2025 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2025
第 42 卷 第 5 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 42 No. 5

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20250504

自然序下具权重信息电力系统状态空间的结构性质*

刘朗亭[1],刘美含[1],刘学文[2]

(1. 重庆师范大学 数学科学学院;2. 重庆师范大学 重庆国家应用数学中心,重庆 401331)

摘要:针对大规模电力系统状态的物理特性和数学表征进行刻画,介绍了电力系统中 n 维离散状态空间的概念,通过引入电力系统元器件权重信息,刻画元器件在电力系统中的重要性和影响力,给出自然序下电力系统状态空间的结构性质。格是一种特殊的偏序集,利用自然锥 $\mathbf{R}_+^n$ 诱导出的自然序,结合电力系统的结构特性,探究电力系统状态空间的偏序特征和格理论性质。对于几类经典电力系统的结构函数性质进行研究,应用于判断电力系统具体情况和描述系统故障程度,并以 $2/3(G)$ 系统为例对结构函数进行具体的解释说明。所探究的性质结果为电力系统状态空间多目标优化性质研究提供了基础理论和方法支撑,对于设计电力系统高效算法至关重要。

关键词:电力系统状态空间;多目标优化;偏序关系;格;结构函数

中图分类号:O221.6 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2025)05-0042-09

在多目标优化问题中,首要且最基本的问题是定义解的概念,而定义多目标优化问题解的概念则必须考虑目标空间中的偏序关系,有了偏序关系才能评估向量之间的“好”或“坏”。因此,目标空间中的偏序关系构成了多目标优化解定义的基石。值得注意的是,不同的偏序关系下定义的多目标优化问题的解的概念具有不同的含义,经典的 Pareto 有效解与 Pareto 弱有效解[1]即是在自然序基础上建立的,并由此形成了最优性理论[2]。目前,多目标优化问题解的相关研究已取得丰硕成果,见文献[3-5]。在偏序关系的理论框架内,引入上下确界的概念,从而引出格论。19 世纪末,Dedekind 从数论的角度首次提出格的理念,给出了对偶群的概念。然而,直到 1940 年 Birkhoff 的经典著作 *Lattice Theory*[6]问世,格论才在 20 世纪初得到了系统的数学阐述。目前,格论不仅在组合数学、模糊数学和理论计算机科学中得到了广泛应用,而且在社会科学领域也显示出重要性,极大地促进了相关学科的进步,并确立了它在数学和计算机科学领域中的核心研究地位。因此,对不同偏序性质和结构特征的深入研究是必要的。

迄今为止,偏序性质和结构特征已经获得了大量的研究成果。1988 年,Martinez-Legaz[7]对于字典序下多目标优化理论进行初步探讨,表明偏序关系作为多目标优化中的基本概念,可结合实际问题选择合适的偏序关系,从而搭建新的理论领域,发展新的多目标优化理论体系。2011 年,Dehnokhalaji 等人[8]基于可用的偏好信息,利用拟凹函数得到一个严格偏序,提出一种用于多个标准备选方案部分排序的方法,提取出可以在偏序中使用的近似偏好关系。2017 年,Zhang 等人[9]在字典序意义上研究了一类向量值映射的极大极小定理和鞍点,然后利用字典鞍点存在性定理,研究了一个字典序平衡问题,建立了字典序鞍点定理与向量值映射的字典序平衡问题存在性定理之间的等价关系。2018 年,岳立柱[10]针对偏序集方法在处理带权重的多标准决策问题上的局限性,提出了一种基于“隐性”权重的偏序决策策略。继而在 2022 年,基于偏序集理论,岳立柱[11]进一步提出了偏序权重概念,从而有效地解决了在特定权重序列下评价函数的偏序表示问题。

通常情况下,实际生活问题中抽象出来的数学问题是非常复杂的,结构通常具有一定的特殊性,例如内燃机设计问题[12]、充电站选址定容问题[13]、油料库最优选址问题[14]、物流网络规划问题[15]等问题中所建立的多目标优化模型。特别地,电力系统是一个复杂的工程系统,往往规模庞大,设计复杂,近年来受到了广大学者的关注。如果能够将电力系统抽象为电力系统状态空间,以元器件为基本研究对象,假设各元器件具有 2 种或多种可能

* **收稿日期:**2024-12-25 **修回日期:**2025-05-17 **网络出版时间:**2025-05-16T10:07

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 12271071)

第一作者简介:刘朗亭,女,研究方向为最优化理论与方法,E-mail:472567249@qq.com;**通信作者:**刘学文,男,教授,E-mail:xuewenliu@cqnu.edu.cn

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20250507.1635.012

的状态，则这些状态共同构成了一个多维的状态向量空间。2015 年，程林等人[16]利用 n 维向量刻画了包含 n 个元器件电力系统状态的数学表示，并利用偏序 $\leqq$ 介绍了偏序 $\leqslant$ 下的单调结构系统。

电力系统状态空间不仅反映了电力系统当前的运行状态，还蕴含着系统的可能情况，识别潜在的故障危险。为了深刻理解这一状态空间的结构与性质，本文将电力系统状态空间抽象为状态向量集，引入权重信息，刻画元器件在系统中的重要性和影响力，主要研究自然序下集合的状态特性，同时基于经典的几类电力系统，结合实例研究自然序下具权重信息的电力系统结构函数性质，为电力系统状态空间多目标优化性质研究提供基础理论和方法支撑，具有一定的研究意义。

1　预备知识

考虑状态向量集 $X=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n\}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示状态向量，x_i 表示状态变量，n 表示状态变量个数。若各变量 x_i 对应权重信息为 ω_i，则记

$$X_w=\{\boldsymbol{x}=(\omega_1x_1,\omega_2x_2,\cdots,\omega_nx_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n\mid\omega_1\geqslant\omega_2\geqslant\cdots\geqslant\omega_n\geqslant0\}$$

