

# 一类具有常数收获和状态反馈控制的竞争模型研究\*

王洋平, 杨志春

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要:**通过对具有常数收获和状态反馈控制的竞争模型的研究来分析渔业和畜牧业中种群动态。建立了相关数学模型,分析该模型平衡点的存在性和稳定性,应用 Dulac 判别法和 Poincare 准则研究周期解。研究发现系统在特定条件下存在稳定结点或焦点,并证明了阶 1 周期解的渐近稳定性。因此,合理控制收获率和反馈机制可实现种群可持续管理,为渔业和畜牧业提供理论指导。

**关键词:**渔业、畜牧业生产;几何理论;阶 1 周期解;全局稳定;状态反馈控制

**中图分类号:**O193;Q141

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-6693(2025)05-0109-10

数学生物模型是用数学方法来模拟和分析生物系统、生物过程的工具,广泛应用于生物学、医学、生态学等领域。数学生物模型也是连接理论与实验、数据与预测之间的重要桥梁,在诸多领域中发挥着不可或缺的作用。长久以来,研究者们一直尝试通过建立数学模型的新方法<sup>[1-7]</sup>来解决渔业生产中面临的问题。现有的研究成果多来自对捕食模型的研究,关于相对状态反馈模型的研究较少,对竞争模型的讨论热度普遍较低。基于此,本文将研究重点放在半连续动力系统竞争模型。

文献[8]讨论了一类具有常数收获和状态反馈控制的渔业模型,详细阐述和论证了具有捕食关系的渔业生产模型在引入常数收获和状态反馈控制后存在稳定的阶 1 周期解。然而在现实情景中,种群间往往不仅存在捕食关系,亦存在竞争关系,于是本文尝试将常数收获和状态反馈控制引入到竞争模型中,探究阶 1 周期解的存在与稳定性。下面是常见的两种群 Logistic 竞争模型:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \frac{\alpha N_2}{K_1}\right), \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \frac{\beta N_1}{K_2}\right). \end{cases}$$

其中: $N_1$ 、 $N_2$  分别为 2 个物种的种群数量, $N_1$  为鱼类等养殖的动物, $N_2$  为与之存在竞争关系的动物; $K_1$ 、 $K_2$  分别为 2 个物种的环境容纳量,即环境能够支持的最大种群数量; $r_1$ 、 $r_2$  分别为 2 个物种的种群增长率; $\alpha$ 、 $\beta$  分别为物种 2 对物种 1 和物种 1 对物种 2 的竞争系数,表示一个物种对另一个物种竞争压力的相对大小。

对上述两种群 Logistic 竞争模型引入常数收获和状态反馈控制,并且为了让模型看起来更直观,令  $x = N_1$ ,

$y = N_2$ ,  $a = r_1$ ,  $b = \frac{r_1}{K_1}$ ,  $c = \frac{r_1 \alpha}{K_1}$ ,  $d = r_2$ ,  $e = \frac{r_2}{K_2}$ ,  $f = \frac{r_2 \beta}{K_2}$ ,于是就得到本文将要研究的脉冲反馈模型:

$$\left. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[a - bx - cy] - G \\ \frac{dy}{dt} = y[d - ey - fx] \end{cases} \right\}, x < h; \quad (1)$$
$$\Delta x = -m, \Delta y = 0, x = h.$$

\* 收稿日期:2025-01-15 修回日期:2025-04-19 网络出版时间:2025-10-15T15:48

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 12471153, No. 11971081);中国高等教育学会高等教育科学研究规划课题(No. 24SX0305);重庆英才计划项目(No. cstc2024ycjh-bgzxm0046);重庆师范大学高等教育教学改革研究项目(No. 202223);重庆师范大学基金项目(No. 24XLB023)

第一作者简介:王洋平,男,研究方向为微分方程与动力系统,E-mail:643656240@qq.com;通信作者简介:杨志春,男,教授,博士生导师,E-mail:yangzhch@126.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20251015.1502.004

其中:  $G$  表示鱼类的收获率, 当鱼类存量较大时 ( $x=h, h>m>0$  为阈值时), 可以同时加收 (增加收获) 适量的鱼类等养殖动物;  $\Delta x=x(t^+)-x(t)=-m, \Delta y=y(t^+)-y(t)=0$  (相较而言, 对虾、螃蟹等其他竞争动物收获较少, 忽略不计);  $a, b, c, d, e, f, G$  均为正常数, 且  $G$  满足:

$$G < \frac{x(0)}{\int_0^t \mu(s) ds},$$

其中:  $\mu(t) = \exp\left[-\int_0^t (a - bx(s) - cy(s)) ds\right]$ 。由于种群的生长过程总体呈正的态势增长, 为保证种群的延续, 结合种群实际情况, 考虑两种群具有正初始值, 即  $x(0) = x_0^* > 0, y(0) = y_0^* > 0$ , 因此, 研究将在正实数域  $\mathbf{R}_2^+ = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  内进行。

## 1 平衡点存在性分析

在不考虑脉冲的情况下, 对系统(1)的平衡点相关分析如下。

系统(1)的垂直等倾线为  $\frac{dx}{dt} = x[a - bx - cy] - G = 0$ , 则  $y = \frac{1}{cx}(ax - bx^2 - G)$ 。易知等倾线是一条抛物线

线, 且张角向下。当  $y=0$  时,  $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2b}$ , 则有:

1) 当  $G < \frac{a^2}{4b}$  时, 垂直等倾线  $\frac{dx}{dt} = 0$  与  $x$  轴有 2 个交点;

