

一类具故障或正常状态属性向量集的格性质*

张彤, 万轩, 赵克全

(重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:对一类具状态属性向量集的格序相关性质进行研究。格是一类特殊的偏序集,将电力系统状态空间抽象为一类具正常或故障状态属性的向量集。进而在基于位置关系的一类偏序下证明了这类具状态属性向量集的格、有界格、完备格和分配格等格序性质,也给出一些例子对主要结果进行解释。研究结果可为大规模复杂电力系统状态空间的有效划分和可靠性评估状态筛选与高效算法研究提供理论与方法支撑。

关键词:具状态属性向量集;偏序;格性质

中图分类号:O221.6

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2025)06-0030-07

多目标优化问题是指同时优化多个相互冲突的目标函数的问题,关于该问题理论、方法及应用的研究层出不穷^[1-3]。由于多目标优化问题各目标间一般具有矛盾性,通常可能不存在一个使得所有目标同时达到最优的解,因此如何定义多目标优化问题的解是十分重要而基础的问题。在多目标优化问题中,“最优解”的定义往往依赖于决策者在目标空间中的“偏好”,偏序关系作为一种重要的数学工具,能很好地刻画决策者的偏好,这为定义多目标优化问题的解以及判定解的最优性奠定了数学理论基础。

格是一类特殊的偏序集。19世纪末,Dedekind^[4]首次从数论的角度提出格的概念,通过引入模给出对偶群的概念,为格论的形式化奠定了思想与基础。Schröder等人^[5]首次将逻辑代数构建为严格的公理化体系,为格论提供早期雏形。直到1940年,Birkhoff^[6]的经典著作 *Lattice Theory* 问世,格论才在20世纪初得到系统数学阐述。随着格论的不断发展,这一数学工具为诸多数学问题的解决提供了便利。格论已经被应用到数学的各个分支中,在组合数学、模糊数学和理论计算机科学等领域都有广泛应用。

电力系统是复杂的大规模工程系统,它的系统元件通常具有正常或故障2种状态。因此,从数学的角度可以将电力系统状态空间抽象为一类具状态属性的向量集,即由所有元件的正常或故障状态属性构成的向量集。2015年,程林等人^[7]利用 n 维向量介绍了含 n 个元件电力系统状态的数学表示。电力系统在任意时刻的运行状态都可以通过 n 维状态向量来刻画,其中向量的维度等于系统所含电气元件的总数。2024年,赵克全等人^[8]研究了一类具状态属性向量集的偏序性质和最优性。2025年,刘朗亭等人^[9]利用自然序锥诱导的自然偏序,研究了电力系统状态空间的格理论性质。同年,刘宏升等人^[10]针对电力系统状态空间规模巨大导致可靠性评估困难问题,在自然偏序下提出了基于标量化方法的状态向量集缩减算法。

本文考虑由电力系统状态空间抽象出来的具故障或正常状态属性的向量集,即包含 n 个元件电力系统所有状态向量构成的向量集合,并基于位置关系的一类偏序关系建立这类具故障或正常状态属性向量集的一些格序性质。

1 预备知识

假设某电力系统有 n 个元件,每个元件有2种状态:正常状态或故障状态,用“1”表示元件的故障状态,“0”

* 收稿日期:2025-10-05 网络出版时间:2026-01-08T16:59

资助项目:国家重点研发计划项目(No. 2023YFA1011302);国家自然科学基金面上项目(No. 12171063);重庆市教育委员会科学技术研究计划项目(No. KJQN202500510);重庆市自然科学基金面上项目(No. CSTB2025NSCQ-GPX0994)

第一作者简介:张彤,女,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:ztong2001@163.com;通信作者简介:赵克全,男,教授,博士生导师,E-mail:kequanz@cqnu.edu.cn

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.n.20260108.1548.014

表示元件处于正常状态。由电力系统中 n 个元件的所有正常或故障状态所构成的集合称为电力系统状态空间,记为 $\text{System } n$,数学表达式为:

$$X = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n \mid x_i = 0 \text{ 或 } 1, i \in [n]\},$$

其中: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 表示状态向量, x_i 表示第 i 个元件的状态变量, $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 。显然, X 是有限向量集合且具有 2^n 个状态向量。将有 k 个分量等于 1 的状态向量所构成的集合称为 k 阶系统状态集,记为 $X(k)$,即:

$$X(k) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \mid \sum_{i=1}^n x_i = k\}.$$