为向量集 X 所对应的具权重信息的状态向量集。

若电力系统 S 由 n 个元器件组成，且电力系统和元器件有且仅有 2 种状态：工作和故障，令 x_i 表示元器件 i 的状态，ω_i 代表元器件 i 的权重信息，则：

$$x_i=\begin{cases}0,\text{元器件 } i \text{ 处于工作状态；}\\1,\text{元器件 } i \text{ 处于故障状态。}\end{cases}$$

其中：$i=1,2,\cdots,n$。从而记无权重信息的电力系统状态空间为：

$$S=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n\mid x_i=0\text{或 }1,i\in\{1,2,\cdots,n\}\}。$$

显然，S 中的状态向量数 $\mathrm{card}(S)=2^n$。进而，记具权重信息的电力系统状态空间为：

$$S_w=\left\{\boldsymbol{x}=(\omega_1x_1,\omega_2x_2,\cdots,\omega_nx_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n\mid x_i=0\text{或 }1,i\in\{1,2,\cdots,n\},\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1\right\},$$

其中权重信息 ω_i 满足 $\omega_1\geqslant\omega_2\geqslant\cdots\geqslant\omega_n\geqslant0$。

本文考虑自然序[17]如下，对于任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，有：

$$\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}_+^n\setminus\{\mathbf{0}\},$$

其中：$\mathbf{R}_+^n=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:x_j\geqslant0,\forall j=1,2,\cdots,n\}$。

注 1　在一维空间中，$\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$ 退化为一般意义上的 $\leqslant$。

定义 1[16]　利用 $\Phi(\boldsymbol{x})=\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示无权重信息的电力系统状态，则：

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0,\text{系统处于工作状态；}\\1,\text{系统处于故障状态。}\end{cases}$$

称 $\Phi(\boldsymbol{x})$ 为系统 S 的结构函数。

令 $\Phi_w(x)=\Phi_w(\omega_1x_1,\omega_2x_2,\cdots,\omega_nx_n)$ 表示具权重信息的电力系统状态空间的状态，则：

$$\Phi_w(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0,\text{系统处于完全工作状态；}\\c,\text{系统处于故障状态。}\end{cases}$$

其中：$c\in(0,1]$ 为非零常数，称 $\Phi_w(\boldsymbol{x})$ 为系统 S_w 的结构函数。

注 2　若 $\Phi_w(\boldsymbol{x})=0$，说明整个系统无元器件故障；若 $\Phi_w(\boldsymbol{x})$ 越接近 1，说明故障程度越深，且有重要元器件损坏，需进一步判断系统是否需要及时维护；当 $\Phi_w(\boldsymbol{x})=1$ 时，说明系统已经完全瘫痪，无法正常工作。

定理 1[16]　对于结构函数 $\Phi_w(\boldsymbol{x})$，记 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{1}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$，若 $\Phi_w(\mathbf{0})=0$，$\Phi_w(\mathbf{1})=1$，且对于任意的 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$，都有 $\Phi_w(\boldsymbol{x})\leqslant\Phi_w(\boldsymbol{y})$，则称该结构是单调的。特别地，若上式满足 $\Phi_w(\boldsymbol{x})<\Phi_w(\boldsymbol{y})$，则称该结构严格单调。

2　自然序下电力系统状态空间的格序结构性质

在偏序关系的理论基础上，本节针对电力系统中各元器件重要性及影响程度不同，整合元器件的权重信息，探究自然序下的电力系统状态特性，讨论该系统的格序理论及相关性质。

定义 2[18] 偏序集$(L,\leqq)$称为格,如果对任意 2 个元 $a,b\in L$,$\sup\{a,b\}$和 $\inf\{a,b\}$都存在。如果格在$(L,\leqq)$上定义 2 个运算$\vee$和$\wedge$,满足对任意 $a,b\in L$,有:

$$a\vee b=\sup\{a,b\},a\wedge b=\inf\{a,b\},$$

则称$(L;\vee,\wedge)$为由格$(L,\leqq)$所诱导的代数系统,$\vee$和$\wedge$分别称为并运算和交运算。

性质 1 自然序下 S_w 是格。

证明 对于任意的 $\boldsymbol{a}=(\omega_1a_1,\omega_2a_2,\cdots,\omega_na_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}=(\omega_1b_1,\omega_2b_2,\cdots,\omega_nb_n)^{\mathrm{T}}\in S_w$,记$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$所有上界的集合为:

$$A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}=(\omega_1x_1,\omega_2x_2,\cdots,\omega_nx_n)^{\mathrm{T}}\in S_w\mid x_i\geqslant\max\{a_i,b_i\},i\in\{1,2,\cdots,n\}\},$$

取 $\boldsymbol{c}=(\omega_1c_1,\omega_2c_2,\cdots,\omega_nc_n)^{\mathrm{T}}$,其中 $c_i=\max\{a_i,b_i\}$,$i=1,2,\cdots,n$。故 $\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{b}\leqq\boldsymbol{c}$,即 $\boldsymbol{c}\in A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$。

事实上,对于任意的 $\boldsymbol{x}=(\omega_1x_1,\omega_2x_2,\cdots,\omega_nx_n)^{\mathrm{T}}\in A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,均有 $x_i\geqslant\max\{a_i,b_i\}=c_i$,$i=1,2,\cdots,n$,即 $\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{c}$ 成立。因此,$\boldsymbol{c}$ 是 $A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$的最小元,即 $\sup\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$存在。

类似地,可定义$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$所有下界的集合为:

$$B(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{y}=(\omega_1y_1,\omega_2y_2,\cdots,\omega_ny_n)^{\mathrm{T}}\in S_w\mid y_i\leqslant\min\{a_i,b_i\},i\in\{1,2,\cdots,n\}\},$$