2) 当  $G = \frac{a^2}{4b}$  时, 垂直等倾线  $\frac{dx}{dt} = 0$  与  $x$  轴只有 1 个交点;

3) 当  $G > \frac{a^2}{4b}$  时, 垂直等倾线  $\frac{dx}{dt} = 0$  与  $x$  轴没有交点。

由  $y = \frac{1}{cx}(ax - bx^2 - G)$  有  $y' = \frac{-bx^2 + G}{cx^2}, y'' = -\frac{2G}{cx^3}$ 。令  $y' = \frac{-bx^2 + G}{cx^2} = 0, x_0 = \sqrt{\frac{G}{b}}, y''(x_0) = -\frac{2G}{cx_0^3} < 0$ ,

故在  $x_0$  处取极大值。

当  $x < x_0$  时, 抛物线  $y = \frac{1}{cx}(ax - bx^2 - G)$  是增函数; 当  $x > x_0$  时, 抛物线  $y = \frac{1}{cx}(ax - bx^2 - G)$  是减函数。

当  $x \rightarrow 0^+$  或  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow -\infty$ , 考虑到实际生物意义, 故只在当  $G < \frac{a^2}{4b}$  时, 垂直等倾线  $\frac{dx}{dt} = 0$  与  $x$  轴有 2 个交点的情况下考虑。故当  $k > 0$  和  $ae > cd$  时, 系统(1)存在 2 个正平衡点,  $A_1(x_1^*, y_1^*)$  和  $A_2(x_2^*, y_2^*)$ , 其中:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{(ae - cd) - \sqrt{k}}{2(cf + be)}, y_1^* = -\frac{f}{e}x_1^* + \frac{d}{e}; \\ x_2^* &= \frac{(ae - cd) + \sqrt{k}}{2(cf + be)}, y_2^* = -\frac{f}{e}x_2^* + \frac{d}{e}; \\ k &= (cd - ae)^2 - 4(cf + be)Ge. \end{aligned}$$

结合上面的论证, 有如下结论。

在满足  $k > 0$  和  $ae > cd$  的情况下, 系统(1)有 2 个正平衡点, 此时垂直等倾线  $\frac{dx}{dt} = 0$  会和  $x$  轴产生 2 个交点 (图 1);

在满足  $k = 0$  和  $ae > cd$  的情况下, 系统(1)有 1 个正平衡点, 此时垂直等倾线  $\frac{dy}{dt} = 0$  会和  $x$  轴产生 2 个交点 (图 2)。

下文将针对  $k > 0$  的情形进行讨论, 即系统有 2 个不同的正平衡点的情况。对于  $k = 0$  的情形, 用同样的方法可推得。

## 2 正平衡点稳定性分析

下面分析系统(1)不考虑脉冲情况下正平衡点的类型。为方便后文计算, 首先对系统(1)作如下变换:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[a - bx - cy] - G \triangleq f(x, y) - G, \\ \frac{dy}{dt} = y[d - ey - fx] \triangleq g(x, y). \end{cases}$$

由上式可得:  $f_x(x, y) = -b, f_y(x, y) = -c, g_x(x, y) = -fy, g_y(x, y) = d - 2ey - fx$ , 且在等倾线有  $f(x, y) = \frac{G}{x}, g(x, y) = 0$ 。通过计算  $x$  种群等倾线斜率为:

$$k_1 = -\frac{f(x, y) + xf_x(x, y)}{xf_y(x, y)} = \frac{G - bx^2}{cx^2} \begin{cases} > 0, x < x_0; \\ < 0, x > x_0. \end{cases}$$

$y$  种群等倾线的斜率为:

$$k_2 = -\frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)} = \frac{fy}{d - 2ey - fx}。$$

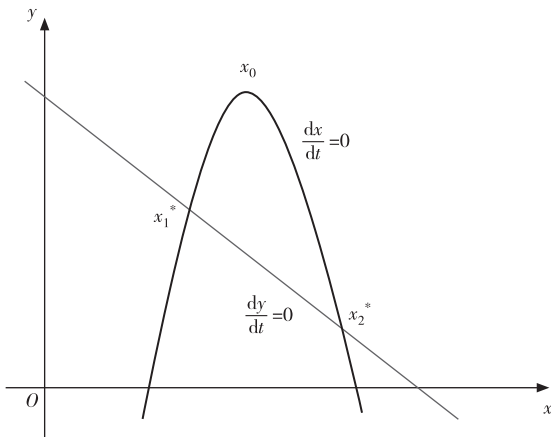


图 1 当  $k > 0, ae > cd$  时, 存在 2 个正平衡点  
 Fig. 1 When  $k > 0$  and  $ae > cd$ ,  
 there are two positive equilibrium points

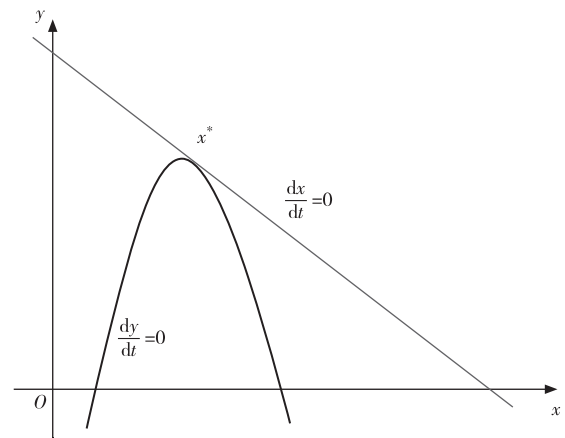


图 2 当  $k = 0, ae > cd$  时, 存在 1 个正平衡点  
 Fig. 2 When  $k = 0$  and  $ae > cd$ ,  
 there is one positive equilibrium points

