DOI:10.11721/cqnuj20250406

整函数的零点模估计*

黄 华 平
(重庆三峡学院 数学与统计学院,重庆 万州 404020)

摘要:利用最大模原理、Taylor 定理和估值定理研究了一类无界整函数的零点模性质,给出了零点模估计式。

关键词:整函数;最大模原理;零点模;Taylor 定理;估值定理

中图分类号:O174.52　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2025)04-0083-03

1　研究背景

解析函数是复分析中重要的研究对象,它是一类实部和虚部满足 C. R. 条件(即柯西-黎曼方程)的可微函数[1]。它在复积分计算、调和函数性质、留数计算等方面都有重要的应用。利用解析函数理论可以解决诸多生活中的实际问题[2]。例如,它可简化复杂运算和函数逼近,求解微分方程和优化问题,解决几何中的面积计算问题,描述物理中的振动和周期性现象譬如声音和光的传播,帮助编程和软件开发人员快速定位问题、优化代码以及提高代码的可读性和可维护性等。

整函数是一类特殊的解析函数,它是指在整个复平面上处处解析的函数。它有良好的性态,比如说它在整个复平面上一定可以展成幂级数。例如多项式就是最简单的整函数[3]。关于整函数有一个非常著名的定理,即 Liouville 定理:有界整函数必为常数。此定理具有很强的应用性。例如用它可以简洁地证明代数学基本定理。由于此定理离不开有界性这个前提条件,故使用它会有一定的局限性[4]。关于无界整函数[5],目前人们考虑较多的是它的级与型以及零点的收敛指数、亏格和典型乘积等问题[6],这些问题一直是人们的研究热点。近些年来,涌现了许多新的结果,具体可参考文献[7-9]。而关于零点模,即零点的模长[9]以及零点所在的范围涉猎不多。基于此,本文考虑了一类无界整函数的零点模的相关属性。通过最大模原理、Taylor 定理和估值定理,研究了整函数在中心圆(即圆心在坐标原点的圆)上的最大模性质,为后期研究整函数的增长性奠定了基础。

为方便读者阅读,设 $\mathbf{C}$ 为复数域,$\{z_n\}$ 为解析函数 $f(z)$ 的零点集(重零点计重数),$r>0$ 为常数,$n(r)$ 表示满足 $|z_n|\leqslant r$ 的 z_n 的个数,而 $M(f,r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$。

为了进行圆域上解析函数的模估计和高阶导数估计,需要解析函数的最大模原理、Taylor 定理和估值定理,分别阐述如下。

引理 1[2]　设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析,则 $|f(z)|$ 在 D 内任何点都不能达到最大值,除非在 D 内 $f(z)$ 恒等于常数。

引理 2[2]　设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析,$a\in D$,$R>0$。若圆域 $K:|z-a|<R$ 包含于 D,则 $f(z)$ 在 K 内能展成幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$,其中系数:

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(n=0,1,2,\cdots),$$

且展式是唯一的,这里 $\Gamma_\rho:|\zeta-a|=\rho,0<\rho<R$。

引理 3[2]　设函数 $f(z)$ 沿曲线 C 连续,且存在正数 M 使得 $|f(z)|\leqslant M$,L 为 C 之长,则 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant ML$。

---

* **收稿日期**:2024-11-14　**修回日期**:2025-02-25　**网络出版时间**:2025-05-18T08:54

资助项目:重庆市自然科学基金面上项目(No. CSTB2022NSCQMSX0290)

第一作者简介:黄华平,男,教授,博士,研究方向为复分析,E-mail:mathhhp@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250507.1635.018

