_{V_2^*\times V_2}+\\ \quad\limsup\limits_{n\to\infty}(J_2^\circ(u_1^n,u_2^n;v_2-u_2^n)+j_2(u_2^n,v_2))\geqslant-\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon\alpha_2(v_2-u_2^n)=-\varepsilon\alpha_2(v_2-u_2)。\end{cases}\tag{11}$$

于是有 $(u_1,u_2)\in\Omega_\alpha(\varepsilon)$,于是有 $\Omega_\alpha(\varepsilon)$ 为闭集。 证毕

注 对 $i=1,2$,由于 A_i 为 $\mathcal{H}$-连续时可推出 A_i 为 $\mathcal{H}$-半连续,故满足引理3中的条件,于是有 $\Omega_\alpha(\varepsilon)=\Psi_\alpha(\varepsilon)$。从而对任意的 $\varepsilon>0$ 由 $\Omega_\alpha(\varepsilon)$ 为闭集可推出 $\Psi_\alpha(\varepsilon)$ 也为闭集。

定理 1　设 $i=1,2,V_i$ 为 Banach 空间,V_i^* 为对偶空间。若 A_i,j_i,J_i,α_i 分别满足 H(A)的 1)～3)和 6)～7)以及 H(j),H(J),H(α),则 GVHI 为 α-强适定的充分必要条件是:对任意的 $\varepsilon>0$ 有 $\Omega_\alpha(\varepsilon)\neq\varnothing$,并且当 $\varepsilon\to0$ 时 $\operatorname{diam}(\Omega_\alpha(\varepsilon))\to0$。

证明　首先讨论必要性,即当 GVHI 为 α-强适定时证明结论成立。假设 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 为 GVHI 的唯一解,于是根据 GVHI 为 α-强适定性可知,存在 $(\omega_1,\omega_2)\in A_1(u_1,u_2)\times A_2(u_1,u_2)$ 使得下式成立:

$$\begin{cases}\langle\omega_1-f_1,v_1-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^\circ(u_1,u_2;v_1-u_1)+j_1(u_1,v_1)\geqslant0,\ \forall\, v_1\in V_1;\\ \langle\omega_2-f_2,v_2-u_2\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^\circ(u_1,u_2;v_2-u_2)+j_2(u_2,v_2)\geqslant0,\ \forall\, v_2\in V_2。\end{cases}$$

上式表明 $\boldsymbol{u}\in\Omega_\alpha(\varepsilon)$,这意味着对任意的 $\varepsilon>0$ 有 $\Omega_\alpha(\varepsilon)\neq\varnothing$。为了证明结论的后半部分,假设存在 $\boldsymbol{u}^n=(u_1^n,u_2^n),\boldsymbol{p}^n=(p_1^n,p_2^n)\in\Omega_\alpha(\varepsilon_n)$,且当 $d>0,0<\varepsilon_n\to0$ 时有:

$$\|\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{p}^n\|_{V_1\times V_2}=\|u_1^n-p_1^n\|_{V_1}+\|u_2^n-p_2^n\|_{V_2}>d。\tag{12}$$

由 α-近似序列的定义可知,$\{\boldsymbol{u}^n\}$ 与 $\{\boldsymbol{p}^n\}$ 都是 α-近似序列。根据 GVHI 的 α-强适定性可知,$\{\boldsymbol{u}^n\}$ 与 $\{\boldsymbol{p}^n\}$ 同时收敛到 GVHI 的唯一解 $\boldsymbol{u}$。这与式(12)矛盾,即当 $\varepsilon\to0$ 时,有 $\operatorname{diam}(\Omega_\alpha(\varepsilon))\to0$,于是必要性得证。

接下来证明充分性。假设 $\boldsymbol{u}^n=(u_1^n,u_2^n)$ 是 α-近似序列,则存在 $(\omega_1^n,\omega_2^n)\in A_1(u_1^n,u_2^n)\times A_2(u_1^n,u_2^n)$,当 $0<\varepsilon_n\to0(n\to\infty)$时,有:

$$\begin{cases}\langle\omega_1^n-f_1,v_1-u_1^n\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^\circ(u_1^n,u_2^n;v_1-u_1^n)+j_1(u_1^n,v_1)\geqslant-\varepsilon_n\alpha_1(v_1-u_1^n),\ \forall\, v_1\in V_1;\\ \langle\omega_2^n-f_2,v_2-u_2^n\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^\circ(u_1^n,u_2^n;v_2-u_2^n)+j_2(u_2^n,v_2)\geqslant-\varepsilon_n\alpha_2(v_2-u_2^n),\ \forall\, v_2\in V_2。\end{cases}\tag{13}$$