在平衡点  $A_i (i=1, 2)$  处, 代入  $y = \frac{1}{e}(d - fx)$ , 得到  $k_2 = \frac{fy}{d - 2ey - fx} = -\frac{f}{e} < 0$ 。

在平衡点  $A_i (i=1, 2)$  处, 对系数矩阵  $A_i (i=1, 2)$  进行线性化:

$$A_i = \begin{bmatrix} f(x, y) + xf_x(x, y) & xf_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix}。$$

在平衡点  $A_i (i=1, 2)$  处, 系数矩阵特征根方程为:

$$f_{A_i}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - (f(x, y) + xf_x(x, y)) & -xf_y(x, y) \\ -g_x(x, y) & \lambda - g_y(x, y) \end{vmatrix} = 0,$$

化简可得:

$$\lambda^2 - (g_y(x, y) + f(x, y) + xf_x(x, y))\lambda + (f(x, y) + xf_x(x, y)g_y(x, y)) - xf_y(x, y)g_x(x, y) = 0。$$

然后作如下变换即可得到引理 1。

$$q = \begin{vmatrix} f(x, y) + xf_x(x, y) & xf_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{G}{x} - bx & -cx \\ -fy & d - 2ey - fx \end{vmatrix} =$$

$$cx(d - 2ey - fx)(k_1 - k_2) = cfxy \frac{(k_1 - k_2)}{k_2},$$

$$p = f(x, y) + xf_x(x, y) + g_y(x, y) = \frac{G}{x} - bx + (d - 2ey - fx) = k_1cx + \frac{fy}{k_2},$$

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0,$$

$$\Delta = p^2 - 4q = \left(k_1cx + \frac{fy}{k_2}\right)^2 + 4cx(k_2 - k_1)(d - 2ey - fx) = \left(k_1cx + \frac{fy}{k_2}\right)^2 + 4cx(k_2 - k_1)(fx - d).$$

**引理 1** 1) 满足  $0 > k_2 > k_1$ , 即  $-\frac{f}{e} > k_1$  时, 系统(1)的正平衡点  $A_1, A_2$  都是稳定的平衡点, 可能是结点, 也有可能是焦点, 还需进一步讨论;

2) 满足  $(k_1 - k_2)k_2 < 0$ , 即  $-\frac{f}{e} < k_1$  时, 系统(1)的正平衡点  $A_1, A_2$  都是不稳定的平衡点, 属于鞍点。

3) 当  $A_1(x_1^*, y_1^*)$  使得  $-\frac{f}{e} < k_1$ ;  $A_2(x_2^*, y_2^*)$  使得  $-\frac{f}{e} > k_1$  时,  $A_1$  为不稳定的平衡点(鞍点),  $A_2$  为稳定的平衡点。即  $(x_1^*)^2 < \frac{eG}{be - cf}$ ,  $(x_2^*)^2 > \frac{eG}{be - cf}$  时,  $A_1$  为鞍点,  $A_2$  可能为稳定的结点, 也可能是稳定的焦点。

4) 当  $A_1(x_1^*, y_1^*)$  使得  $-\frac{f}{e} > k_1$ ,  $A_2(x_2^*, y_2^*)$  使得  $-\frac{f}{e} < k_1$  时,  $A_1$  为稳定的平衡点,  $A_2$  为不稳定的平衡点(鞍点)。即  $(x_1^*)^2 > \frac{eG}{be - cf}$ ,  $(x_2^*)^2 < \frac{eG}{be - cf}$  时,  $A_1$  可能为稳定的结点, 也可能是稳定的焦点,  $A_2$  为鞍点。

进一步讨论系统(1)的稳定的正平衡点类别, 分析该点是稳定的结点还是焦点。

**定理 1** 令  $i = [k_1^2c^2 + f^2 + 2k_1cf + 4c(k_2 - k_1)f]$ ,  $j = [4cd(k_2 - k_1) - 2df - 2k_1cd]x$ 。针对系统(1)中的稳定正平衡点:

1) 满足  $i > 0, j^2 - 4id < 0$ , 系统(1)中稳定平衡点是结点;

2) 满足  $i < 0, j^2 - 4id > 0$ , 系统(1)中稳定平衡点是焦点。

**证明** 注意到:

$$\begin{aligned} \Delta = p^2 - 4q &= \left(k_1cx + \frac{fy}{k_2}\right)^2 + 4cx(k_2 - k_1)(fx - d) = (k_1cx + fx - d)^2 + 4cx(k_2 - k_1)(fx - d) = \\ &= [k_1^2c^2 + f^2 + 2k_1cf + 4c(k_2 - k_1)f]x^2 + [4cd(k_2 - k_1) - 2df - 2k_1cd]x + d = ix^2 + jx + d, \end{aligned}$$

其中:  $q > 0, p < 0$ 。则有:

1) 满足  $i > 0, j^2 - 4id < 0, \Delta > 0$ , 系统(1)中稳定的正平衡点属于稳定的结点;

2) 满足  $i < 0, j^2 - 4id > 0, \Delta < 0$ , 系统(1)中稳定的正平衡点属于稳定的焦点。 证毕

下面重点讨论引理 1 中条件 3) 成立的情况, 即  $A_i (i=1, 2)$  中一个为稳定的平衡点(稳定的结点或焦点), 另一个为鞍点的情况, 条件 4) 成立的情形类似可得。

