DOI:10.11721/cqnuj20250411

# 三次拟线性浅水波方程解的适定性研究*

何　娇，周寿明
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

**摘要**:立方拟线性浅水波 Camassa-Holm 型方程是关于 Euler 方程在全水波范围的渐近展开。为讨论该方程的解的 Cauchy 问题,利用输运方程理论和经典 Friedrichs 正则化方法,建立了该三次拟线性浅水波方程模型解在临界 Besov 空间 $B^{1+1/p}_{p,1}$($1\leqslant p<\infty$)中的局部适定性,即得到该模型解的存在唯一性以及解关于初值的连续依赖性。

**关键词**:拟线性;浅水波方程;适定性
**中图分类号**:O175　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2025)04-0086-06

## 1 研究背景

本文将研究一类具有三次非线性项的 Camassa-Holm 型拟线性浅水波方程解的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} m_t+k_1(2u_xm+um_x)+k_2\left(\left(u^2-\dfrac{1}{4}(u^2)_{xx}\right)u\right)_x+k_3u_x=0,x\in\mathbf{R},t>0;\\ u(0,x)=u_0(x),x\in\mathbf{R}。\end{cases} \tag{1}$$

其中:$m=u-u_{xx}$ 为动量密度,$u(t,x)$表示水平底面到水波自由表面的高度,$k_i(i=1,2,3)$为参数[1]。

地球表面大部分被水覆盖,水分与水蒸气的变化深刻影响着自然气候,因此研究水波的流体运动具有重要的现实意义。线性模型在解释孤立波和破裂现象等重要的非线性现象时存在局限性,促使研究者们寻求非线性模型来解释这些行为。1895 年,为解释 Russell 观察到的孤立波现象,Korteweg 等人[2]推导并建立了著名的 KdV 方程:

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0,$$

它属于小振幅大波长的水波方程,参数 $\mu\ll1,\varepsilon=o(\mu^2)$,其中记号 $o$ 表示同阶无穷小。1972 年,Benjami 等人[3]提出 BBM 方程:

$$u_t+u_x+uu_x-u_{xxt}=0。$$

该方程比 KdV 方程具有更好的光滑性质,能描述小振幅大波长的水波,解是全局且轨道稳定的,但它同样不能模拟破裂现象。1993 年,Camassa 等人[4]推导出新的非线性色散波方程:

$$m_t+um_x+2u_xm=0,m=(1-\partial_x^2)u。$$

该方程简称为 CH 方程,它既能描述浅水波在水平底部的单向运动,又具有破裂现象。

此后,数学工作者不断探索,提出了诸多具有尖峰解的可积系统。

1995 年,Fokas[5]借助双 Hamilton 结构,从经典可积的浅水波系统中推导出带有三次非线性项的 CH 方程:

$$m_t+(u^2-u_x^2)m_x+2u_xm^2+bu_x=0。$$

Fuchssteiner 等人[6]也通过不同的方法得到该方程。2006 年,Qiao 等人[7]在 Fokas 的基础上,从二维的 Euler 方程中推导出了该方程,并给出了 Lax 对、M/W-shaped 孤立子和 peaked/cusped 孤立子,使该方程在三次非线性系统研究中备受关注。特别地,它是首个具有尖峰解的立方非线性方程。2012 年,Gui[8]指出该方程解的奇异

* **收稿日期**:2024-10-22　**修回日期**:2025-01-20　**网络出版时间**:2025-05-23T16:23
**资助项目**:重庆市教育委员会科学技术研究计划——重点项目(No. KJZD-M202200501),青年项目(No. KJQN202300544);重庆市自然科学基金面上项目(No. CSTB2024NSCQ-MSX0922,No. CSTB2024NSCQ-MSX0801);重庆师范大学校级项目(No. BWLJ2023005)
**第一作者简介**:何娇,女,研究方向为偏微分方程;E-mail:1762242640@qq.com;**通信作者简介**:周寿明,男,教授,博士后,E-mail:zhoushouming76@163.com
**网络出版地址**:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250507.1635.028