则 $\boldsymbol{u}^n\in\Omega_\alpha(\varepsilon_n)$。根据条件可知,当 $n\to\infty$时有 $\operatorname{diam}(\Omega_\alpha(\varepsilon_n))\to0$,于是 $\{\boldsymbol{u}^n\}$ 为柯西列。现假设 $\{\boldsymbol{u}^n\}$ 强收敛到 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$,则接下来证明 $\boldsymbol{u}$ 为 GVHI 的解。对 $i=1,2$,根据 A_i,j_i,J_i 以及函数 α_i 的假设,采用式(10)、(11)同样的方法对式(13)取上极限可得,存在 $(\omega_1^*,\omega_2^*)\in A_1(u_1,u_2)\times A_2(u_1,u_2)$ 有:

$$\begin{cases}\langle\omega_1^*-f_1,v_1-u_1\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^\circ(u_1,u_2;v_1-u_1)+j_1(u_1,v_1)\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\langle\omega_1^n-f_1,v_1-u_1^n\rangle_{V_1^*\times V_1}+\\ \quad\limsup\limits_{n\to\infty}(J_1^\circ(u_1^n,u_2^n;v_1-u_1^n)+j_1(u_1^n,v_1))\geqslant-\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n\alpha_1(v_1-v_1^n)=0,\\ \langle\omega_2^*-f_2,v_2-u_2\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_2^\circ(u_1,u_2;v_2-u_2)+j_2(u_2,v_2)\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\langle\mu_2^n-f_2,v_2-u_2^n\rangle_{V_1^*\times V_1}+\\ \quad\limsup\limits_{n\to\infty}(J_2^\circ(u_1^n,u_2^n;v_2-u_2^n)+j_2(u_2^n,v_2))\geqslant-\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n\alpha_2(v_2-u_2^n)=0。\end{cases}$$

上式说明 $\boldsymbol{u}$ 是 GVHI 的解。假设 GVHI 的解不唯一,则存在 $\boldsymbol{u}'\neq\boldsymbol{u}$ 是 GVHI 的另外一个解。根据 $\Omega_\alpha(\varepsilon)$ 的定义可知 $\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}\in\Omega_\alpha(\varepsilon)$,而 $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\|\leqslant\operatorname{diam}(\Omega_\alpha(\varepsilon))\to0$ 可推出 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}$。这与 $\boldsymbol{u}'\neq\boldsymbol{u}$ 矛盾,故 $\boldsymbol{u}$ 是 GVHI 的唯一解。通过上述证明可知 GVHI 是 α-强适定的,由此充分性得证。　　证毕

定理 2　设 $i=1,2,V_i$ 为 Banach 空间,V_i^* 为对偶空间。若 A_i,j_i,J_i,α_i 分别满足 H(A)的 1)～3)和 6)～7)以及 H(j),H(J),H(α),则 GVHI 为 α-广义强适定的充分必要条件是:对任意的 $\varepsilon>0$ 有 $\Omega_\alpha(\varepsilon)\neq\varnothing$,并且当 $\varepsilon\to0$ 时,有 $\mu(\Omega_\alpha(\varepsilon))\to0$。

证明　首先证明必要性。由于 GVHI 为 α-广义强适定的,所以 GVHI 的解集 S 非空。由于 $S\subseteq\Omega_\alpha(\varepsilon)$,则对任意的 $\varepsilon>0,\Omega_\alpha(\varepsilon)\neq\varnothing$。于是对任意的 $\{\boldsymbol{u}^n\}\in S$,有 $\{\boldsymbol{u}^n\}$ 为 α-近似序列。由 α-广义强适定性可知,存在 $\{\boldsymbol{u}^n\}$ 的子序列收敛到 S 中的某一点,因此 S 是紧集。同样的,由于 $S\subseteq\Omega_\alpha(\varepsilon)$,则:

$$\mathcal{H}(\Omega_\alpha(\varepsilon),S)=\max\{e(\Omega_\alpha(\varepsilon),S),e(S,\Omega_\alpha(\varepsilon))\}=e(\Omega_\alpha(\varepsilon),S)。$$

由于 S 为紧集,则:

$$\mu(\Omega_\alpha(\varepsilon))\leqslant\mathcal{H}(\Omega_\alpha(\varepsilon),S)=2e(\Omega_\alpha(\varepsilon),S)。\tag{14}$$

若当 $\varepsilon\to0$ 时有 $e(\Omega_\alpha(\varepsilon),S)\to0$,则必要性得证。否则当 $\varepsilon\to0$ 时有 $e(\Omega_\alpha(\varepsilon),S)\not\to0$,此时存在序列 $\{\boldsymbol{u}^n\}$ 及 $l>0$,使得当 $\varepsilon_n\to0$ 时,$\boldsymbol{u}^n\in\Omega_\alpha(\varepsilon_n)$ 有:

$$\boldsymbol{u}^n\notin S+B(0,l)。\tag{15}$$

这里,$B(0,l)$ 表示原点为圆心,半径为 l 的闭球。由于 $\{\boldsymbol{u}^n\}$ 为 α-近似序列,故存在子序列收敛于 S,这与式(15)矛盾,故 $e(\Omega_\alpha(\varepsilon),S)\to0$。结合式(14)有 $\mu(\Omega_\alpha(\varepsilon))\to0$,于是必要性得证。