取 $\boldsymbol{d}=(\omega_1d_1,\omega_2d_2,\cdots,\omega_nd_n)^{\mathrm{T}}$,其中 $d_i=\min\{a_i,b_i\}$,$i=1,2,\cdots,n$。故 $\boldsymbol{d}\leqq\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{d}\leqq\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{d}\in B(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$。

因此,对于任意的 $\boldsymbol{y}=(\omega_1y_1,\omega_2y_2,\cdots,\omega_ny_n)^{\mathrm{T}}\in B(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,均有 $y_i\leqslant\min\{a_i,b_i\}=d_i$,$i=1,2,\cdots,n$,即 $\boldsymbol{y}\leqq\boldsymbol{d}$ 成立。因此,$\boldsymbol{d}$ 是 $B(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$的最大元,即 $\inf\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$存在。

由定义 2,具权重信息的电力系统状态空间 S_w 是一个格。 证毕

注 3 在一般的 n 维向量空间中,即使在自然序下存在所谓的“最大元”和“最小元”,结论不一定成立。

例 1 令具有权重信息的 5 维向量空间为:

$$X_w=\{(0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}},(\omega_1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}},(0,\omega_2,0,0,0)^{\mathrm{T}},(\omega_1,\omega_2,0,\omega_4,0)^{\mathrm{T}},\\(\omega_1,\omega_2,0,0,\omega_5)^{\mathrm{T}},(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)^{\mathrm{T}}\},$$

其中,各分量 x_i 对应的权重信息为 ω_i,则最小元为$(0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$,最大元为$(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)^{\mathrm{T}}$。

若取 $\boldsymbol{a}=(\omega_1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$,$b=(0,\omega_2,0,0,0)^{\mathrm{T}}$,则$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$所有上界的集合为:

$$A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{(\omega_1,\omega_2,0,\omega_4,0)^{\mathrm{T}},(\omega_1,\omega_2,0,0,\omega_5)^{\mathrm{T}},(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)^{\mathrm{T}}\}。$$

此时,$A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$中$(\omega_1,\omega_2,0,\omega_4,0)^{\mathrm{T}}$,$(\omega_1,\omega_2,0,0,\omega_5)^{\mathrm{T}}$ 在自然序下无法比较,即不存在最小元,因此 $\sup\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$不存在。

所以,此向量空间 X_w 不构成格。

注 4 由于电力系统中状态变量仅有 0 和 1 这 2 种取值可能,权重系数 ω_i 对自然序下不同电力系统状态之间的序关系、格的运算没有影响,即:

$$\sup\{\omega_ia_i,\omega_ib_i\}=\max\{\omega_ia_i,\omega_ib_i\}=\omega_i\max\{a_i,b_i\},$$
$$\inf\{\omega_ia_i,\omega_ib_i\}=\min\{\omega_ia_i,\omega_ib_i\}=\omega_i\min\{a_i,b_i\}。$$

定义 3[18] 如果$(L;\vee,\wedge)$是一个格,对于任意 $a,b,c\in L$,均满足以下 2 个条件中的任一条件:

1) $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$;

2) $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$。

则称 $L=(L;\vee,\wedge)$为分配格。

性质 2 自然序下 S_w 是分配格。

证明 对于任意的 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in S_w$,设 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}=(\omega_1d_1,\omega_2d_2,\cdots,\omega_nd_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}=(\omega_1e_1,\omega_2e_2,\cdots,\omega_ne_n)^{\mathrm{T}}$。

不妨记 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\vee(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c})=\boldsymbol{d}\vee\boldsymbol{e}=(\omega_1x_1,\omega_2x_2,\cdots,\omega_nx_n)^{\mathrm{T}}$,由注 4 可知,$d_i=\min\{a_i,b_i\}$,$e_i=\min\{a_i,c_i\}$,$i=1,2,\cdots,n$。因此,对于 $i=1,2,\cdots,n$,$x_i=\max\{\min\{a_i,b_i\},\min\{a_i,c_i\}\}$。

同样地,设 $\boldsymbol{b}\vee\boldsymbol{c}=\boldsymbol{f}=(\omega_1f_1,\omega_2f_2,\cdots,\omega_nf_n)^{\mathrm{T}}$,记 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\vee\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{f}$,则在电力系统状态空间中 $f_i=\max\{b_i,c_i\}$,$i=1,2,\cdots,n$,从而 $y_i=\min\{a_i,\max\{b_i,c_i\}\}$。

下面对 x_i,$i=1,2,\cdots,n$ 的具体情形进行讨论。

1) 若 $x_i=1$,那么 $\min\{a_i,b_i\}$,$\min\{a_i,c_i\}$中至少存在一个为 1。

不妨设 $\min\{a_i,b_i\}=1$,则 $a_i=b_i=1$,从而有 $y_i=\min\{a_i,\max\{b_i,c_i\}\}=\min\{1,\max\{1,c_i\}\}=\min\{1,1\}=1$。

因此，$x_i=y_i$。

2）若 $x_i=0$，那么 $\min\{a_i,b_i\}=\min\{a_i,c_i\}=0$。

当 $a_i=0$ 时，则 $y_i=\min\{a_i,\max\{b_i,c_i\}\}=\min\{0,\max\{b_i,c_i\}\}$，此时不论 b_i,c_i 为何值，$y_i=0$ 成立。

当 $a_i=1$ 时，则 $b_i=c_i=0$，从而有 $y_i=\min\{a_i,\max\{b_i,c_i\}\}=\min\{1,\max\{0,0\}\}=\min\{1,0\}=0$。因此，$x_i=y_i$。

综上所述，$\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\vee\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\vee(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c})$成立。