不妨假设条件 3) 成立, 故  $A_1$  为鞍点,  $A_2$  为稳定的结点或焦点。

**引理 2**<sup>[8]</sup> (Dulac 判别法) 对于系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

若存在函数  $B(x, y) \neq 0$ , 且该函数存在连续偏导数, 并让  $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}$  在单连通区域  $D$  中不改变正负号, 那么系统(2)在  $D$  中没有闭轨线。

**定理 2** 满足  $0 > k_2 > k_1$  情况下, 系统(1)的正平衡点  $A_2$  附近无闭轨线。

**证明** 令:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[a - bx - cy] - G = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = y[d - ey - fx] = Q(x, y). \end{cases}$$

取  $B(x, y) = \frac{1}{x}$ , 则有:

$$BP = a - bx - cy - \frac{G}{x}, BQ = \frac{y}{x}(d - ey - fx), \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = ck_1 + \frac{fy}{k_2x},$$

当  $0 > k_2 > k_1$  时, 即  $-\frac{f}{e} > k_1$  时,  $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} < 0$ 。

结合引理 2 知系统(1)的正平衡点  $A_2$  附近无闭轨线。

证毕

**定理 3** 系统(1)的解在  $\mathbf{R}_2^+$  上有界并且始终为正数。

**证明** 先证明解恒为正数。不妨先从第 2 个方程出发, 将  $\frac{dy}{dt} = y[d - ey - fx]$  改写为:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = d - ey - fx。$$

对两边从 0 到  $t$  积分, 得:

$$\ln y(t) - \ln y(s) = \int_0^t [d - ey(s) - fx(s)] ds。$$

因此有:

$$y(t) = y(0) \exp \left[ \int_0^t (d - ey(s) - fx(s)) ds \right] > 0。$$

再考虑第 1 个方程  $\frac{dx}{dt} = x[a - bx - cy] - G$ 。为了简化运算, 定义  $B(t) = a - bx(t) - cy(t)$ 。所以有:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \exp \left[ - \int_0^t B(s) ds \right] > 0, \\ \frac{dx}{dt} &= xB(t) - G。 \end{aligned}$$

将第 1 个方程两边同乘积分因子  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) \frac{dx}{dt} + x\mu(t)(-B(t)) = -G\mu(t),$$

即:

$$\frac{d}{dt} [x\mu(t)] = -G\mu(t)。$$

对两边从 0 到  $t$  积分:

$$x(t)\mu(t) - x(0)\mu(0) = -G \int_0^t \mu(s) ds,$$

由于  $\mu(0) = 1$ , 解得:

$$x(t)\mu(t) = x(0) - G \int_0^t \mu(s) ds。$$

所以有:

$$x(t) = \frac{x(0) - G \int_0^t \mu(s) ds}{\mu(t)} > 0。$$

故系统(1)的解在  $\mathbf{R}_2^+$  上始终为正数。

再讨论解的有界性。设  $X = (x(t), y(t))$  在第一象限中, 且是从系统初始点  $(x(0), y(0))$  出发的解, 定义  $L: L = x + y - m = 0$ , 可以得到:

$$\left. \frac{dL}{dt} \right|_{L=0} = ax - bx^2 - cxy - G + dy - ey^2 - fxy,$$

将  $y = M - x$  代入上式, 可以得到:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dL}{dt} \right|_{L=0} &= ax - bx^2 - cMx + cx^2 - G + dM - dx - eM^2 + 2eMx - ex^2 - fMx + fx^2 = \\ &= -(b - c + e - f)x^2 + (a - d)x - eM^2 + (2ex - c - fM + d)M - G < 0。 \end{aligned}$$

其中:  $M$  充分大。该式标志着轨线会自上而下穿过  $L$ , 所以存在由边界  $x$  轴、 $y$  轴及  $L$  所构成 1 个区域  $\Omega$ , 且可

以不断往外延展,即  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq M, 0 \leq y \leq M\}$ 。当  $t \geq T$  时,且  $T$  充分大,则有:

$$X = (x(t), y(t)) \in \Omega。$$

证毕

综上可得如下定理。

**定理 4** 系统(1)的正平衡点  $A_2$  是全局渐近稳定的。

### 3 阶 1 周期解的存在性及稳定性

#### 3.1 相关引理及定义

**定义 1**<sup>[9]</sup> 定义形如状态脉冲微分方程解映射组成的动力学系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in M\{x, y\} \\ (x, y) \notin M\{x, y\} \end{array} \right. \begin{cases} \Delta x = \alpha(x, y) \\ \Delta y = \beta(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

为半连续动力系统,简记为  $(N, g, \varphi, M)$ 。系统(3)的映射开始点  $p$  不能在  $M\{x, y\}$  上,  $p \in N = \mathbf{R}_2^+ - M\{x, y\}$ ,  $g: N \rightarrow M, \varphi: M \rightarrow N, M\{x, y\}$  和  $N\{x, y\}$  是  $\mathbf{R}_2^+ = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$  上的直线或曲线,其中  $N\{x, y\}$  是相集,  $M\{x, y\}$  是脉冲集。

**定义 2**<sup>[9]</sup> 如果在相集  $N$  上,  $\exists p \in N$ 。且  $\exists T_1$  使得  $f(p, T_1) = q_1 \in M\{x, y\}$ , 而且脉冲映射  $\varphi(q_1) = \varphi(f(p, T_1)) = p \in N\{x, y\}$ , 则  $f(p, T_1)$  称为阶 1 周期解, 见图 3。