接着证明充分性。根据条件可知,对任意的 $\varepsilon>0$ 有 $\Omega_\alpha(\varepsilon)\neq\varnothing$,且当 $\varepsilon\to0$ 时 $\mu(\Omega_\alpha(\varepsilon))\to0$。假设 $S=$

$\bigcap\limits_{\varepsilon>0}\Omega_\alpha(\varepsilon)$,由 $\varepsilon\to 0$ 时 $\mu(\Omega_\alpha(\varepsilon))\to 0$ 且 $\Omega_\alpha(\varepsilon)$为闭集(引理 3),则根据文献[20]可知 S 为非空紧集,并且当 $\varepsilon\to 0$ 有 $e(\Omega(\varepsilon),S)=\mathcal{H}(\Omega_\alpha(\varepsilon),S)\to 0$。假设 $\boldsymbol{u}^n=(u_1^n,u_2^n)$为 GVHI 的 α-近似序列,则存在$(\omega_1^n,\omega_2^n)\in A_1(u_1^n,u_2^n)\times A_2(u_1^n,u_2^n)$以及序列 $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$有:

$$\begin{cases}\langle\omega_1^n-f_1,v_1-u_1^n\rangle_{V_1^*\times V_1}+J_1^\circ(u_1^n,u_2^n;v_1-u_1^n)+j_1(u_1^n,v_1)\geqslant-\varepsilon_n\alpha_1(v_1-u_1^n),\forall v_1\in V_1;\\ \langle\omega_2^n-f_2,v_2-u_2^n\rangle_{V_2^*\times V_2}+J_2^\circ(u_1^n,u_2^n;v_2-u_2^n)+j_2(u_2^n,v_2)\geqslant-\varepsilon_n\alpha_2(v_2-u_2^n),\forall v_2\in V_2。\end{cases}$$

上式表明 $\boldsymbol{u}^n\in\Omega_\alpha(\varepsilon_n)$,于是有 $d(\boldsymbol{u}^n,S)\leqslant e(\Omega(\varepsilon_n),S)\to 0$。由于 S 为紧集,于是存在 $\hat{\boldsymbol{u}}^n\in S$,当 $n\to\infty$时有 $\|\boldsymbol{u}^n-\hat{\boldsymbol{u}}^n\|\to 0$。同样的根据 S 的紧性,则存在$\{\hat{\boldsymbol{u}}^n\}$的子序列$\{\hat{\boldsymbol{u}}^{n_k}\}$使得 $\hat{\boldsymbol{u}}^{n_k}\to\boldsymbol{u}\in S$。于是当 $n\to\infty$时有:

$$\|\boldsymbol{u}^{n_k}-\boldsymbol{u}\|\leqslant\|\boldsymbol{u}^{n_k}-\hat{\boldsymbol{u}}^{n_k}\|+\|\hat{\boldsymbol{u}}^{n_k}-\boldsymbol{u}\|\to 0。$$

上式表明 GVHI 的任何 α-近似序列$\{\boldsymbol{u}^n\}$,都存在子序列$\{\boldsymbol{u}^{n_k}\}$,使得这个子序列收敛到 GVHI 解集中的某一点 $\boldsymbol{u}$。由此,显然 GVHI 是广义 α-强适定的,故充分性得证。 证毕

3 结论

本文研究了一类系统广义变分-半变分不等式 α-适定性。具体地,本文首先定义了 α-近似序列以及集合 $\Omega_\alpha(\varepsilon)$和集合 $\Psi_\alpha(\varepsilon)$。通过近似序列以及上述 2 个集合,讨论了该类系统广义变分-半变分不等式的度量性质,在适当假设下分别给出了该系统广义变分-半变分不等式强适定和广义强适定的充要条件。值得一提的是,本文的研究内容是文献[18]的进一步推广。具体的,针对文献[18],本文进一步将系统中的每个广义半变分不等式分别添加一个凸函数 $\varphi_i(u_i,v_i)$,并将它推广为变分-半变分不等式。本文的研究表明,推广后的模型与原模型具有类似的度量性质。由于当前大多数针对系统变分、半变分不等式的研究都是对称结构,故今后的研究工作中可以针对具有非对称结构的系统广义变分-半变分不等式进行研究。

参考文献:

[1] TYKHONOV A N. On the stability of the functional optimization[J]. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics,1966,6:631-634.