2 主要结果

运用解析函数的最大模原理、Taylor 定理和估值定理,给出了零点的模估计式,也给出了无界整函数的 Taylor 系数的模估计以及所含零点个数的估计式。

定理1 设 $f(z)$是满足 $f(0)\neq 0$ 的整函数,则:

$$M(f,r)\geqslant\frac{|f(0)|r^{n(r)}}{|z_1z_2\cdots z_{n(r)}|}。\tag{1}$$

证明 考虑函数:

$$g(z)=f(z)\prod_{k=1}^{n(r)}\frac{r^2-\bar{z}_kz}{r(z-z_k)},\tag{2}$$

则 $g(z)$在 $|z|\leqslant r$ 上解析。当 $|z|=r$ 时,有:

$$|g(z)|=|f(z)|\prod_{k=1}^{n(r)}\frac{|r^2-\bar{z}_kz|}{r|z-z_k|}=|f(z)|\prod_{k=1}^{n(r)}\frac{|\bar{z}z-\bar{z}_kz|}{r|z-z_k|}=|f(z)|。$$

利用引理1可得:

$$g(0)\leqslant\max_{|z|=r}|g(z)|=\max_{|z|=r}|f(z)|=M(f,r)。\tag{3}$$

由式(1)和(2)有:

$$|g(0)|=|f(0)|\prod_{k=1}^{n(r)}\frac{r}{|z_k|}=\frac{|f(0)|r^{n(r)}}{|z_1z_2\cdots z_{n(r)}|}。\tag{4}$$

联立式(3)、(4),即得式(1)。 证毕

定理2 设 $f(z)$是满足 $f(0)\neq 0$ 的整函数,则:

$$\log M(f,r)\geqslant\log|f(0)|-n(\delta r)\log\delta,\tag{5}$$

其中:δ 为常数,$0<\delta<1$。

证明 由定理1可得:

$$M(f,r)\geqslant\frac{|f(0)|r^{n(r)}}{|z_1z_2\cdots z_{n(r)}|}=\frac{|f(0)|r^{n(r)}}{|z_1||z_2|\cdots|z_{n(r)}|}=\frac{|f(0)|r^{n(\delta r)}}{|z_1||z_2|\cdots|z_{n(\delta r)}|}\cdot\frac{r^{n(r)-n(\delta r)}}{|z_{n(\delta r)+1}||z_{n(\delta r)+2}|\cdots|z_{n(r)}|}。\tag{6}$$

因为:

$$|z_i|<\delta r\Rightarrow\frac{1}{|z_i|}>\frac{1}{\delta r},i=1,2,\cdots,n(\delta r),$$

$$|z_j|<r\Rightarrow\frac{1}{|z_j|}>\frac{1}{r},j=n(\delta r)+1,n(\delta r)+2,\cdots,n(r),$$

由式(6)有:

$$M(f,r)\geqslant|f(0)|\cdot\left(\frac{r}{\delta r}\right)^{n(\delta r)}\cdot\frac{r^{n(r)-n(\delta r)}}{r^{n(r)-n(\delta r)}}=|f(0)|\cdot\left(\frac{1}{\delta}\right)^{n(\delta r)}。\tag{7}$$

再在式(7)等号两边取对数,即得(5)式。 证毕

定理3 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 是一个在 $\mathbf{C}$ 上无界的整函数,满足 $f(0)\neq 0$,且当 $|z|\geqslant 1$ 时,$|f(z)|\leqslant e^{|z|^{\lambda}}$,其中 $\lambda>0$ 为常数,则存在正整数 n_0,使得当 $n>n_0$ 时,有 $|c_n|\leqslant\left(\frac{\lambda e}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}}$,且 $\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r)}{\log r}\leqslant\lambda$。

证明 显然 $f(z)$在 $\mathbf{C}$ 内不恒为常数。再由引理2和引理3有:

$$|c_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M(f,r)}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r=\frac{M(f,r)}{r^n}。\tag{8}$$

对 $0<\delta<1$,由定理2可得 $n(\delta r)\leqslant\frac{1}{-\log\delta}[\log M(f,r)-\log|f(0)|]$。由于当 $|z|\geqslant 1$ 时,$|f(z)|\leqslant e^{|z|^{\lambda}}$,故:

$$M(f,r)\leqslant e^{r^{\lambda}},\tag{9}$$

再由式(8)、(9),并考虑到函数 $g(x)=x^{\lambda}-n\log x(x>0)$ 在点 $x=\left(\frac{n}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ 处取得最大值,所以有:

$$|c_n|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{r^{\lambda}}}{r^n}=\mathrm{e}^{r^{\lambda}-n\log r}\leqslant\mathrm{e}^{\frac{n}{\lambda}\left(1-\log\frac{n}{\lambda}\right)}=\left(\frac{\lambda\mathrm{e}}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}}。$$