**定义 3**<sup>[9]</sup> 若  $\Gamma$  是系统(3)半连续系统周期解, 对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0, T_1 \geq 0$ , 以及相集上点  $p$  的邻域  $U(p, \delta)$ , 任意  $p_1 \in U(p, \delta)$ ,  $f(p_1, t)$  是将  $p_1$  作初始点的半连续动力系统的轨线。当  $t \geq T_1$  时, 有:

$$\rho(f(p_1, t), \Gamma) < \epsilon,$$

此时  $\Gamma$  是轨道稳定的。

**定义 4**<sup>[9]</sup>  $N$  为相集,  $M$  为脉冲集,  $M$  和  $N$  都是直线。并且  $N$  交  $x$  轴于  $Q$ ,  $N$  上点  $E$  与  $Q$  之间的距离为  $e$ 。过  $E$  点的轨线与  $M$  相交于点  $G$ , 经过脉冲,  $M$  上的点  $G$  映射在相集  $N$  上的相点为  $E_1$ ,  $E_1$  与  $Q$  之间的距离为  $e_1$ 。规定点  $E_1$  是  $E$  的后继点, 点  $E$  的后继函数是  $G(E) = e_1 - e$ , 见图 4。

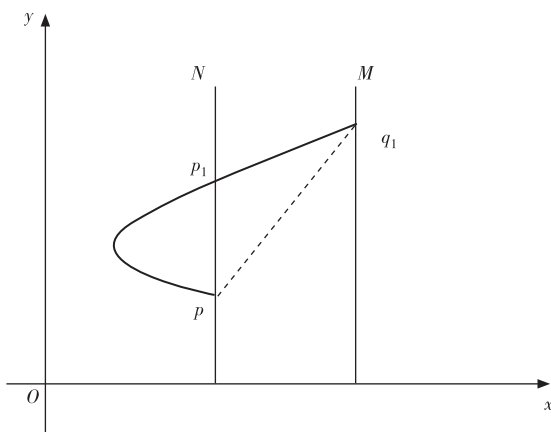


图 3 阶 1 周期解

Fig. 3 Order-1 periodic solution diagram

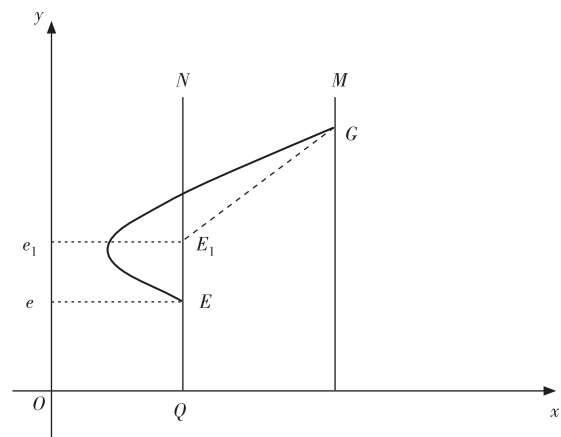


图 4 后继函数  $G(E) = e_1 - e$

Fig. 4 Successor function  $G(E) = e_1 - e$

**引理 3**<sup>[10]</sup> 后继函数  $G(E)$  是连续的。

**引理 4** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 若  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 满足  $f(\xi) = 0$ 。

**引理 5** 对于连续动力系统  $(X, \Pi)$ , 如果存在  $x_1, x_2 \in M$ ,  $M$  是脉冲集, 有后继函数  $G(x_1) \cdot G(x_2) < 0$ , 那么必然存在点  $E, E \in (x_1, x_2)$ , 使得  $G(E) = 0$ 。由零点定理可知, 在  $x_1, x_2$  之间必然有关于  $E$  的阶 1 周期解。

**引理 6** 设  $\{(x_n, y_n)\}$  是一个严格开区间, 满足  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n < \dots < y_2 < y_1$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ , 则存在唯一的  $\xi$ , 使得  $x_n < \xi < y_n, n = 1, 2, \dots$ 。

**引理 7**<sup>[11]</sup> 设系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \frac{dy}{dt} = g(x, y), \Phi(x, y) \neq 0 \\ \Delta x = \alpha(x, y), \Delta y = \beta(x, y), \Phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

的  $T$ -周期解  $x = \varphi(t), y = \rho(t)$  是轨道渐近稳定的。若对于乘子  $\mu$  有  $|\mu| < 1$ , 其中:

$$\mu = \prod_{k=1}^q \Delta_k \exp \left[ \int_0^T \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \rho(t)) + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(t), \rho(t)) \right) dt \right],$$

式中:  $f, g, \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  为系统在点  $(\varphi(\tau_k), \rho(\tau_k))$  的值,  $q$  为周期解的阶数, 且:

$$\Delta_k = \frac{f_+ \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + g_+ \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)}{f \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + g \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)},$$

$$f_+ = f(\varphi(\tau_k^+), \rho(\tau_k^+)), g_+ = g(\varphi(\tau_k^+), \rho(\tau_k^+)).$$

### 3.2 阶 1 周期解的存在性

下面重点讨论引理 1 的条件 3) 或条件 4) 成立的情况, 即  $A_i (i = 1, 2)$  中一个为稳定的结点或焦点, 另一个为鞍点的情况。

不妨假设引理 1 的条件 3) 成立 (条件 4) 成立的情况与之类似), 故  $A_1$  为鞍点,  $A_2$  为稳定的结点或焦点。即在  $(x_1^*)^2 < \frac{eG}{be - cf}, (x_2^*)^2 > \frac{eG}{be - cf}$  且  $i < 0, j^2 - 4id > 0$  时,  $A_1$  为鞍点,  $A_2$  为稳定的焦点。