由定义 3，自然序下具权重信息的电力系统状态空间 S_w 是分配格。　　证毕

定义 4[18]　对于存在最大元和最小元的格 L，某一元 $a\in L$，若存在 $b\in L$，使得：

$$a\wedge b=\hat{0},a\vee b=\hat{1},$$

其中：$\hat{0}$ 是 L 的最小元，$\hat{1}$ 是 L 的最大元，则称 b 为 a 的一个补元，此时 a 也是 b 的补元。

定义 5[16]　对于存在最大元和最小元的格 L，若任意的 $a\in L$ 都存在补元，则称格 L 为有补格。若格 L 既是有补格又是分配格，则称 L 为布尔格。

性质 3　自然序下 S_w 是布尔格。

证明　记 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 是 S_w 的最小元，$\mathbf{1}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是 S_w 的最大元，由定义 5 可知，则需证格 S_w 的每个元都有补元，即对于任意的 $\boldsymbol{a}=(\omega_1a_1,\omega_2a_2,\cdots,\omega_na_n)^{\mathrm{T}}\in S_w$，则存在 $\boldsymbol{b}\in S_w$，使得：

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\mathbf{0},\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}=\mathbf{1}。$$

不妨取

$$b_i=\begin{cases}0,a_i=1;\\1,a_i=0。\end{cases}$$

记 $\bar{a}_i=b_i$，则 $b=(\omega_1\bar{a}_1,\omega_2\bar{a}_2,\cdots,\omega_n\bar{a}_n)^{\mathrm{T}}$。

此时，$\inf\{a_i,b_i\}=0$ 成立，同时 $\sup\{a_i,b_i\}=1$，即满足 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\mathbf{0},\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}=\mathbf{1}$。

因此，自然序下的电力系统状态空间 S_w 是布尔格。　　证毕

定义 6[18]　对于格 L，如果任意的 $a,b,c\in L$，满足以下任一条件：

1）$c\leqq a\Rightarrow(a\wedge b)\vee c=a\wedge(b\vee c)$；

2）$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=a\wedge(b\vee(a\wedge c))$。

则称格 L 构成模格。

性质 4　自然序下 S_w 是模格。

证明　对于任意的 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in S_w$，记：

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\vee(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c})=(\omega_1x_1,\omega_2x_2,\cdots,\omega_nx_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\vee(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}))=(\omega_1y_1,\omega_2y_2,\cdots,\omega_ny_n)^{\mathrm{T}}。$$

由注 4 可知，$x_i=\max\{\min\{a_i,b_i\},\min\{a_i,c_i\}\}$，$y_i=\min\{a_i,\max\{b_i,\min\{a_i,c_i\}\}\}$。

下面对 x_i，$i=1,2,\cdots,n$ 的具体情形进行讨论。

1）若 $x_i=1$，则 $\min\{a_i,b_i\}$，$\min\{a_i,c_i\}$中至少存在一个为 1。

不妨设 $\min\{a_i,b_i\}=1$，则 $a_i=b_i=1$，此时不论 c_i 为何值，均有 $\max\{1,\min\{1,c_i\}\}=1$ 成立。因此，

$$y_i=\min\{a_i,\max\{b_i,\min\{a_i,c_i\}\}\}=\min\{1,\max\{1,\min\{1,c_i\}\}\}=\min\{1,1\}=1$$

故 $x_i=y_i$。

2）若 $x_i=0$，此时 $\min\{a_i,b_i\}=\min\{a_i,c_i\}=0$。

当 $a_i=0$ 时，则：

$$y_i=\min\{a_i,\max\{b_i,\min\{a_i,c_i\}\}\}=\min\{0,\max\{b_i,\min\{0,c_i\}\}\}$$

此时不论 b_i,c_i 为何值，$y_i=0$ 成立。

当 $a_i=1$ 时，$b_i=c_i=0$，则：

$$y_i=\min\{a_i,\max\{b_i,\min\{a_i,c_i\}\}\}=\min\{1,\max\{0,\min\{1,0\}\}\}=0$$

因此，$x_i=y_i$。

综上所述,$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\vee(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\vee(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}))$成立,即自然序下具权重信息的电力系统状态空间 S_w 是模格。

证毕

定义 7[18] 对于偏序集$(L,\leqq)$,如果任意的 $a,b\in L$ 且 $a\neq b$,若 $a\leqslant b$,不存在 $x\in L$ 使得 $a\leqslant x\leqslant b$,且 $x\neq a,x\neq b$,则称 b 覆盖 a。对于格 L,如果任意的 $a,b,c\in L$,若 a 覆盖 c,有 $a\vee b$ 覆盖 $c\vee b$ 或 $a\vee b=c\vee b$,则称 L 是半模格。

定理 2[19] 若格 L 是模格,则格 L 不包含五边形格。特别地,当且仅当 L 不含五边形格 F_5,格 L 是半模格。

注 5 对于格 L,若 $a,b,c,d,e\in L$,且$(\{a,b,c,d,e\},\leqq)$构成五边形格 F_5,则元素间关系如下:

1) $a\leqq b\leqq d\leqq e=c\vee b$;

2) c 覆盖 a;

3) c 与 b、d 均无偏序关系存在。

性质 5 若自然序下 S_w 是模格,则 S_w 是半模格。

证明 由性质 4 可知,自然偏序下的电力系统状态空间 S_w 是模格,则 S_w 不包含五边形格 F_5。因此,由定理 2 可得,S_w 是半模格。

证毕

3 自然序下电力系统结构函数的单调性质

电力系统结构函数是描述电网结构的重要工具,它详细描绘了各元器件间的连接模式及相关参数,精确地反映电力系统的当前状态。为了贴合具权重信息电力系统 S_w 的结构函数 $\Phi_w(\boldsymbol{x})\in[0,1]$,本节将权重信息 ω_i 做归一化处理,规定 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=1$,聚焦于串联系统、并联系统以及 $k/n(G)$系统这 3 类经典电力系统的结构函数,探讨其单调性,特别地,以 $2/3(G)$系统作为实例,详细剖析 $k/n(G)$系统的独特性质。事实上,通过这一实例,不难发现,$k/n(G)$系统实质上等价于串联系统与并联系统的一种复合形态,实际特性需结合具体应用场景特别讨论。