性仅以波裂的形式出现,并描述了新的波裂运动。在此之后,Fu 等人[9]得出此方程在 Besov 空间中强解的局部适定性及爆破估计。

为了更精准地描述更大振幅的奇异波现象,需要挖掘具有更强非线性效应的模型方程。受 CH 方程启发,Chen 等人[1]首次推出了同时带有二次项和三次项的 Camassa-Holm 方程(如上述方程(1))。近期,Di 等人[10]研究了该孤立波的轨道稳定性以及三次 Camassa-Holm 型方程(1)的 Liouville 型性质。随后,Chen 等人[11]证明了尖峰孤立波轨道稳定性。Mi 等人[12-13]还探讨了该方程 Cauchy 问题的局部适定性、爆破性质及解析性等。Chen 等人[14]研究了带有三次非线性项的 Camassa-Holm 型方程在波破裂后解的连续性,讨论了此方程 Hölder 连续性、解的整体存在性和唯一性。

尽管已有多种浅水波模型能同时描述孤立子和波的现象,但它们的性质却各不相同。而方程的适定性始终都是关键性问题。近些年来,学者们在不同空间中展开研究。从物理和数学角度出发,研究 CH 方程在不同空间的性质,有助于更全面地认识浅水波理论。因此,本文旨在研究方程(1)在非齐次临界 Besov 空间 $B_{p,1}^{1+1/p}$ 中的局部适定性结果,以及在 $B_{p,r}^{s}$ 空间的连续性。

由于方程(1)的三次非线性结构复杂,故借助经典的 Friedrichs 正则化方法来证明局部适定性,关键在于构造如下一致有界的 Cauchy 序列$\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$:

$$U_k\leqslant\frac{U_0}{(1-4CU_0^2t)^{\frac{1}{2}}},U_k(t)=\|u_k(t)\|_{B_{p,r}^{s}}+1。$$

**定理 1**　若模型(1)的初值 $u_0\in B_{p,1}^{1+1/p}$,$p\in[1,\infty)$,则存在时刻 $T>0$ 使得方程(1)有唯一解 $u\in E_{p,1}^{1+1/p}(T)$,且解连续依赖于初值。

**注**　$E_{p,1}^{1+1/p}(T)$是时空函数空间 $L^{\infty}([0,T];B_{p,1}^{1+1/p})\bigcap C([0,T];B_{p,1}^{1+1/p})$的简记,表示对任意时刻 $t\in[0,T]$,解 $u(t,x)$在空间上属于 $B_{p,1}^{1+1/p}$。

## 2　定理 1 的证明

下面将研究方程(1)在非齐次临界 Besov 空间中的局部适定性。为了方便计算,将方程(1)转化为输运方程的形式:

$$\begin{cases}u_t+\left(k_1u+\dfrac{k_2}{2}u^2\right)u_x=f(u,u_x),t\in\mathbf{R}^+,x\in\mathbf{R};\\ u(x,0)=u_0(x),t=0,x\in\mathbf{R}。\end{cases}\tag{2}$$

其中:

$$f(u,u_x)=\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}(b_1u+b_2u^2+b_3u^3+b_4u_x^2+b_5uu_x^2)。$$

要证明定理 1,即需证明解的存在性、唯一性和解对初值的连续依赖性。

### 2.1　存在性

定义 $u_0\doteq0$,则存在一个光滑函数序列$\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 使得:

$$\begin{cases}\partial_tu_{k+1}+\left(k_1u_k+\dfrac{k_2}{2}u_k^2\right)\partial_xu_{k+1}=f(u_k,\partial_xu_k);\\ u_{k+1}(0)=S_{k+1}u_0。\end{cases}$$

其中:$f(u_k,\partial_xu_k)=\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}[b_1u_k+b_2u_k^2+b_3u_k^3+b_4(\partial_xu_k)^2+b_5u_k(\partial_xu_k)^2]$。