**定理 5** 当  $h - m < h \leq x_2$  时, 系统(1)存在阶 1 周期解。

**证明** 任意找一条轨线  $L_1, L_1$  过  $N$  上的点  $B$ , 与  $M$  相交于点  $B_1; L_1$  发生脉冲后, 映射到  $N$  上, 相点为  $B_2$ 。  $B_2$  为点  $B$  的后继点, 在等倾线  $\frac{dy}{dt} = 0$  之上和等倾线  $\frac{dx}{dt} = 0$  之下, 故  $\frac{dy}{dt} < 0, \frac{dx}{dt} > 0$ 。显然轨线  $L_1$  在等倾线  $\frac{dy}{dt} = 0$  之上和  $\frac{dx}{dt} = 0$  之下的曲线弧是单调下降的, 所以  $y_B > y_{B_2}$ 。因此点  $B$  的后继函数  $G(B) = y_{B_2} - y_B < 0$ 。

从  $B_2$  出发的轨线与  $M$  相交于  $B_3$ , 发生脉冲后, 映射到  $N$  上, 相点为  $B_4$ 。  $B_4$  为  $B_2$  的后继点, 在等倾线  $\frac{dy}{dt} = 0$  之上和等倾线  $\frac{dx}{dt} = 0$  之下, 故  $\frac{dy}{dt} < 0, \frac{dx}{dt} > 0$ 。显然轨线  $L_1$  在等倾线  $\frac{dy}{dt} = 0$  之上和  $\frac{dx}{dt} = 0$  之下的曲线弧是单调下降的, 所以  $y_{B_2} > y_{B_4}$ 。因此点  $B_2$  的后继函数  $G(B_2) = y_{B_4} - y_{B_2} < 0$ 。

重复此过程, 不难发现  $G(B_n) = y_{B_{n+2}} - y_{B_n} < 0 (n = 2, 4, \dots)$ 。

然后找一条非常接近  $x$  轴的轨线  $L_2, L_2$  交相集  $N$  于点  $C$ , 与脉冲集  $M$  相交于点  $C_1$ 。  $C_1$  经过脉冲作用后, 新的相点变成  $C_2$ , 那么  $C_2$  就是点  $C$  的后继点, 位于等倾线  $\frac{dy}{dt} = 0$  和等倾线  $\frac{dx}{dt} = 0$  之下, 故  $\frac{dy}{dt} > 0, \frac{dx}{dt} > 0$ 。显然轨线  $L_2$  是单调增加的, 因此  $y_{C_2} > y_C$ 。由此可知点  $C$  的后继函数  $G(C) = y_{C_2} - y_C > 0$ 。

从  $C_2$  出发的轨线与  $M$  相交于  $C_3$ , 发生脉冲后, 映射到  $N$  上, 相点为  $C_4$ 。  $C_4$  为  $C_2$  的后继点, 在等倾线  $\frac{dy}{dt} = 0$  和等倾线  $\frac{dx}{dt} = 0$  之下, 故  $\frac{dy}{dt} > 0, \frac{dx}{dt} > 0$ 。显然轨线  $L_2$  在等倾线  $\frac{dy}{dt} = 0$  和  $\frac{dx}{dt} = 0$  之下的曲线弧是单调上升的, 所以  $y_{C_4} > y_{C_2}$ 。因此点  $C_2$  的后继函数  $G(C_2) = y_{C_4} - y_{C_2} > 0$ 。

重复此过程, 不难发现  $G(C_n) = y_{C_{n+2}} - y_{C_n} > 0 (n = 2, 4, \dots)$ 。

结合引理 4 易得, 满足  $h - m < h \leq x_2$  时, 必有一点  $D$  位于  $BC$  之间, 满足  $G(D) = 0$ , 由引理 5 可得, 满足  $h - m < h \leq x_2$  时, 系统(1)存在阶 1 周期解 (图 5)。 证毕

**定理 6** 当  $h - m < h \leq x_2$  时, 系统(1)存在唯一的阶 1 周期解。

**证明** 轨线  $L_1$  与相集  $N$  相交于点  $B$ , 与脉冲集  $M$  相交于点  $B_1$ , 经过脉冲映射后, 映射为  $B_2$ , 过相集  $N$  上

$B_2$  的轨线抵达脉冲集  $M$  上的点  $B_3$ , 通过脉冲映射为相集  $N$  上的  $B_4$ , 易知  $B_2$  的后继点为  $B_4$ , 重复上面的步骤, 产生 2 个序列:

$$y_B, y_{B_2}, y_{B_4}, y_{B_6}, y_{B_8}, y_{B_{10}}, \dots, y_{B_{2n}}, \dots \in \overline{BC} \subset N;$$

$$y_{B_1}, y_{B_3}, y_{B_5}, y_{B_7}, y_{B_9}, y_{B_{11}}, \dots, y_{B_{2n-1}}, \dots \in \overline{B_1C_1} \subset M.$$

同理可得, 轨线从  $C$  出发也会产生 2 个序列:

$$y_C, y_{C_2}, y_{C_4}, y_{C_6}, y_{C_8}, y_{C_{10}}, \dots, y_{C_{2n}}, \dots \in \overline{BC} \subset N;$$

$$y_{C_1}, y_{C_3}, y_{C_5}, y_{C_7}, y_{C_9}, y_{C_{11}}, \dots, y_{C_{2n-1}}, \dots \in \overline{B_1C_1} \subset M.$$