定义 1^[7] 在系统状态空间 X 上定义结构函数 $S: X \rightarrow \{0, 1\}$ 为:

$$S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \text{ 处于工作状态;} \\ 1, & \mathbf{x} \text{ 处于故障状态.} \end{cases}$$

将 k 个分量等于 1 的所有故障系统状态向量构成的集合和正常系统状态向量构成的集合分别记为:

$$X^1(k) = \{\mathbf{x} \in X(k) \mid S(\mathbf{x}) = 1\}, X^0(k) = \{\mathbf{x} \in X(k) \mid S(\mathbf{x}) = 0\}.$$

将 X 中所有故障系统状态所构成的集合和正常系统状态所构成的集合分别称为故障系统状态集和正常系统状态集,并分别记为 X^1 和 X^0 。显然有 $X = X^0 \cup X^1$ 。

注 1 由定义 1 显然有 $\mathbf{x} = (0, 0, \dots, 0)^T \in X$ 蕴含 $S(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1)^T \in X$ 蕴含 $S(\mathbf{x}) = 1$, 即 $X(0) = X^0(0) \subseteq X^0$, $X(n) = X^1(n) \subseteq X^1$ 。故下面的结论显然成立:

- 1) 若 $\mathbf{x} \in X(k)$ 且 $S(\mathbf{x}) = 0$, 那么 $k \in [n-1]_0$;
- 2) 若 $\mathbf{x} \in X(k)$ 且 $S(\mathbf{x}) = 1$, 那么 $k \in [n]$ 。

其中: $[n-1]_0 = \{0\} \cup [n-1]$ 。

定义 2^[11] 给定集合 \mathbf{R}^n 的二元关系 R 。称 R 是 \mathbf{R}^n 上的偏序关系,如果 R 满足以下 3 个条件:

- 1) 自反性:对于 \mathbf{R}^n 中的任意元素 \mathbf{x} , \mathbf{x} 与自身满足该二元关系,即 $\mathbf{x}R\mathbf{x}$;
- 2) 反对称性:对于 \mathbf{R}^n 中的任意 2 个元素 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} , 如果 $\mathbf{x}R\mathbf{y}$ 且 $\mathbf{y}R\mathbf{x}$, 则 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- 3) 传递性:对于 \mathbf{R}^n 中的任意 3 个元素 \mathbf{x} , \mathbf{y} 和 \mathbf{z} , 如果 $\mathbf{x}R\mathbf{y}$ 且 $\mathbf{y}R\mathbf{z}$, 则 $\mathbf{x}R\mathbf{z}$ 。

定义 3^[12] 设 (X, \leq) 为偏序集, $P \subseteq X$, $a \in X$ 。如果对任意的 $x \in P$ 有 $x \leq a$ ($a \leq x$), 则称 a 为 P 的上界(下界)。设 a 为 P 的上界(下界), 若对于 P 的任意上(下)界 b 均有 $a \leq b$ ($b \leq a$), 则称 a 为 P 的上(下)确界, 记为 $\sup P$ ($\inf P$)。

定义 4^[13] 偏序集 (X, \leq) 称为格, 如果对任意 $a, b \in X$, $\sup\{a, b\}$ 和 $\inf\{a, b\}$ 都存在。如果格在 (X, \leq) 上定义 2 个运算即 \vee 和 \wedge 且满足对任意 $a, b \in X$, $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, 则称 $(X; \vee, \wedge)$ 为由格 (X, \leq) 所诱导的代数系统。 \vee 和 \wedge 分别称为并运算和交运算。

定义 5^[12] 设 (X, \leq) 是偏序集。若 (X, \leq) 是格且对 X 的任意非空子集 P , P 的上确界和下确界都存在, 则称 (X, \leq) 为完备格。

定义 6^[14] 设 (X, \leq) 是偏序集。如果存在元 $\mathbf{0} \in X$ 满足对于所有的 $\mathbf{x} \in X$ 都有 $\mathbf{0} \leq \mathbf{x}$, 则称 $\mathbf{0}$ 为偏序集 (X, \leq) 的最小元。如果存在元 $\mathbf{1} \in X$ 满足对于所有的 $\mathbf{x} \in X$ 都有 $\mathbf{x} \leq \mathbf{1}$, 则称 $\mathbf{1}$ 为偏序集 (X, \leq) 的最大元。