3.1 串联系统的结构函数性质

定义 8 记无权重信息的串联电力系统状态空间 S 结构函数为:

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)=1-(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)。$$

上式在工程上的意义是,串联系统中需 n 个元器件均工作,电力系统方能正常运行,即对于任意的状态向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,若存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得 $x_i=1$,则 $\Phi(\boldsymbol{x})=1$。

性质 6 无权重信息的串联电力系统状态空间 S 结构是单调的。

证明 设任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in S$,且 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$。

若存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得 $x_i=1$,则 $\Phi(\boldsymbol{x})=1$。由于 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$,那么 $y_i=1$,即 $\Phi(\boldsymbol{y})=1$。此时结构是单调的,但非严格单调。

若对于任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,均有 $x_i\neq 1$ 成立,即 $\boldsymbol{x}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,则 $\Phi(\boldsymbol{x})=\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=0$。因此,$\Phi(\boldsymbol{x})\leqslant\Phi(\boldsymbol{y})$恒成立。此时,结构是单调的,且为严格单调。

综上可知,无权重信息的电力系统状态空间 S 结构是单调的。

证毕

定义 9 记具权重信息的串联电力系统状态空间 S_w 结构函数为:

$$\Phi_w(\boldsymbol{x})=\Phi_w(\omega_1x_1,\omega_2x_2,\cdots,\omega_nx_n)=\omega(x)\Phi(\boldsymbol{x})=\Big(\sum_{i=1}^{n}(\omega_ix_i)\Big)\Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\Big)=$$
$$(\omega_1x_1+\omega_2x_2+\cdots+\omega_nx_n)(1-(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)),$$

上式中,$\Phi_w(\boldsymbol{x})$由 2 大部分组成:$\omega(\boldsymbol{x})$和 $\Phi(\boldsymbol{x})$。$\Phi(\boldsymbol{x})$是无权重信息的电力系统状态空间 S 的结构函数,用于判断电力系统具体情况——工作或故障,由性质 6 可知,函数是单调的。$\omega(\boldsymbol{x})$为包含权重信息的线性加权函数,用于描述系统故障程度。当 $\Phi(\boldsymbol{x})\neq 0$ 时,$\omega(\boldsymbol{x})$存在意义,此时 $\omega(\boldsymbol{x})$决定 $\Phi_w(\boldsymbol{x})$,$\omega(\boldsymbol{x})$越接近 1,说明故障程度越深。

性质 7 具权重信息的串联电力系统状态空间 S_w 结构是单调的。

证明 设 $\boldsymbol{x}=(\omega_1x_1,\omega_2x_2,\cdots,\omega_nx_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(\omega_1y_1,\omega_2y_2,\cdots,\omega_ny_n)^{\mathrm{T}}\in S_w$,且 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$,下面分为 3 种情形讨论。

1) 当 $\boldsymbol{x}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$ 时,显然 $\Phi(\boldsymbol{x})=0$,因而无需考虑 $\omega(\boldsymbol{x})$,此时 $\Phi_w(\boldsymbol{x})=0$。

设任意的 $\boldsymbol{y}=(\omega_1y_1,\omega_2y_2,\cdots,\omega_ny_n)^{\mathrm{T}}\in S_\omega$,且 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$,满足 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$,则存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得 $y_i=1$,从而

$1-y_i=0$，故：

$$\Phi(\boldsymbol{x})=1-(1-y_1)(1-y_2)\cdots(1-y_n)=1-0=1,$$

即系统故障。因此，$\Phi_w(\boldsymbol{x})=\omega_1 y_1+\omega_2 y_2+\cdots+\omega_n y_n\geqslant\omega_i y_i\geqslant 0=\Phi_w(\boldsymbol{x})$。

此时，$\Phi_w(\boldsymbol{0})=0$，$\Phi_w(\boldsymbol{1})=1$，且对于任意的 $\boldsymbol{y}\geqq\boldsymbol{x}$，$\Phi_w(\boldsymbol{y})\geqslant\Phi_w(\boldsymbol{x})$均成立。所以，此种情形下结构是单调的。

2）当 $\boldsymbol{y}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{1}$ 时，显然 $\Phi(\boldsymbol{y})=1$，则 $\omega(\boldsymbol{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=1$，$\Phi_w(\boldsymbol{y})=1$。

设任意的 $\boldsymbol{x}=(\omega_1 x_1,\omega_2 x_2,\cdots,\omega_n x_n)^{\mathrm{T}}\in S_w$，且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{1}$，满足 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$，($\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可计入情形 1），本次不再考虑)，则：

$$0\leqslant\Phi(\boldsymbol{x})=1-(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)\leqslant 1,$$

此时，存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $x_i=0$，从而 $\omega_i x_i=0$，则：

$$0\leqslant\omega(x)=\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\cdots+\omega_n x_n\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1。$$

进而，

$$\Phi_w(\boldsymbol{x})=\Phi_w(\omega_1 x_1,\omega_2 x_2,\cdots,\omega_n x_n)=\omega(\boldsymbol{x})\Phi(x)=$$
$$(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\cdots+\omega_n x_n)(1-(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n))\leqslant 1=\Phi_w(y)$$

此时，$\Phi_w(\boldsymbol{0})=0$，$\Phi_w(\boldsymbol{1})=1$，且对于任意的 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$，都有 $\Phi_w(\boldsymbol{x})\leqslant\Phi_w(\boldsymbol{y})$均成立，所以此种情形下结构是单调的。

3）当 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}$ 时，由于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，则系统故障，即 $\Phi(\boldsymbol{x})=\Phi(\boldsymbol{y})=1$。

不妨设 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$，令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\geqq 0$，则存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $z_i=1$，从而：

$$\omega(\boldsymbol{z})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i z_i=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(y_i-x_i)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i y_i-\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i=\omega(\boldsymbol{y})-\omega(\boldsymbol{x})\geqslant 0,$$