假设对所有的时间 $T>0$ 有 $u_k\in L^{\infty}([0,T];B_{p,1}^{1+1/p})$,进一步可得:

$$\|f(u_k,\partial_xu_k)\|_{B_{p,1}^{1+1/p}}\leqslant C(\|u_k\|_{B_{p,1}^{1/p}}+\|u_k^2\|_{B_{p,1}^{1/p}}+\|u_k^3\|_{B_{p,1}^{1/p}}+\|\partial_xu_k\|_{B_{p,1}^{1/p}}+\|u_k\|_{B_{p,1}^{1+1/p}}\|\partial_xu_k\|_{B_{P,1}^{2+1/p}}^2)\leqslant$$
$$C(\|u_k\|_{B_{p,1}^{1+1/p}}^3+1),$$

即存在解 $u_{k+1}\in E_{p,1}^{1+1/p}$,由引理 2 可得:

$$\|u_{k+1}\|_{B_{p,1}^{1+1/p}}\leqslant\exp\left(C\int_0^t(\|(\partial_xu_k+u_k\partial_xu_k)(\tau)\|_{B_{p,1}^{1/p}})\mathrm{d}\tau\right)\|u_0\|_{B_{p,1}^{1+1/p}}+$$
$$C\int_0^t\exp\left(C\int_\tau^t\|(\partial_xu_k+u_k\partial_xu_k)(\tau')\|_{B_{p,1}^{1/p}}\mathrm{d}\tau'\right)\|f(u_k,\partial_xu_k)\|_{B_{p,1}^{1+1/p}}\mathrm{d}\tau。$$

进一步可知:

$$\|u_{k+1}\|_{B^{1+1/p}_{p,1}}+1\leqslant \exp\Big(C\int_0^t(1+\|u_k(\tau)\|_{B^{1+1/p}_{p,1}})^2\mathrm{d}\tau\Big)(1+\|u_0\|_{B^{1+1/p}_{p,1}})+$$

$$C\int_0^t\exp\Big(C\int_\tau^t(1+\|u_k(\tau')\|_{B^{1+1/p}_{p,1}})^2\mathrm{d}\tau'\Big)(1+\|u_k(\tau)\|_{B^{1+1/p}_{p,1}})^3\mathrm{d}\tau。$$

若定义 $U_k(t)=\|u_k(t)\|_{B^{1+1/p}_{p,1}}+1$,$U_0(t)=\|u_0\|_{B^{1+1/p}_{p,1}}+1$,则有:

$$U_{k+1}(t)\leqslant \exp\Big(C\int_0^t U_k^2(\tau)\mathrm{d}\tau\Big)U_0+C\int_0^t\exp\,C\Big(C\int_\tau^t U_k^2(\tau')\mathrm{d}\tau'\Big)U_k^3(\tau)\mathrm{d}\tau。\tag{3}$$

设 $0<T<1/(4CU_0^2)$,通过归纳可知:

$$U_k\leqslant\frac{U_0}{(1-4CU_0^2t)^{\frac12}},\forall\, t\in[0,T)。\tag{4}$$

事实上,若方程(4)对于任意的 $k$ 成立,那么当 $0\leqslant\tau<t<T$ 时,可知:

$$\exp\Big(C\int_\tau^t U_k^2(\tau')\mathrm{d}\tau'\Big)\leqslant\exp\Big(\int_\tau^t\frac{CU_0^2}{(1-4CU_0^2\tau')}\mathrm{d}\tau'\Big)=\Big(\frac{1-4CU_0^2\tau}{1-4CU_0^2t}\Big)^{\frac14}。$$

将上式和式(4)代入式(3),可得:

$$U_{k+1}(t)\leqslant\frac{U_0}{(1-4CU_0^2t)^{\frac14}}+\frac{CU_0^3}{(1-4CU_0^2t)^{\frac14}}\int_0^t(1-4CU_0^2\tau)^{-\frac54}\mathrm{d}\tau=\frac{U_0}{(1-4CU_0^2t)^{\frac12}}。$$