定义 7^[15] 设 (X, \leq) 是偏序集。若 (X, \leq) 是有最小元和最大元的格, 则称 (X, \leq) 是有界格。

定义 8^[13] 设 (X, \leq) 是偏序集。若 (X, \leq) 是存在最大元和最小元的格且对某 $a \in X$, 存在 $b \in X$, 使得 $a \wedge b = \mathbf{0}$, $a \vee b = \mathbf{1}$, 其中 $\mathbf{0}$ 是 X 的最小元, $\mathbf{1}$ 是 X 的最大元, 则 b 称为 a 的补元。

定义 9^[13] 称偏序集 (X, \leq) 是分配格。若 (X, \leq) 是格且对任意 $a, b, c \in X$, 满足以下条件之一:

- 1) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
- 2) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ 。

引理 1^[16] 设 (X, \leq) 是偏序集。若 (X, \leq) 是存在最大元和最小元的格且任意的 $a \in X$ 都存在补元, 则称 (X, \leq) 为有补格。进一步, 若 (X, \leq) 既是有补格又是分配格, 则称 (X, \leq) 为布尔格。

定义 10^[13] 称偏序集 (X, \leq) 是模格。若 (X, \leq) 是格且对任意的 $a, b, c \in X$, 满足以下条件之一:

- 1) $c \leq a \Rightarrow (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c)$;
 2) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c))$ 。

2 主要结果

令 $x(k)$ 的指标集为:

$$I^1(x(k)) = \{i \in [n] \mid x_i = 1, x(k) \in X(k)\}.$$

显然, 当 $k=0$ 时, $x(k) = (0, 0, \dots, 0)^T \in X, I^1(x(k)) = \emptyset$; 当 $k>0$ 时, $I^1(x(k)) \neq \emptyset$ 。进一步, 当 $k>0$ 时, 定义 $x(k)$ 的指标函数 $b_{x(k)}^1: [k] \rightarrow I^1(x(k))$ 满足:

$$\forall j \in [k], b_{x(k)}^1(j) = i, i \in I^1(x(k)), b_{x(k)}^1(1) < b_{x(k)}^1(2) < \dots < b_{x(k)}^1(k).$$

令 $x_1(k_1) \in X(k_1), x_2(k_2) \in X(k_2), 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$ 。定义二元关系“ \leq ”如下:

- 1) 当 $k_1=0$ 时, 恒有 $x_1(k_1) \leq x_2(k_2)$;
 2) 当 $k_1>0$ 时, 存在集合 $I^1(x_2(k_2))$ 中 k_1 个元素构成的子集 $I^1(x_2(k_2))_{k_1}$ 使得:

$$x_1(k_1) \leq x_2(k_2) \Leftrightarrow b_{x_1(k_1)}^1(j) \leq b_{x_2(k_2), k_1}^1(j), \forall j \in [k_1],$$

其中: $b_{x_2(k_2), k_1}^1: [k_1] \rightarrow I^1(x_2(k_2))_{k_1}$ 。

注 2 当 $k_1=k_2$ 时, 对任意的 $j \in [k_1], b_{x_2(k_2), k_1}^1(j) = b_{x_2(k_2)}^1(j)$ 。

注 3 容易验证 (X, \leq) 是偏序集。

下面在偏序“ \leq ”下研究具状态属性向量集的格性质。

性质 1 偏序集 (X, \leq) 是格。

证明 对任意的 $x_1(k_1), x_2(k_2) \in X$, 令 $P = \{x_1(k_1), x_2(k_2)\}$ 。分别记 P^Δ 和 P_∇ 为集合 P 的上界集和下界集, 由定义 3 可得:

$$P^\Delta = \{x \in X \mid a \leq x, \forall a \in P\}, P_\nabla = \{x \in X \mid x \leq a, \forall a \in P\}. \quad (1)$$

下面证明 $P = \{x_1(k_1), x_2(k_2)\}$ 有上确界。

情形 1, 当 $k_1=k_2=k$ 时。

若 $k=0$, 则 $P^\Delta = X, \sup \{x_1(0), x_2(0)\} = \mathbf{0}$ 。

若 $k>0$, 则:

$$P^\Delta = \{x(k') \in X \mid b_{x(k'), k}^1(j) \geq \max \{b_{x_1(k)}^1(j), b_{x_2(k)}^1(j)\}, \forall j \in [k], k' \geq k\}. \quad (2)$$