即 $\omega(\boldsymbol{y})\geqslant\omega(\boldsymbol{x})$。

因此，$\Phi_w(\boldsymbol{x})\leqslant\Phi_w(\boldsymbol{y})$成立，即此种情形下结构是单调的。

综上所述，具权重信息的串联电力系统状态空间 S_w 结构是单调的。　　证毕

3.2 并联系统的结构函数性质

定义 10　记无权重信息的并联电力系统状态空间 S 结构函数为：

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}x_i=x_1 x_2\cdots x_n,$$

其工程意义是，并联系统中至少有一个元器件正常工作，系统就正常，即对于任意的状态向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in S$，若存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $x_i=0$，则 $\Phi(\boldsymbol{x})=0$。

性质 8　无权重信息的并联电力系统状态空间 S 结构是单调的。

证明　设任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in S$，且 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$。

若存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $y_i=0$，则 $\Phi(y)=0$。由于 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$，那么 $x_i=0$，从而 $\Phi(\boldsymbol{x})=0$，此时结构是单调的，但非严格单调。

若 $y_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，即 $y=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 时，则 $\Phi(\boldsymbol{y})=\Phi(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{1}$，那么 $\Phi(\boldsymbol{x})\leqslant\Phi(\boldsymbol{y})$，此时结构是单调的，且是严格单调。

综上所述，无权重信息的并联电力系统状态空间 S 结构是单调的。　　证毕

注 6　为了同时反映系统故障程度及电力系统运行情况，具权重信息的并联系统结构函数仍由 $\omega(\boldsymbol{x})$和 $\Phi(\boldsymbol{x})$组成，记为 $\Phi_w(\boldsymbol{x})=\Phi_w(\omega_1 x_1,\omega_2 x_2,\cdots,\omega_n x_n)=\omega(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x})$。若存在某一元器件 x_i 处于工作状态，而另一元器件 x_j 处于故障状态，即存在 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $x_i=0$，$x_j=1$，且 $i\neq j$，则 $\Phi_w(\boldsymbol{x})=0$。此时，$\Phi_w(\boldsymbol{x})$无法正确反映系统所处状态，且无法刻画系统故障程度，$\omega(\boldsymbol{x})$无意义，因此需构造新的结构函数对并联系统下的运行情况及故障程度进行刻画。

定义 11　记改进后具权重信息的并联系统结构函数为：

$$\Phi_w(\boldsymbol{x})'=\Phi_w(\omega_1 x_1,\omega_2 x_2,\cdots,\omega_n x_n)'=\omega(\boldsymbol{x})(1+\Phi(\boldsymbol{x}))=\Big(\sum_{i=1}^{n}(\omega_i x_i)\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n}x_i\Big)=$$

$$(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\cdots+\omega_n x_n)(1+x_1 x_2\cdots x_n)$$

注7 改进后的结构函数 $\Phi_w(\boldsymbol{x})'$ 在部分元器件故障，系统正常工作的情况下处于区间 $(0,1)$，记为 $\Phi_w(\boldsymbol{x})'=c$，$c\in(0,1)$，且 $\Phi_w(\boldsymbol{0})'=0$，满足定理1。然而，$\Phi_w(\boldsymbol{1})'=1\cdot(1+1\cdot1\cdot\cdots\cdot1)=2\neq1$，与结构单调的定义不符，但是仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{1}$ 时，存在此种情况，即 $\boldsymbol{x}\in[0,1)$ 时满足结构单调定义。因此，记 $\Phi_w(\boldsymbol{1})'\triangleq1$，则对任意的 $\boldsymbol{x}=(\omega_1 x_1,\omega_2 x_2,\cdots,\omega_n x_n)^{\mathrm{T}}\in S_w$，$\Phi_w(\boldsymbol{x})'\in[0,1]$。

性质9 具权重信息的并联电力系统状态空间 S_w 结构函数 $\Phi_w(\boldsymbol{x})'$ 是单调的。

证明 设 $\boldsymbol{x}=(\omega_1 x_1,\omega_2 x_2,\cdots,\omega_n x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(\omega_1 y_1,\omega_2 y_2,\cdots,\omega_n y_n)^{\mathrm{T}}\in S_w$，且 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$。由性质8可知，$\Phi(\boldsymbol{x})$ 是单调的，而 $1+\Phi(\boldsymbol{x})$ 恒为正，因此，$\Phi_w(\boldsymbol{x})'$，$\Phi_w(\boldsymbol{y})'$ 主要取决于 $\omega(\boldsymbol{x})$，$\omega(\boldsymbol{y})$。下面进行具体讨论。

1) 当 $\boldsymbol{y}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{1}$ 时，$\omega(\boldsymbol{y})=1$，$\Phi(\boldsymbol{y})=1$。由 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$ 可知，存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $x_i=0$，故

$$\omega(\boldsymbol{x})=\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\cdots+\omega_{i-1}x_{i-1}+\omega_{i+1}x_{i+1}+\cdots+\omega_n x_n\leqslant\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=1=\omega(\boldsymbol{y})$$

因此，$\Phi_w(\boldsymbol{x})'\leqslant\Phi_w(\boldsymbol{y})'$ 成立。

2) 当 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{1}$ 时，则系统处于工作状态，$\Phi(\boldsymbol{x})=\Phi(\boldsymbol{y})=0$。不妨令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{0}$，则存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $z_i=1$，从而：

$$\omega(\boldsymbol{z})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i z_i=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(y_i-x_i)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i y_i-\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i=\omega(\boldsymbol{y})-\omega(\boldsymbol{x})\geqslant0,$$