即序列 $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 在 $L^\infty([0,T];B^{1+1/p}_{p,1})$ 上一致有界。并且 $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是 $L^\infty([0,T];B^{1+1/p}_{p,1})$ 中的一个 Cauchy 序列,则 $\partial_t u_k$ 在 $L^\infty([0,T];B^{1+1/p}_{p,1})$ 中一致有界,则 $u_k$ 在 $C([0,T];B^{1+1/p}_{p,1})\cap C^{1/2}([0,T];B^{1+1/p}_{p,1})$ 中一致有界。因此,$u\in L^\infty([0,T];B^{1+1/p}_{p,1})$。

利用 Ascoli 定理和 Canton 定理,可推导出存在函数 $u_j$ 使得对于任意的 $u\in\mathbf{N}$,$\varphi_j u_k$ 收敛于 $u_j$。此外,还可进一步推导出存在某个函数 $u$,使得对于任意的 $\varphi\in D$,$\varphi u_k$ 在 $C([0,T];B^{1/p}_{p,1})$ 中趋于 $\varphi u$。利用 Fatou 性质可得 $u\in L^\infty([0,T];B^{1+1/p}_{p,1})$,再利用插值不等式可知,对于任意的 $\varepsilon>0$,$\varphi u_k$ 在 $C([0,T];B^{1+1/p-\varepsilon}_{p,1})$ 中收敛到 $\varphi u$。由于 $(1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x$ 是一个好算子,所以易证 $u$ 是方程(2)的解。根据方程(2)右边有 $\partial_t u\in C([0,T];B^{1/p}_{p,1})$。取方程的近似解 $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 可得解 $u\in E_T^p$ 连续。

### 2.2 唯一性

设 $u$ 为光滑解,引入新变量 $\xi\in\mathbf{R}$,并定义 $y(t,\xi)$ 的特征如下所示:

$$\begin{cases}y_t(t,\xi)=k_1u+\dfrac{k_2}{2}u^2,x\in\mathbf{R};\\ y(t,\xi)\,|_{t=0}=\xi。\end{cases}\tag{5}$$

定义 $U(t,\xi)=u(t,y(t,\xi))$,则 $U_\xi=u_x(t,y(t,\xi))y_\xi(t,\xi)$。进一步知 $U(t,\xi)$ 是方程(2)的解,即:

$$U_t(t,\xi)=u_t(t,y(t,\xi))+u_x(t,y(t,\xi))y_t(t,\xi)=\Big[u_t+\Big(k_1u+\frac{k_2}{2}u^2\Big)u_x\Big](t,y(t,\xi))=$$

$$f(u,u_x)(t,y(t,\xi))\doteq\widetilde{F}(U,U_\xi)(t,\xi)。$$

令 $x=y(t,\eta)$,且对式(5)中的变化量 $\xi$ 求导可得:

$$U_{t\xi}=\widetilde{F}_\xi(t,\xi)=-K(U)y_\xi-\frac{Q(U,U_\xi)}{y_\xi}+\frac{y_\xi}{2}\Big\{\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-\left|\int_\eta^\xi y_\xi(s)\mathrm{d}s\right|}\Big(K(U)y_\eta+\frac{Q(U,U_\eta)}{y_\eta}\Big)(t,\eta)\mathrm{d}\eta\Big\},$$

其中:$K(U)\doteq b_1U+b_2U^2+b_3U^3$,$Q(U,U_\eta)\doteq b_4U_\eta^2+b_5UU_\eta^2$。

通过推导可得:

$$y_{t\xi}(t,\xi)=k_1U_\xi+k_2UU_\xi,$$

$$y(t,\xi)=\xi+\int_0^t\Big(k_1U+\frac{k_2}{2}U^2\Big)(\tau,y(\tau,\xi))\mathrm{d}\tau,$$

$$y_\xi(t,\xi)=1+\int_0^t(k_1U_\xi+k_2UU_\xi)(\tau,y(\tau,\xi))\mathrm{d}\tau。\tag{6}$$