取 $x^*(k) \in X(k)$ 且满足对任意的 $j \in [k], b_{x^*(k)}^1(j) = \max \{b_{x_1(k)}^1(j), b_{x_2(k)}^1(j)\}$ 。则 $x_1(k) \leq x^*(k), x_2(k) \leq x^*(k)$, 即 $x^*(k) \in P^\Delta$, 且对任意的 $x \in P^\Delta$, 都有 $x^*(k) \leq x$, 即 $\sup \{x_1(k), x_2(k)\} = x^*(k)$ 。

情形 2, 当 $k_1 < k_2$ 时。令:

$$b_{x_1(k_1), k_2}^{1\Delta}(j) = \begin{cases} 0, & j \in [k_2 - k_1]; \\ b_{x_1(k_1)}^1(j - k_2 + k_1), & j \in \{k_2 - k_1 + 1, k_2 - k_1 + 2, \dots, k_2\}. \end{cases} \quad (3)$$

由式(2)和(3)知对任意 $j \in [k_2], P^\Delta = \{x(k') \in X \mid b_{x(k'), k}^1(j) \geq \max \{b_{x_1(k_1), k_2}^{1\Delta}(j), b_{x_2(k_2)}^1(j)\}, k' \geq k_2\}$ 。取 $x^*(k_2) \in X(k_2)$ 满足对任意 $j \in [k_2], b_{x^*(k_2)}^1(j) = \max \{b_{x_1(k_1), k_2}^{1\Delta}(j), b_{x_2(k_2)}^1(j)\}$ 。则 $x_1(k) \leq x^*(k_2), x_2(k) \leq x^*(k_2)$, 即 $x^*(k_2) \in P^\Delta$, 且对任意的 $x \in P^\Delta$, 都有 $x^*(k_2) \leq x$, 即 $\sup \{x_1(k_1), x_2(k_2)\} = x^*(k_2)$ 。

因此, $P = \{x_1(k_1), x_2(k_2)\}$ 存在上确界。

下面再证明 $P = \{x_1(k_1), x_2(k_2)\}$ 有下确界。

情形 1, 当 $k_1=k_2=k$ 时。

若 $k=0$, 则 $P_\nabla = \{\mathbf{0}\}, \inf \{x_1(0), x_2(0)\} = \mathbf{0}$ 。

若 $k>0$, 则:

$$P_\nabla = \{x(k') \in X \mid b_{x(k'), k}^1(j) \leq \min \{b_{x_1(k), k'}^1(j), b_{x_2(k), k'}^1(j)\}, \forall j \in [k'], k' \leq k\}. \quad (4)$$

取 $x^*(k) \in X(k)$ 且满足对任意的 $j \in [k], b_{x^*(k)}^1(j) = \min \{b_{x_1(k)}^1(j), b_{x_2(k)}^1(j)\}$ 。由式(4)可得 $x^*(k) \leq x_1(k), x^*(k) \leq x_2(k)$, 即 $x^*(k) \in P_\nabla$, 且对任意的 $x \in P_\nabla$, 都有 $x \leq x^*(k)$, 即 $\inf \{x_1(k_1), x_2(k_2)\} = x^*(k)$ 。

情形 2,当 $k_1 < k_2$ 时。

若 $k_1 = 0$,则 $P_{\nabla} = \{\mathbf{0}\}, \inf \{x_1(0), x_2(k_2)\} = \mathbf{0}$ 。

若 $k_1 > 0$,则:

$$P_{\nabla} = \{x(k') \in X \mid b_{x(k')}^1(j) \leq \min \{b_{x_1(k_1),k'}^1(j), b_{x_2(k_2),k'}^1(j)\}, \forall j \in [k'], k' \leq k_1\}, \quad (5)$$

其中: $I^1(x_i(k_i))_{k'}$ 是取 $I^1(x_i(k_i)) (i \in [2])$ 中最大的 k' 个元素所构成的子集。取 $x^*(k_1) \in X(k_1)$ 且满足对任意的 $j \in [k_1], b_{x^*(k_1)}^1(j) = \min \{b_{x_1(k_1)}^1(j), b_{x_2(k_2),k_1}^1(j)\}$ 。由式(5)可得 $x^*(k_1) \leq x_1(k_1), x^*(k_1) \leq x_2(k_2)$, 即 $x^*(k_1) \in P_{\nabla}$, 且对任意的 $x \in P_{\nabla}$, 都有 $x \leq x^*(k_1), \inf \{x_1(k_1), x_2(k_2)\} = x^*(k_1)$ 。