经过之前分析不难看出, 由点  $B$  出发的轨线得到的 2 个序列  $\{B_{2n-1}\}$  和  $\{B_{2n}\}$  为单调减少数列, 由点  $C$  出发得到的 2 个序列  $\{C_{2n-1}\}$  和  $\{C_{2n}\}$  为单调增加数列. 由图 6 易见, 线段  $\overline{B_1C_1}$  脉冲作用映射到线段  $\overline{BC}$  上, 所以  $(y_{B_{2n-1}}, y_{C_{2n-1}}) \subset (y_{B_{2n}}, y_{C_{2n}})$ . 再由引理 6 的区间套定理得  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_{B_{2n}}, y_{C_{2n}}) = 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{B_{2n}} = y_D = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{C_{2n}}$ , 故可知系统 (1) 存在唯一周期解时, 则系统 (1) 存在唯一的阶 1 周期解, 见图 6. 证毕

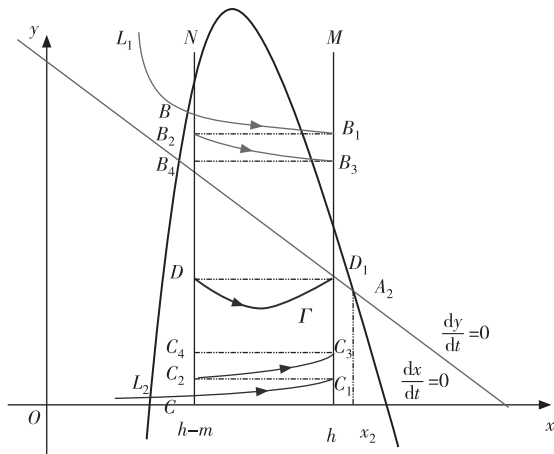


图 5 当  $h-m < h \leq x_2$  时, 系统 (1) 存在阶 1 周期解

Fig. 5 The existence of order-1 homoclinic orbit of system (1) for  $h-m < h \leq x_2$

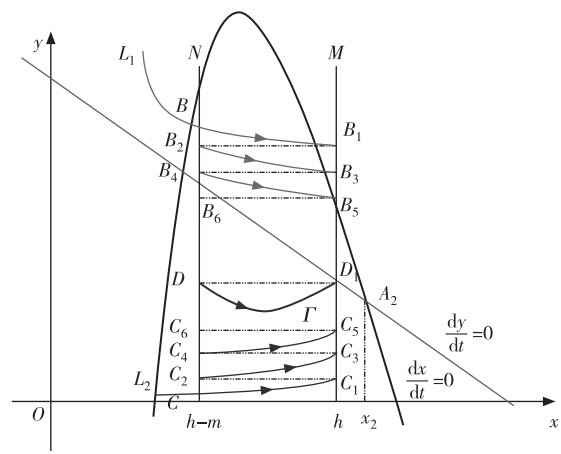


图 6 当  $h-m < h \leq x_2$  时, 系统 (1) 存在唯一的阶 1 周期解

Fig. 6 The existence of unique order-1 homoclinic orbit of system (1) for  $h-m < h \leq x_2$

**定理 7** 当  $h-m < x_2 < h$  时, 系统 (1) 存在阶 1 周期解.

证明过程和定理 5 类似 (图 7).

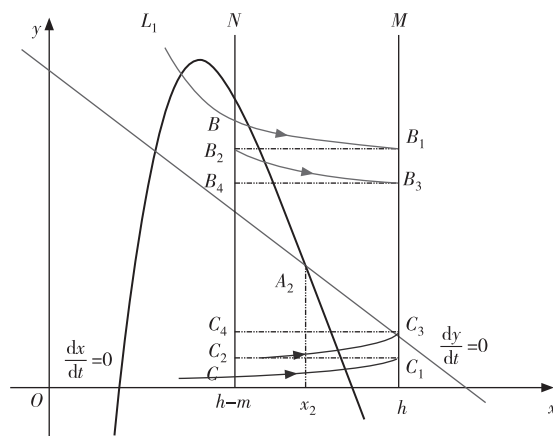


图 7 当  $h-m < x_2 < h$  时, 系统 (1) 存在阶 1 周期解

Fig. 7 The existence of order-1 homoclinic orbit of system (1) for  $h-m < x_2 < h$

**定理 8** 当  $h-m < x_2 < h$  时, 系统 (1) 存在唯一的阶 1 周期解.

证明过程和定理 6 类似, 图略.

### 3.3 阶 1 周期解的稳定性

结合引理 7,在  $A_1$  为鞍点,  $A_2$  为稳定的焦点的情况下,令  $(x, y)$  是系统 (1) 的初始点  $(h, \rho_0)$  的  $\Gamma$  周期解,  $k = \frac{am - bm^2 - 2bmh - cm\rho_0}{ah - bh^2 - ch\rho_0 - G}$ , 有如下定理。