事实上,$u$ 在 $C_T(B^{1+1/p}_{p,1})$中是一致有界的,根据 $B^{1+1/p}_{p,1}\to W^{1,p}\cap W^{1,\infty}$ 嵌入,得到 $u$ 在 $C_T(W^{1,p}\cap W^{1,\infty})$中是一致有界的。上述方程意味着 $y_\xi$ 在 $L^\infty([0,T];L^\infty)$中是有界的,且 $U_\xi=u_x(t,y(t,\xi))y_\xi(t,\xi)$,使得 $U(t,\xi)$ 在 $L^\infty([0,T];W^{1,\infty})$中有界。另外,上述方程还表明对足够小的 $T>0$,$1/2\leqslant y_\xi\leqslant Cu_0$ 有:

$$\|U(t,\xi)\|^p_{L^p}=\int_{\mathbf{R}}|U(t,\xi)|^p\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbf{R}}|u(t,y(t,\xi)|^p\frac{1}{y_\xi}\mathrm{d}y\leqslant\|u\|^p_{L^p}\left\|\frac{1}{y_\xi}\right\|_{L^\infty}\leqslant 2\|u\|^p_{L^p}\leqslant C,$$

并且:

$$\|U_\xi(t,\xi)\|^p_{L^p}=\int_{\mathbf{R}}|u_x(t,y(t,\xi)|^p|y_\xi|^{p-1}\mathrm{d}y\leqslant\|u_x\|^p_{L^p}\|y_\xi\|^{p-1}_{L^\infty}\leqslant Cu_0^{p-1}\|u_x\|^p_{L^p}\leqslant C。$$

上述 2 个不等式表明对于方程(6)中 $1/2\leqslant y_\xi\leqslant Cu_0$,$\forall\, t\in[0,T]$可得 $U(t,\xi)\in L^\infty_T(W^{1,p}\cap W^{1,\infty})$。

设方程(2)在 $E^{1+1/p}_{p,1}(T)$中的 2 个解分别为 $u_1,u_2$,并且令 $U_i(t,\xi)=u(t,y_i(t,\xi))(i=1,2)$。接下来估计范数 $\|U_1(t,\xi)-U_2(t,\xi)\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}$。

注意:

$$\partial_t(U_1-U_2)(t,\xi)=(\partial_tu_1+\partial_ty_1\partial_xu_1)-(\partial_tu_2+\partial_ty_2\partial_xu_2)=\widetilde{F}_1(t,\xi)-\widetilde{F}_2(t,\xi)。$$

根据上面的论证可知,对足够小的 $T>0$,有:

$$U_i(t,y_i(t,\xi))\in L^\infty_T(W^{1,p}\cap W^{1,\infty}),y_i(t,\xi)-\xi\in L^\infty_T(W^{1,p}\cap W^{1,\infty}),\frac{1}{2}\leqslant y_{i\xi}\leqslant Cu_0,$$

且从方程(4)可知:

$$\|y_1-y_2\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}\leqslant\|y_1(0)-y_2(0)\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}+C\int_0^T(\|U_1-U_2\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}+\|U_1^2-U_2^2\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}})\mathrm{d}t。$$

对于 $\|U_1(t,\xi)-U_2(t,\xi)\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}$ 可由类似的不等式来考虑 $\|\widetilde{F}_1(t,\xi)-\widetilde{F}_2(t,\xi)\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}$ 的估计值。对于 $\widetilde{F}_1(t,\xi),\widetilde{F}_2(t,\xi)$有:

$$\widetilde{F}_1(t,\xi)-\widetilde{F}_2(t,\xi)=\sum_{i=1}^4 I_i,\tag{7}$$

由于 $y_i(t,\xi)(i=1,2)$单调递增,则 $\mathrm{sgn}(y_i(\xi)-y_i(\eta))=\mathrm{sgn}(\xi-\eta)$。若 $\xi>\eta$(或 $\xi<\eta$),可以得到 $y_i(\xi)>y_i(\eta)$(或 $y_i(\xi)<y_i(\eta)$),即有:

$$I_1=\int_\xi^\infty(\mathrm{e}^{y_1(\xi)-y_1(\eta)}-\mathrm{e}^{y_2(\xi)-y_2(\eta)})\frac{Q(U_1,U_{1\eta})}{y_{1\eta}}\mathrm{d}\eta-\int_{-\infty}^\xi(\mathrm{e}^{-(y_1(\xi)-y_1(\eta))}-\mathrm{e}^{-(y_2(\xi)-y_2(\eta))})\frac{Q(U_1,U_{1\eta})}{y_{1\eta}}\mathrm{d}\eta\leqslant$$