因此, $P = \{x_1(k_1), x_2(k_2)\}$ 有下确界。由定义 4, 偏序集 (X, \leq) 是格。

证毕

例 1 考虑 System 5。

1) 当 $k_1 = k_2$ 时, 令 $x_1(k_1) = (0, 1, 0, 0, 1)^T, x_2(k_2) = (0, 0, 1, 1, 0)^T \in X$ 。则 $\sup \{x_1(k_1), x_2(k_2)\} = (0, 0, 1, 0, 1)^T, \inf \{x_1(k_1), x_2(k_2)\} = (0, 1, 0, 1, 0)^T$ 。

2) 当 $k_1 < k_2$ 时, 令 $x_1(k_1) = (0, 1, 0, 0, 1)^T, x_2(k_2) = (1, 0, 1, 1, 0)^T \in X$ 。则 $\sup \{x_1(k_1), x_2(k_2)\} = (1, 0, 1, 0, 1)^T, \inf \{x_1(k_1), x_2(k_2)\} = (0, 1, 0, 1, 0)^T$ 。

注 4 设 $x(k) \in X$ 。下面的结论显然成立。

1) $\sup \{\mathbf{0}, x(k)\} = \mathbf{0} \vee x(k) = x(k)$;

2) $\inf \{\mathbf{0}, x(k)\} = \mathbf{0} \wedge x(k) = \mathbf{0}$ 。

性质 2 偏序集 (X, \leq) 是完备格。

证明 对任意子集 $P \subseteq X$, 设集合 P 中元素的最小阶数为 k_l , 最大阶数为 $k_r (0 \leq k_l \leq k_r \leq n)$ 。首先讨论 P 存在上确界。

情形 1, 若 $k_r = 0$, 由式(1)可知 $P^{\Delta} = X, \sup P = \mathbf{0}$ 。

情形 2, 若 $k_r > 0$, 由式(1)可得 P 的上界集为:

$$P^{\Delta} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \mid b_{x,k_r}^1(j) \geq \max_{a \in P} b_{a,k_r}^{1\Delta}(j), \forall j \in [k_r]\}, \quad (6)$$

其中: $a \in X(k) (k_l \leq k \leq k_r), b_{a,k_r}^{1\Delta}(j)$ 满足当 $k = k_r$ 时, $b_{a,k_r}^{1\Delta} = b_a^1$, 当 $k < k_r$ 时,

$$b_{a,k_r}^{1\Delta}(j) = \begin{cases} 0, & j \in [k_r - k]; \\ b_a^1(j - k_r + k), & j \in \{k_r - k + 1, k_r - k + 2, \dots, k_r\}. \end{cases} \quad (7)$$

取 $x^*(k_r) \in X(k_r)$ 且满足对任意的 $j \in [k_r], b_{x^*(k_r)}^1(j) = \max_{a \in P} b_{a,k_r}^{1\Delta}(j)$ 。

由式(6)和(7)可知对任意的 $a \in P, a \leq x^*(k_r)$, 即 $x^*(k_r) \in P^{\Delta}$, 且对任意的 $x \in P^{\Delta}$, 都有 $x^*(k_r) \leq x$ 。

因此, P 的上确界存在。

下面继续讨论 P 存在下确界。

情形 1, 若 $k_l = 0$, 由式(1)可知 $P_{\nabla} = \{\mathbf{0}\}, \inf P = \mathbf{0}$ 。

情形 2, 若 $k_l > 0$, 由式(1)可知 P 的下界集为:

$$P_{\nabla} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \mid b_x^1(j) \leq \min_{a \in P} b_{a,k_l}^1(j), \forall j \in [k_l]\}. \quad (8)$$

取 $x^*(k_l) \in X(k_l)$ 且满足对任意的 $j \in [k_l], b_{x^*(k_l)}^1(j) = \min_{a \in P} b_{a,k_l}^1(j)$ 。

由式(8)可知对任意的 $a \in P$ 有 $x^*(k_l) \leq a$, 即 $x^*(k_l) \in P_{\nabla}$, 且对任意 $x \in P_{\nabla}$, 都有 $x \leq x^*(k_l)$ 。