**定理 9** 当  $-\frac{h-m}{h} - 1 < k < \frac{h-m}{h} - 1$  和  $k_1 < 0$  时, 则系统 (1) 的阶 1 周期解轨道是渐近稳定的。

**证明** 结合系统 (1), 知:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ax - bx^2 - cxy - G, g(x, y) = dy - ey^2 - fxy, \\ (x(T), y(T)) &= (h, \rho_0)(x(T^+), y(T^+)) = (m+h, \rho_0), \\ \Delta x &= \alpha(x, y) = -m, \Delta y = \beta(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) &= x - h = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = a - 2bx - cy, \frac{\partial f}{\partial y} = -cx, \frac{\partial g}{\partial x} = -fy, \frac{\partial g}{\partial y} = d - 2ey - fx, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1, \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \\ \Delta_1 &= \frac{f + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + g + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{f \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + g \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)} = \frac{f_+}{f} = \\ &= 1 + \frac{am - bm^2 - 2bmh - cm\rho_0}{ah - bh^2 - ch\rho_0 - G} = 1 + k, \\ \mu &= (1 + k) \cdot \exp \left[ \int_0^T (a - 2bx - cy) + (d - 2ey - fx) dt \right] = \\ &= (1 + k) \cdot \exp \left[ \int_0^T \left( a - 2bx - cy - \frac{q}{x} \right) + \left( \frac{q}{x} - bx - cy \right) + (d - ey - fx) dt \right]. \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \int_{h-m}^h \left( a - bx - cy - \frac{G}{x} \right) dt &= \int_{h-m}^h \frac{dx}{x} = \ln \frac{h}{h-m}, \\ \int_{\rho_0}^{\rho_0} (d - ey - fx) dt &= \int_{\rho_0}^{\rho_0} \frac{dy}{y} = 0, \\ \int_0^T \left( \frac{G}{x} - bx - ey \right) dt &= \int_0^T (ck_1x - ey) dt. \end{aligned}$$

代入条件  $k_1 < 0 \Rightarrow 0 < e^{\int_0^T (ck_1x - ey) dt} < 1$ , 可得如下结论。

当条件  $-\frac{h-m}{h} - 1 < k < \frac{h-m}{h} - 1$  和  $k_1 < 0$  同时成立时, 有:

$$|\mu| = \left| (1 + k) \cdot \exp \left[ \ln \frac{h}{h-m} + \int_0^T (ck_1x - ey) dt \right] \right| < 1.$$

当  $-\frac{h-m}{h} - 1 < k < \frac{h-m}{h} - 1$  和  $k_1 < 0$  时, 系统 (1) 的阶 1 周期解轨道  $\Gamma$  渐近稳定的。

证毕

## 4 结束语

本文讨论了一类具有常数收获和状态反馈控制的竞争模型, 系统地分析了该模型平衡点的存在性和稳定性, 证明了满足一定条件时阶 1 周期解的存在性和渐近稳定性。但文中的脉冲作用比较特殊, 脉冲仅对  $x$  种群产生了影响, 未对  $y$  种群产生影响; 其次, 文中的脉冲收获为常数收获, 而在现实情景中脉冲收获往往为比例收获。因此, 在未来的研究中将对此作进一步的改进。

### 参考文献:

[1] 黄立壮, 刘琼, 陈武大仁, 等. 一类状态反馈控制的渔业生产模型研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2020, 37(4): 90-95.

- HUANG L Z, LIU Q, CHEN W D R, et al. Research on a kind of fishery production model based on state feedback control[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2020, 37(4): 90-95.
- [2] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 3版. 北京: 北京大学出版社, 2000.  
ZHANG J Y, FENG B Y. Geometric theory and bifurcation problems of ordinary differential equations[M]. 3rd edition, Beijing: Peking University Press, 2000.
- [3] SMITH V L. On models of commercial fishing[J]. Journal of Political Economy, 1969, 77(2): 181-198.
- [4] FAN M, WANG K. Optimal harvesting policy for single population with periodic coefficients[J]. Mathematical Biosciences, 1998, 152(2): 165-177.
- [5] TSOULARIS A, WALLACE J. Analysis of logistic growth models[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 179(1): 21-55.
- [6] 王玮明, 林素青. 可持续发展捕鱼策略模型及其应用[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2004, 21(2): 18-21.  
WANG W M, LIN S Q. Study and application on a fishing model of continuable development[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2004, 21(2): 18-21.
- [7] 王丽敏, 谭远顺. 周期 Gompertz 生态系统中的最优脉冲控制收获策略[J]. 系统科学与数学, 2007, 27(4): 520-528.  
WANG L M, TAN Y S. Optimal impulsive control policy in periodic gompertz ecosystem[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2007, 27(4): 520-528.
- [8] 黄立壮, 刘琼. 一类具有常数收获和状态反馈控制的渔业模型研究[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2021, 34(2): 177-181.  
HUANG L Z, LIU Q. Research on a kind of fishery model with constant harvesting and state feedback control[J]. Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition), 2021, 34(2): 177-181.
- [9] CHEN L S, LIANG X Y, PEI Y Z. The periodic solutions of the impulsive state feedback dynamical system[J]. Communications in Mathematical Biology and Neuroscience, 2018(2018): 14.
- [10] 陈兰荪. 害虫治理与半连续动力系统几何理论[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2011, 12(1): 1-9.  
CHEN L S. Pest control and geometric theory of semi-continuous dynamical system[J]. Journal of Beihua University (Natural Science), 2011, 12(1): 1-9.
- [11] 黄立壮, 刘琼, 陈武大仁, 等. 一类具有状态脉冲反馈控制的害虫治理模型[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2020, 45(4): 911-919.  
HUANG L Z, LIU Q, CHEN W, et al. A pest management model with state pulse feedback control[J]. Journal of Guangxi University (Natural Science Edition), 2020, 45(4): 911-919.

## Research on a Competition Model with Constant Harvest and State Feedback Control

WANG Yangping, YANG Zhichun

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** Study competition models with constant harvest and state feedback control, and analyze population dynamics in fisheries and animal husbandry. Establish a mathematical model, analyze the existence and stability of equilibrium points, and apply Dulac discriminant method and Poincare criterion to study periodic solutions. Discovered the existence of stable nodes or focal points in the system under specific conditions, and proved the asymptotic stability of first-order periodic solutions. Reasonable control of harvest rates and feedback mechanisms can achieve sustainable population management, providing theoretical guidance for fisheries and animal husbandry.

**Keywords:** fishery and livestock production; geometric theory; first-order periodic solution; global stability; state feedback control

(责任编辑 黄颖)