$$C\|U_1-U_2\|_{L^\infty}\left(1_{\geqslant o}(x)\mathrm{e}^{-|x|}*\frac{U_{1\eta}^2+U_1U_{1\eta}^2}{y_{1\eta}}+1_{\leqslant o}(x)\mathrm{e}^{-|x|}*\frac{U_{1\eta}^2+U_1U_{1\eta}^2}{y_{1\eta}}\right)。$$

其中:$*$ 表示卷积。

同理,将 $I_i(i=1,2,3,4)$代入方程(7),可知:

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{F}_1(t,\xi)-\widetilde{F}_2(t,\xi)\|_{L^\infty\cap L^p}\leqslant C(\|U_1-U_2\|_{L^\infty\cap L^p}+\|U_{1\eta}-U_{2\eta}\|_{L^\infty\cap L^p}+\|y_{1\eta}-y_{2\eta}\|_{L^\infty\cap L^p}),\\&\|\widetilde{F}_{1\xi}(t,\xi)-\widetilde{F}_{2\xi}(t,\xi)\|_{L^\infty\cap L^p}\leqslant C(\|U_1-U_2\|_{L^\infty\cap L^p}+\|U_{1\eta}-U_{2\eta}\|_{L^\infty\cap L^p}+\|y_{1\eta}-y_{2\eta}\|_{L^\infty\cap L^p})。\end{aligned}\tag{8}$$

综上可得:

$$\|\widetilde{F}_1(t,\xi)-\widetilde{F}_2(t,\xi)\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}\leqslant C(\|U_1-U_2\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}+\|y_1-y_2\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}})。$$

此外,根据式(4)、(6)、(8)以及 Gronwall 不等式可知:

$$\|U_1-U_2\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}+\|y_1-y_2\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}\leqslant C(\|U_1(0)-U_2(0)\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}+\|y_0-y_0\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}})+$$
$$C\int_0^T(\|U_1-U_2\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}+\|y_1-y_2\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}})\mathrm{d}t。$$

再应用 Gronwall 不等式的积分形式可得:

$$\|U_1-U_2\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}+\|y_1-y_2\|_{W^{1,p}\cap W^{1,\infty}}\leqslant C\|u_1(0)-u_2(0)\|_{B^{1+1/p}_{p,1}},$$

其中:$y_1(0)=y_2(0)=\xi$,$U_i=u_i(0)$,$i=1,2$。由此可得:

$$\|u_1-u_2\|_{L^p}\leqslant C\|u_1\circ y_1-u_2\circ y_2\|_{L^p}\leqslant C\|U_1-U_2\|_{L^p}+C\|u_{2x}\|_{L^\infty}\|y_1-y_2\|_{L^p}\leqslant C\|u_1(0)-u_2(0)\|_{B^{1+1/p}_{p,1}}。$$

最后根据 $L^p\to B^0_{p,\infty}$ 嵌入可知:

$$\|u_1-u_2\|_{B^0_{p,\infty}}\leqslant C\|u_1-u_2\|_{L^p}\leqslant C\|u_1(0)-u_2(0)\|_{B^{1+1/p}_{p,1}}。$$