因此, 集合 P 存在下确界。由定义 5, 偏序集 (X, \leq) 是完备格。

证毕

性质 3 偏序集 (X, \leq) 是有界格。

证明 因为 X 是有限集, 故在 X 中至少存在一个极小元。不妨设 m 是 X 的极小元, 即不存在 $x \in X \setminus \{m\}$, 使得 $x \leq m$ 。由性质 1 可知 (X, \leq) 是格。因此, 对任意的 $a \in X$ 使得 $\inf \{m, a\} = m \wedge a, m \wedge a \leq m, m \wedge a \leq a$ 。又因为 m 是 X 的极小元, 所以 $m \wedge a = m$ 。故对任意的 $a \in X$ 满足 $m \leq a$, 从而说明 m 是 X 的最小元, 记为 $\mathbf{0}$ 。同理可证 X 存在最大元, 不妨记为 $\mathbf{1}$ 。由定义 7, 偏序集 (X, \leq) 是有界格。

证毕

注 5 偏序集 (X, \leq) 不是补格。

例 2 考虑 System 5. $\mathbf{0}=(0,0,0,0,0)^T$ 是 X 的最小元, $\mathbf{1}=(1,1,1,1,1)^T$ 是 X 的最大元. 取 $\mathbf{x}=(0,0,1,1,0)^T \in X$, 则不存在 $\mathbf{y} \in X$ 使得 $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}=\mathbf{0}, \mathbf{x} \vee \mathbf{y}=\mathbf{1}$, 故 \mathbf{x} 不存在补元, 由引理 1 可得, 偏序集 (X, \leq) 不是有补格, 也不是布尔格.

性质 4 偏序集 (X, \leq) 是分配格.

证明 对任意的 $\mathbf{x}_1(k_1), \mathbf{x}_2(k_2), \mathbf{x}_3(k_3) \in X$. 下面分 2 种情况证明.

情形 1, 存在 $k_i=0(i \in [3])$, 结论显然成立.

情形 2, 对任意 $k_i > 0(i \in [3])$. 令 $\mathbf{x}_4(k_a)=\mathbf{x}_2(k_2) \vee \mathbf{x}_3(k_3), \mathbf{x}_5(k_b)=\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_4(k_a), \mathbf{x}_6(k_c)=\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_2(k_2), \mathbf{x}_7(k_d)=\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_3(k_3), \mathbf{x}_8(k_e)=\mathbf{x}_6(k_c) \vee \mathbf{x}_7(k_d)$, 其中: $k_a=\max\{k_2, k_3\}, k_b=\min\{k_1, k_a\}, k_c=\min\{k_1, k_2\}, k_d=\min\{k_1, k_3\}, k_e=\max\{k_c, k_d\}$.

1) 当 $0 < k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq n$ 时,

$$b_{x_4(k_a)}^1(j)=\max\{b_{x_2(k_2), k_3}^{1\Delta}(j), b_{x_3(k_3)}^1(j)\}, \forall j \in [k_3], \quad (9)$$

$$b_{x_5(k_b)}^1(j)=\min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), b_{x_4(k_a), k_1}^1(j)\}, \forall j \in [k_1], \quad (10)$$

其中: $b_{x_2(k_2), k_3}^{1\Delta}(j)$ 满足当 $k_2=k_3$ 时, $b_{x_2(k_2), k_3}^{1\Delta}=b_{x_2(k_2)}^1$. 当 $k_2 < k_3$ 时,

$$b_{x_2(k_2), k_3}^{1\Delta}(j)=\begin{cases} 0, & j \in [k_3 - k_2]; \\ b_{x_2(k_2)}^1(j - k_3 + k_2), & j \in \{k_3 - k_2 + 1, k_3 - k_2 + 2, \dots, k_3\}. \end{cases} \quad (11)$$

由式(9)、(10)和(11)知对任意 $j \in [k_1], b_{x_5(k_b)}^1(j)=\min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), \max\{b_{x_2(k_2), k_1}^1(j), b_{x_3(k_3), k_1}^1(j)\}\}$. 此外, 对任意 $j \in [k_1], b_{x_6(k_c)}^1(j)=\min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), b_{x_2(k_2), k_1}^1(j)\}, b_{x_7(k_d)}^1(j)=\min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), b_{x_3(k_3), k_1}^1(j)\}$, 可以得到 $b_{x_8(k_e)}^1(j)=\max\{\min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), b_{x_2(k_2), k_1}^1(j)\}, \min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), b_{x_3(k_3), k_1}^1(j)\}\}$.

如果 $b_{x_1(k_1)}^1(j) \geq \max\{b_{x_2(k_2), k_1}^1(j), b_{x_3(k_3), k_1}^1(j)\}$, 那么 $b_{x_5(k_b)}^1(j)=\max\{b_{x_2(k_2), k_1}^1(j), b_{x_3(k_3), k_1}^1(j)\}=b_{x_8(k_e)}^1(j)$.