又由式(5)、(9)有:

$$\frac{n(\delta r)}{(\delta r)^{\lambda}}\leqslant\frac{\log M(f,r)-\log|f(0)|}{(-\log\delta)(\delta r)^{\lambda}}\leqslant\frac{r^{\lambda}-\log|f(0)|}{(-\log\delta)(\delta r)^{\lambda}}=\frac{1-\frac{\log|f(0)|}{r^{\lambda}}}{(-\log\delta)\delta^{\lambda}},$$

从而有:

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^{\lambda}}=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(\delta r)}{(\delta r)^{\lambda}}\leqslant\frac{1}{(-\log\delta)\delta^{\lambda}}=K。$$

于是 $\exists K>0$,使得 $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^{\lambda}}\leqslant K$。因此,$\exists r_0>0$,使得当 $r>r_0$ 时,有 $\frac{n(r)}{r^{\lambda}}\leqslant K$,于是有 $\frac{\log n(r)}{\log r}\leqslant\frac{\log K}{\log r}+\lambda$。进一步地,有 $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\frac{\log n(r)}{\log r}\leqslant\lambda$。 证毕

参考文献:

[1] 钟玉泉.复变函数论[M].4 版.北京:高等教育出版社,2013.
ZHONG Y Q. Theory of functions of a complex variable[M]. 4th ed. Beijing:Higher Education Press,2013.

[2] 邓冠铁.复变函数论[M].北京:北京师范大学出版社,2013.
DENG G T. Complex analysis[M]. Beijing:Beijing Normal University Press,2013.

[3] 廖志华,付雨欣,蒋业阳.一类非线性复微分差分方程超越整函数解的性质[J].江西科技师范大学学报,2023(6):95-99.
LIAO Z H,FU Y X,JIANG Y Y. Properties of transcendental entire solutions for a certain type of nonlinear complex differential-difference equations[J]. Journal of Jiangxi Science & Technology Normal University,2023(6):95-99.

[4] 王志林,田丽娜.非整数级整函数零点的一些性质[J].信阳师范学院学报(自然科学版),2001,14(3):255-258.
WANG Z L,TIAN L N. Some properties of the zeros of entire functions with non-integral order[J]. Journal of Xinyang Teachers College (Natural Science Edition),2001,14(3):255-258.

[5] 杨合松.无零点整函数级与原函数级的关系[J].新余学院学报,2016,21(5):23-24.
YANG H S. The relationship between zero-free integral function level and primitive function level[J]. Journal of Xinyu University,2016,21(5):23-24.

[6] 王琼,扈培础.关于整函数零点和周期性的研究[J].数学物理学报,2018,38(2):209-214.
WANG Q,HU P C. On zeros and periodicity of entire functions[J]. Acta Mathematica Scientia,2018,38(2):209-214.

[7] LI X M,YANG X,YI H X. Entire functions sharing an entire function of smaller order with their shifts[J]. Proceedings of the Japan Academy,Series A,Mathematical Sciences,2013,89(2):34-39.

[8] YANG X J. A new program for the entire functions in number theory[J]. Fractals,2024,32(4):2340122.

[9] ZASTAVNYI V P. On extremal functions in inequalities for entire functions[J]. Mathematical Notes,2024,116(1/2):58-65.

Modular Estimations for the Zero Points of Entire Function

Huang Huaping

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Three Gorges University, Wanzhou Chongqing 404020, China)

Abstract: The zero point property of entire function is one of the popular topics in complex analysis theory. By using the maximum modulus principle, Taylor's theorem and the estimation theorem, the zero modulus property of a class of unbounded entire functions is studied. Moreover, the zero modulus estimation formula is also given.

Keywords: entire function; maximum modulus principle; module of zero point; Talor's theorem; estimation theorem

(责任编辑 黄 颖)