即 $\omega(\boldsymbol{y})\geqslant\omega(\boldsymbol{x})$。

因此，$\Phi_w(\boldsymbol{x})'\leqslant\Phi_w(\boldsymbol{y})'$ 成立，故结构是单调的。

综上所述，具权重信息的并联电力系统状态空间 S_w 结构函数 $\Phi_w(\boldsymbol{x})'$ 是单调的。 证毕

3.3 $k/n(G)$ 系统的结构函数性质

$k/n(G)$ 系统[16]是指由 n 个元器件组成的电力系统，当 n 个元器件中至少有 k 个元器件正常工作时，系统正常工作，即失效的部件数小于等于 $n-k$ 时，系统正常工作；当系统中失效的元器件数大于 $n-k$ 时系统故障失效。

注8 $k/n(G)$ 系统逻辑结构复杂多变，结构函数具体表达式需根据实际情况决定，因此本文结合具体应用场景讨论它的特性。例如，$2/3(G)$ 系统逻辑框图如图1所示。

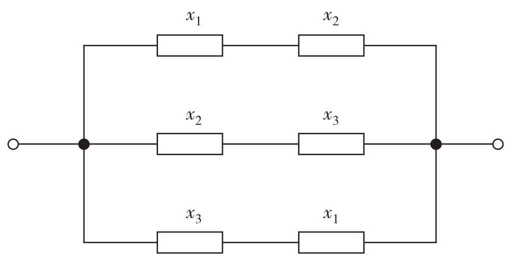

图1 2/3(G)系统

Fig. 1 2/3(G)System

例2 1) 无权重信息的 $k/n(G)$ 系统结构函数为：

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0, \sum_{i=1}^{n}x_i\leqslant n-k;\\ 1, \text{其他。}\end{cases}$$

此时，$2/3(G)$ 系统的结构函数为：

$$\Phi(\boldsymbol{x})=(1-(1-x_1)(1-x_2))(1-(1-x_2)(1-x_3))(1-(1-x_3)(1-x_1))=$$
$$(x_1+x_2-x_1x_2)(x_2+x_3-x_2x_3)(x_3+x_1-x_3x_1),$$

根据吸收律整理得到，$\Phi(\boldsymbol{x})=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1-2x_1x_2x_3)$。

在 $2/3(G)$ 系统中，至少需两个元器件工作，则整个系统正常工作。设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$。若存在 $i,j\in\{1,2,3\}$，$i\neq j$，使得 $x_i=x_j=1$，则 $\Phi(\boldsymbol{x})=1$。由于 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$，那么 $y_i=y_j=1$，从而 $\Phi(\boldsymbol{y})=1$，此时结构是单调的，但非严格单调。

若存在 $i,j\in\{1,2,3\}$，$i\neq j$，使得 $x_i,x_j\neq1$，则 $\Phi(\boldsymbol{x})=0$，那么一定有 $\Phi(\boldsymbol{x})\leqslant\Phi(\boldsymbol{y})$ 成立，此时结构是单调的，但不一定严格单调。

2）具权重信息的 2/3(G)系统结构函数为：

$$\Phi_w(\boldsymbol{x})'=\omega(\boldsymbol{x})(1+\Phi(\boldsymbol{x}))=$$
$$(\omega_1x_1+\omega_2x_2+\cdots+\omega_nx_n)(1+(1-(1-x_1)(1-x_2))(1-(1-x_2)(1-x_3))(1-(1-x_3)(1-x_1)))=$$
$$(\omega_1x_1+\omega_2x_2+\cdots+\omega_nx_n)(1+(x_1+x_2-x_1x_2)(x_2+x_3-x_2x_3)(x_3+x_1-x_3x_1)),$$

根据吸收律整理得到，$\Phi_w(\boldsymbol{x})'=(\omega_1x_1+\omega_2x_2+\cdots+\omega_nx_n)(1+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1-2x_1x_2x_3))$。

设任意的 $\boldsymbol{x}=(\omega_1x_1,\omega_2x_2,\omega_3x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(\omega_1y_1,\omega_2y_2,\omega_3y_3)^{\mathrm{T}}\in S_w$，且 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$，$\sum_{i=1}^{3}\omega_i=1$，$\omega_1\geqslant\omega_2\geqslant\omega_3$。下面进行具体讨论。

i）若存在 $i,j\in\{1,2,3\}$，$i\neq j$，使得 $y_i=y_j=1$，则 $0\leqslant\omega(\boldsymbol{y})\leqslant1$，$\Phi(\boldsymbol{y})=1$。由 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$ 可知，存在 $k\in\{i,j\}$，使得 $x_k=0$，从而 $\omega_kx_k=0$，故

$$\omega(\boldsymbol{x})=\omega_1x_1+\omega_2x_2+\omega_3x_3=\omega(\boldsymbol{y})-\omega_k\leqslant\omega(\boldsymbol{y}),$$

因此，$\Phi_w(\boldsymbol{x})'\leqslant\Phi_w(\boldsymbol{y})'$ 成立。

ii）若存在 $i,j\in\{1,2,3\}$，$i\neq j$，使得 $y_i,y_j\neq1$，则 $\Phi(\boldsymbol{y})=0$，系统处于工作状态。然而，由于无权重信息的 2/3(G)系统结构函数单调，且 $\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}$，因此，$\Phi(\boldsymbol{x})=0$。

不妨令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{0}$，则存在 $z_i=1$，从而

$$\omega(\boldsymbol{z})=\sum_{i=1}^{3}\omega_iz_i=\sum_{i=1}^{3}\omega_i(y_i-x_i)=\sum_{i=1}^{3}\omega_iy_i-\sum_{i=1}^{3}\omega_ix_i=\omega(\boldsymbol{y})-\omega(\boldsymbol{x})\geqslant0,$$

即 $\omega(\boldsymbol{y})\geqslant\omega(\boldsymbol{x})$。

因此，$\Phi_w(\boldsymbol{x})'\leqslant\Phi_w(\boldsymbol{y})'$ 成立，故结构是单调的。

综上所述，具权重信息的 2/3(G)系统结构函数是单调的。

注 9　结合串并联系统在无权重信息与具权重信息情形下的单调性分析，无权重信息的 k/n(G)系统下结构函数普遍呈现出单调性，而在具权重信息的情形中，k/n(G)系统的结构函数主要依赖线性加权函数 $\omega(\boldsymbol{x})$，在一般情形下该函数能够保证结构是单调。

4　结论

本文对电力系统状态空间的一些结构性质进行描述，明确电力系统状态空间中自然序的序结构特征及格理论性质，同时通过几类经典电力系统的结构函数对电力系统状态空间的物理特性进行数学表征和刻画，为电力系统状态筛选提供基础理论和方法支撑。

参考文献：

[1] PARETO V. Manuale di economic political[M]. Malano：Societa Editrice，1906.