如果 $b_{x_1(k_1)}^1(j) < \max\{b_{x_2(k_2), k_1}^1(j), b_{x_3(k_3), k_1}^1(j)\}$, 则 $b_{x_5(k_b)}^1(j)=b_{x_1(k_1)}^1(j)=b_{x_8(k_e)}^1(j)$.

因此, $\mathbf{x}_1(k_1) \wedge (\mathbf{x}_2(k_2) \vee \mathbf{x}_3(k_3)) = (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_2(k_2)) \vee (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_3(k_3))$ 成立.

2) 当 $0 < k_1 \leq k_3 \leq k_2 \leq n$ 时,

$$b_{x_5(k_b)}^1(j)=\min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), \max\{b_{x_2(k_2), k_1}^1(j), b_{x_3(k_3), k_1}^1(j)\}\}, \forall j \in [k_1], \quad (12)$$

$$b_{x_8(k_e)}^1(j)=\max\{\min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), b_{x_2(k_2), k_1}^1(j)\}, \min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), b_{x_3(k_3), k_1}^1(j)\}\}, \forall j \in [k_1]. \quad (13)$$

由 1), 式(12)和(13)可得 $\mathbf{x}_1(k_1) \wedge (\mathbf{x}_2(k_2) \vee \mathbf{x}_3(k_3)) = (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_2(k_2)) \vee (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_3(k_3))$.

3) 当 $0 < k_3 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$ 时,

$$b_{x_5(k_b)}^1(j)=\min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), \max\{b_{x_2(k_2), k_1}^1(j), b_{x_3(k_3), k_1}^{1\Delta}(j)\}\}, \forall j \in [k_1], \quad (14)$$

$$b_{x_8(k_e)}^1(j)=\max\{\min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), b_{x_2(k_2), k_1}^1(j)\}, \min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), b_{x_3(k_3), k_1}^{1\Delta}(j)\}\}, \forall j \in [k_1]. \quad (15)$$

由 1), 式(14)和(15)可得 $\mathbf{x}_1(k_1) \wedge (\mathbf{x}_2(k_2) \vee \mathbf{x}_3(k_3)) = (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_2(k_2)) \vee (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_3(k_3))$.

4) 当 $0 < k_3 \leq k_2 \leq k_1 \leq n$ 时,

$$b_{x_5(k_b)}^1(j)=\min\{b_{x_1(k_1), k_2}^1(j), \max\{b_{x_2(k_2)}^1(j), b_{x_3(k_3), k_2}^{1\Delta}(j)\}\}, \forall j \in [k_2], \quad (16)$$

$$b_{x_8(k_e)}^1(j)=\max\{\min\{b_{x_1(k_1), k_2}^1(j), b_{x_2(k_2)}^1(j)\}, \min\{b_{x_1(k_1), k_2}^1(j), b_{x_3(k_3), k_2}^{1\Delta}(j)\}\}, \forall j \in [k_2]. \quad (17)$$

由 1), 式(16)和(17)可得 $\mathbf{x}_1(k_1) \wedge (\mathbf{x}_2(k_2) \vee \mathbf{x}_3(k_3)) = (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_2(k_2)) \vee (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_3(k_3))$.

5) 当 $0 < k_2 \leq k_1 \leq k_3 \leq n$ 时,

$$b_{x_5(k_b)}^1(j)=\min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), \max\{b_{x_2(k_2), k_1}^{1\Delta}(j), b_{x_3(k_3), k_1}^1(j)\}\}, \forall j \in [k_1], \quad (18)$$

$$b_{x_8(k_e)}^1(j)=\max\{\min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), b_{x_2(k_2), k_1}^{1\Delta}(j)\}, \min\{b_{x_1(k_1)}^1(j), b_{x_3(k_3), k_1}^1(j)\}\}, \forall j \in [k_1]. \quad (19)$$

由 1), 式(18)和(19)可得 $\mathbf{x}_1(k_1) \wedge (\mathbf{x}_2(k_2) \vee \mathbf{x}_3(k_3)) = (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_2(k_2)) \vee (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_3(k_3))$.