因此,$u_1(0)=u_2(0)$,即得证解的唯一性。

### 2.3 解对初值的连续依赖性

假设 $u_k$,$u_\infty$ 与初值 $(u_0)_k$,$(u_0)_\infty$ 满足方程(2),根据上面的证明可知 $u_k$,$u_\infty$ 在 $L^\infty([0,T];B^{1+1/p}_{p,1})$ 中一致有界,且对于任意的 $t\in[0,T]$,有 $\|(u_k-u_\infty)(t)\|_{B^0_{p,\infty}}\leqslant C\|(u_0)_k-(u_0)_\infty\|_{B^{1+1/p}_{p,1}}$。用插值不等式知,对任意的 $\varepsilon>0$,$u_k$ 在 $B^{1+1/p-\varepsilon}_{p,1}$ 收敛于 $u_\infty$。令 $\varepsilon=1$ 可得,在 $C([0,T];B^{1/p}_{p,1})$ 中 $u_k\to u_\infty$。则下面只需证 $\partial_x u_k\to\partial_x u_\infty$ 在 $C([0,T];B^{1/p}_{p,1})$ 中成立。假设 $w_k=\partial_x u_k=v_k+h_k$,接下来将 $w_k$ 中的 $v_k$,$h_k$ 分开求解可得:

$$\begin{cases}\partial_t v_k+\left(k_1u_k+\dfrac{k_2}{2}u_k^2\right)\partial_x v_k=\partial_x f(u_\infty)-(\partial_x u_\infty)^2-u_\infty(\partial_x u_\infty)^2;\\ v_k|_{t=0}=\partial_x(u_0)_\infty。\end{cases}$$

$$\begin{cases}\partial_t h_k+\left(k_1u_k+\dfrac{k_2}{2}u_k^2\right)\partial_x h_k=f_x(u_k)-f_x(u_\infty)-((\partial_x u_k)^2-(\partial_x u_\infty)^2)-u_k(\partial_x u_k)^2+u_\infty(\partial_x u_\infty)^2;\\ h_k|_{t=0}=\partial_x(u_0)_k-\partial_x(u_0)_\infty。\end{cases}$$

由于 $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ 和 $u_\infty$ 在 $B^{1+1/p}_{p,1}$ 中有界,则有:

$$\|(\partial_x u_k)^2-(\partial_x u_\infty)^2\|_{B^{1/p}_{p,1}}\leqslant C\|\partial_x u_k-\partial_x u_\infty\|_{B^{1/p}_{p,1}},$$

$$\|u_k(\partial_x u_k)^2-u_\infty(\partial_x u_\infty)^2\|_{B^{1/p}_{p.1}}\leqslant C(\|u_k-u_\infty\|_{B^{1/p}_{p.1}}+\|\partial_x u_k-\partial_x u_\infty\|_{B^{1/p}_{p.1}}),$$

$$\|\partial_x f(u_k)-\partial_x f(u_\infty)\|_{B^{1/p}_{p.1}}\leqslant C(\|u_k-u_\infty\|_{B^{1/p}_{p.1}}+\|\partial_x u_k-\partial_x u_\infty\|_{B^{1/p}_{p.1}})。$$

根据上述不等式,对于任意的 $k\in\mathbf{N}$ 有:

$$\|h_k(t)\|_{B^{1/p}_{p,1}}\leqslant C\left(\|w_{0k}-w_{0\infty}\|_{B^{1/p}_{p,1}}+\int_0^t\|u_k-u_\infty\|_{B^{1/p}_{p,1}}+\|v_k-v_\infty\|_{B^{1/p}_{p,1}}+\|h_k\|_{B^{1/p}_{p,1}}\mathrm{d}\tau\right)。$$

由于 $(w_0)_k$ 在 $B^{1/p}_{p,1}$ 中收敛到 $(w_0)_\infty$,$u_k$ 在 $C([0,T];B^{1/p}_{p,1})$ 中收敛到 $u_\infty$,$v_k$ 在 $C([0,T];B^{1/p}_{p,1})$ 中收敛到 $v_\infty$,故利用 Gronwall 引理得到 $h_k$ 在 $C([0,T];B^{1/p}_{p,1})$ 中收敛到 0。即根据引理可知,在 $C([0,T];B^{1/p}_{p,1})$ 中 $h_\infty=0$。因此:

$$\|w_k-w_\infty\|_{L^\infty([0,T];B^{1/p}_{p,1})}\leqslant\|v_k-v_\infty\|_{L^\infty([0,T];B^{1/p}_{p,1})}+\|h_k-h_\infty\|_{L^\infty([0,T];B^{1/p}_{p,1})}\leqslant$$

$$\|v_k-v_\infty\|_{L^\infty([0,T];B^{1/p}_{p,1})}+\|h_k\|_{L^\infty([0,T];B^{1/p}_{p,1})},$$