[2] 刘浩洋，户将，李勇锋，等. 最优化：建模、算法与理论[M]. 北京：高等教育出版社，2020.
LIU H Y，HU J，LI Y F，et al. Optimization：modeling，algorithm and theory [M]. Beijing：Higher Education Press，2020.

[3] ZHAO K Q，YANG X M. E-Benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization，2015，64(4)：739-752.

[4] 夏远梅，赵克全，高英. 多目标优化的广义 Pascoletti-Serafini 标量化[J]. 中国科学：数学，2024，54(2)：231-244.
XIA Y M，ZHAO K Q，GAO Y. Generalized Pascoletti-Serafini scaling based on multi-objective optimization[J]. Science China Mathematics，2024，54(2)：231-244.

[5] 谭豫琳，杨春蓉，赵克全. 具有范数结构多目标优化问题的近似方法及应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2023，40(2)：28-33.
TAN Y L，YANG C R，ZHAO K Q. Approximation method and application of multi-objective optimization problem with norm structure[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2023，40(2)：28-33.

[6] BIRKHOFF G. Lattice theory[M]. Washington：American Mathematical Society，1948.

[7] MARTINEZ-LEGAZ J E. Lexicographical order and duality in multiobjective programming[J]. European Journal of Operational Research，1988，33(3)：342-348.

[8] DEHNOKHALAJI A，KORHONEN P J，KÖKSALAN M，et al. Convex cone-based partial order for multiple criteria alternatives[J]. Decision Support Systems，2011，51：256-261.

[9] ZHANG Y，LI S J. Some minimax problems in lexicographic order[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，English Series，

2017,33:193-200.

[10] 岳立柱,张志杰,闫艳.蕴含权重的偏序集多准则决策法[J].运筹与管理,2018,27(2):26-31.
YUE L Z,ZHANG Z J,YAN Y. A Multi-criteria decision-making method with implicit weight based on partial order sets[J]. Operations Research and Management,2018,27(2):26-31.

[11] 岳立柱,陆畅,张志杰.综合评价模型的偏序集表示[J].运筹与管理,2022,31(5):101-106.
YUE L Z, LU C, ZHANG Z J. Posets representation of comprehensive evaluation model[J]. Operations Research and Management,2022,31(5):101-106.

[12] DURO J A, OZTURK U E, SALOMON S, et al. Methods for constrained optimization of expensive mixed-integer multi-objective problems, with application to an internal combustion engine design problem[J]. European Journal of Operational Research,2022,307:421-446.

[13] 杨杰庆,姜晓雪,赵克全.高速公路充电站选址定容问题的多目标优化方法[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2021,38(1):11-21.
YANG J Q,JIANG X X,ZHAO K Q. Multi-objective optimization method for location and capacity determination of highway charging stations[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2021,38(1):11-21.

[14] 谯露,舒勤,赵克全.油库选址问题的多目标优化方法[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2023,40(1):82-87.
QIAO L,SHU Q,ZHAO K Q. Multi-objective optimization method for oil depot site selection[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2023,40(1):82-87.

[15] DAN L,KANG L. A multi-objective model for cold chain logistics considering customer satisfaction[J]. Alexandria Engineering Journal,2023,67:513-523.

[16] 程林,何剑.电力系统可靠性原理和应用[M].第2版.北京:清华大学出版社,2015.
CHENG L,HE J. Principles and application of power system reliability[M]. Second Edition. Beijing:Tsinghua University Publishing House Co Ltd,2015.

[17] MACNEILLE H M. Partially ordered sets[J]. Transactions of the American Mathematical Society,1937,42(3):416-460.

[18] 马占新.偏序集与数据包络分析[M].北京:科学出版社,2013.
MA Z X. Partially ordered sets and data envelopment analysis[M]. Beijing:Science Press,2013.

[19] 张昆龙,宋丽霞.格的子代数[M].北京:科学出版社,2017.
ZHANG K L,SONG L X. Subalgebra of case[M]. Beijing:Science Press,2017.

Operations Research and Cybernetics

Structural Properties of State Space of Power Systems with Weighted Information in Natural Order

LIU Langting[1], LIU Meihan[1], LIU Xuewen[2]

(1. School of Mathematics, Chongqing Normal University;

2. National Center for Applied Mathemafics in Chongqing, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper describes the physical characteristics and mathematical representations of large-scale power system states, introduces the concept of dimensional discrete state space in power system, describes the importance and influence of power system components in power system by introducing the weight information of power system components, and gives the structural properties of power system state space under natural order. Using the natural order induced by natural cone, combined with the structural characteristics of power system, the characteristics of partial order and lattice theory were explored. The structural function properties of several types of classical power systems were studied to judge the specific situation of power systems and describe the degree of system failure, and the structural function was explained in detail by taking the system as an example. The properties studied provide basic theoretical and methodological support for the research of multi-objective optimization properties of power system state space, which is crucial for the design of efficient algorithms for power system.

Keywords: power system state space; multi-objective optimization; partial order relation; lattice; structure function

(责任编辑 陈 乔)