[2] LUCCHETTI R, PATRONE F. A characterization of tyhonov well-posedness for minimum problems, with applications to variational inequalities[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization,1981,3(4):461-476.

[3] SOFONEA M,XIAO Y B. Tykhonov well-posedness of elliptic variational-hemivariational inequalities[J]. Electronic Journal of Differential Equations,2019,2019(64):1-19.

[4] SHU Q Y,SOFONEA M,Xiao Y B. Tykhonov well-posedness of split problems[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2020,2020(1):1-29.

[5] LEVITIN E S,POLYAK B T. Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems[J]. Doklady Akademii Nauk Sssr,1966,7:764-767.

[6] HU R,FANG Y P. Levitin-Polyak well-posedness of variational inequalities[J]. Optimization Letters,2010,72(1):373-381.

[7] HU R,HUANG N J,SOFONEA M,XIAO Y B. Levitin-Polyak well-posedness of variational-hemivariational inequalities[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2022,109:1-17.

[8] VIRMANI G, SRIVASTAVA M, Various types of well-posedness for mixed vector quasivariational-like inequality using bifunctions[J]. Journal of Applied Mathematics and Informatics,2014,32:427-439.

[9] CENG L C,LIOU Y C,YAO J C,YAO Y. Well-posedness for systems of time dependent hemivariational inequalities in Banach spaces[J]. Journal of Nonlinear Science and Applications,2017,10:5373-5392.

[10] JIANG C. Well-posedness for a class of generalized variational-hemivariational inequalities involving set-valued operators[J]. Journal of Inequalities and Applications,2018,2018:1-14.

[11] CENG L C, GUPTA H, WEN C F. Well-posedness by perturbations of variational-hemivariational inequalities with perturbations[J]. Filomat,2012,26(5):881-895.

[12] HU R, FANG Y P. Characterizations of Levitin-Polyak well-posedness by perturbations for the split variational inequality problem[J]. Optimization,2016,65(9):1717-1732.

[13] CENG L C,LUR Y Y,WEN C F. Well-posedness for generalized variational-hemivariational inequalities with perturbations in

reflexive Banach spaces[J]. Tamkang Journal of Mathematics,2017,48(4):345-364.
[14] CEN J,MIN C,SOFONEA M,et al. Generalized well-posedness results for a class of hemivariational inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2022,507(2):1-23.
[15] XIAO Y,HUANG N J. Well-posedness for a class of variational-hemivariational inequalities with perturbations[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2011,151:33-51.
[16] HU R, FANG Y P. Well-posedness of the split inverse variational inequality problem [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society,2017,40:1733-1744.
[17] WANG Y M,XIAO Y B,WANG X,CHO Y J. Equivalence of well-posedness between systems of hemivariational inequalities and inclusion problems[J]. Journal of Nonlincar Science and Applications,2016,9(3):1178-1192.
[18] CENG L C,LI J Y,WANG C S,et al. Characterizations of well-posedness for generalized hemivariational inequalities systems with derived inclusion problems systems in Banach spaces[J]. Symmetry,2022,14(7):1-17.
[19] HU R, XIAO Y B, HUANG N J, WANG X. Equivalence results of wellposedness for split variational-hemivariational inequalities[J]. Journal of Nonlinear and Convex Analysis,2019,20(3):447-459.
[20] KURATOWSKI K. Topology vols 1 and 2[M]. New York:Academic Press,1966.

Operations Research and Cybernetics

A Class of Metric Characterizations of α-Well-Posedness for the System of Generalized Variational-Hemivariational Inequalities

ZHAO Yu[1], SHU Qiaoyuan[2], TAO Jia[2]

(1. School of Artificial Intelligence, Chongqing University of Education;
2. School of Mathematics and Big Data, Chongqing University of Education, Chongqing 400065, China)

Abstract: Themetric characterization of α-well-posedness of systems of generalized variational-hemivariational inequalities is studied. Firstly, the α-approximation sequence is defined, and the sets $\Omega_\alpha(\varepsilon)$and $\Psi_\alpha(\varepsilon)$are constructed. Under appropriate assumptions, the equivalence and closure of the two sets are proven. Secondly, the metric characterizations of the system of generalized variational-hemivariational inequalities are discussed under very mild assumptions on involved operators. Sufficient and necessary conditions for the α-strong well-posedness and generalized α-strong well-posedness of the system of generalized variational-hemivariational inequality are obtained. The results further generalize the relevant theorems on the wellposedness of variational-hemivariational inequalities and lay the foundation for further research in this field.

Keywords: the system of generalized variational-hemvariational inequalities; metric characteristics; α-strong well-posedness; generalized α-strong well-posedness

(责任编辑 陈 乔)