即可得在 $C([0,T];B^{1/p}_{p,1})$ 中 $\partial_x u_k\to\partial_x u_\infty$。

## 3 结论

本文围绕一类具有三次非线性项的拟线性浅水波 Camassa-Holm 方程,深入研究了方程(1)的解的局部适定性。通过利用输运方程理论和 Friedrichs 正则化方法研究了该方程的适定性且可知方程的解连续依赖于初值。进一步,通过构造逼近解的方法研究该解映射的一致连续性。在研究过程中,取得了一些重要结果。不仅丰富了浅水波方程的理论体系,也为相关领域的实际应用提供了更为坚实的基础。

**参考文献:**

[1] CHEN R M,HU T Q,LIU Y. The shallow-water models with cubic nonlinearity[J]. Journal of Mathematical Fluid Mechanics,2022,24(2):49.

[2] KORDEWEG D,VRIES G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel,and a new type of long stationary wave[J]. Philosophical Magazine,1895,39:422-443.

[3] BENJAMIN T B,BONA J L,MAHONY J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical,Physical and Engineering Sciences,1972,272(1220),24-78.

[4] CAMASSA R,HOLM D. An integrable shallow water equation with peaked solitons[J]. Physical Review Letters,1993,71(11):1661-1664.

[5] FOKAS A S. On a class of physically important integrable equations[J]. Physica D:Nonlinear Phenomena,1995,87(1/2/3/4):145-150.

[6] FUCHSSTEINER B, FOKAS A A. Symplectic structures, their B? cklund transformations and hereditary symmetries[J]. Physica D:Nonlinear Phenomena,1981,4(1):47-66.

[7] QIAO Z J. A new integrable equation with cuspons and W/M-shape-peaks solitons[J]. Journal of Mathematical Physics,2006,47(11):112701.

[8] GUI G L,LIU Y,OLVER P J,et al. Wave-breaking and peakons for a modified camassa-holm equation[J]. Communications in Mathematical Physics,2013,319(3):731-759.

[9] FU Y, GUI G L, LIU Y, et al. On the Cauchy problem for the integrable modified Camassa-Holm equation with cubic nonlinearity[J]. Journal of Differential Equations,2013,255(7):1905-1938.

[10] DI H F,LI J,LIU Y. Orbital stability of solitary waves and a Liouville-type property to the cubic Camassa-Holm-type equation [J]. Physica D:Nonlinear Phenomena,2021,428:133024.

[11] CHEN R M,DI H F,LIU Y. Stability of peaked solitary waves for a class of cubic quasilinear shallow-water equations[J]. International Mathematics Research Notices,2023,2023(7):6186-6218.

[12] MI Y S,LIU Y,GUO B L. On the Cauchy problem for a class of cubic quasilinear shallow-water equations[J]. Journal of Differential Equations,2022,336:589-627.

[13] MI Y S,LIU Y,HUANG D W,et al. Qualitative analysis for the new shallow-water model with cubic nonlinearity[J]. Journal of Differential Equations,2020,269(6):5228-5279.

[14] CHEN R,YANG Z C,ZHOU S M. Existence and uniqueness of the global conservative weak solutions for a cubic Camassa-Holm type equation[J]. Journal of Differential Equations,2024,386:480-518.

## The Well-Posedness Study of Solutions to the Three-Times Quasilinear Shallow Water Wave Equation

HE Jiao, ZHOU Shouming

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract**: It mainly studies the Cauchy problem of the cubic quasilinear shallow water wave equation. This equation is derived from the asymptotic expansion of the Euler equation in the full range of water waves. By using the transport equation theory and the classical Friedrichs regularization method, the local well-posedness of the solutions of this shallow water wave model in the critical Besov space is established. That is, the existence and uniqueness of the solutions of this model and the continuous dependence of the solutions on the initial values are obtained.

**Keywords**: quasi linear; shallow water equations; well-posedness

(责任编辑 黄 颖)