6) 当 $0 < k_2 \leq k_3 \leq k_1 \leq n$ 时,

$$b_{x_5(k_b)}^1(j)=\min\{b_{x_1(k_1), k_3}^1(j), \max\{b_{x_2(k_2), k_3}^{1\Delta}(j), b_{x_3(k_3)}^1(j)\}\}, \forall j \in [k_3], \quad (20)$$

$$b_{x_8(k_e)}^1(j)=\max\{\min\{b_{x_1(k_1), k_3}^1(j), b_{x_2(k_2), k_3}^{1\Delta}(j)\}, \min\{b_{x_1(k_1), k_3}^1(j), b_{x_3(k_3)}^1(j)\}\}, \forall j \in [k_3]. \quad (21)$$

由 1), 式(20)和(21)可得 $\mathbf{x}_1(k_1) \wedge (\mathbf{x}_2(k_2) \vee \mathbf{x}_3(k_3)) = (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_2(k_2)) \vee (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_3(k_3))$ 。

综上所述, $\mathbf{x}_1(k_1) \wedge (\mathbf{x}_2(k_2) \vee \mathbf{x}_3(k_3)) = (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_2(k_2)) \vee (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_3(k_3))$ 成立, 由定义 9, 偏序集 (X, \leq) 是分配格。 证毕

性质 5 偏序集 (X, \leq) 是模格。

证明 对任意的 $\mathbf{x}_1(k_1), \mathbf{x}_2(k_2), \mathbf{x}_3(k_3) \in X$, 下面分 2 种情形证明。

情形 1, 当 $0 \leq k_1 = k_2 = k_3 = k \leq n$ 时。

若 $k=0$, 结论显然成立。否则, 对任意的 $j \in [k]$, 令 $\mathbf{x}_4(k) = \mathbf{x}_1(k) \wedge \mathbf{x}_3(k)$, $\mathbf{x}_5(k) = \mathbf{x}_1(k) \wedge (\mathbf{x}_2(k) \vee \mathbf{x}_4(k))$, $\mathbf{x}_6(k) = (\mathbf{x}_1(k) \wedge \mathbf{x}_2(k)) \vee \mathbf{x}_4(k)$, 显然, $b_{\mathbf{x}_4(k)}^1(j) = \min \{b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j), b_{\mathbf{x}_3(k)}^1(j)\}$, $b_{\mathbf{x}_5(k)}^1(j) = \min \{b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j), \max \{b_{\mathbf{x}_2(k)}^1(j), b_{\mathbf{x}_4(k)}^1(j)\}\}$, $b_{\mathbf{x}_6(k)}^1(j) = \max \{\min \{b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j), b_{\mathbf{x}_2(k)}^1(j)\}, b_{\mathbf{x}_4(k)}^1(j)\}$ 。

对任意的 $j \in [k]$, 若 $b_{\mathbf{x}_2(k)}^1(j) \leq b_{\mathbf{x}_4(k)}^1(j)$, 则 $b_{\mathbf{x}_5(k)}^1(j) \leq b_{\mathbf{x}_6(k)}^1(j) \leq b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j)$ 。所以:

$$b_{\mathbf{x}_5(k)}^1(j) = \min \{b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j), b_{\mathbf{x}_4(k)}^1(j)\} = b_{\mathbf{x}_4(k)}^1(j), b_{\mathbf{x}_6(k)}^1(j) = \max \{b_{\mathbf{x}_2(k)}^1(j), b_{\mathbf{x}_4(k)}^1(j)\} = b_{\mathbf{x}_4(k)}^1(j)。$$

故 $b_{\mathbf{x}_5(k)}^1(j) = b_{\mathbf{x}_6(k)}^1(j)$, $\mathbf{x}_5(k) = \mathbf{x}_6(k)$ 。

若 $b_{\mathbf{x}_4(k)}^1(j) < b_{\mathbf{x}_2(k)}^1(j) \leq b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j)$, 则:

$$b_{\mathbf{x}_5(k)}^1(j) = \min \{b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j), b_{\mathbf{x}_2(k)}^1(j)\} = b_{\mathbf{x}_2(k)}^1(j), b_{\mathbf{x}_6(k)}^1(j) = \max \{b_{\mathbf{x}_2(k)}^1(j), b_{\mathbf{x}_4(k)}^1(j)\} = b_{\mathbf{x}_2(k)}^1(j)。$$

因此, $\mathbf{x}_5(k) = \mathbf{x}_6(k)$ 。

若 $b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j) < b_{\mathbf{x}_2(k)}^1(j)$, 则:

$$b_{\mathbf{x}_4(k)}^1(j) \leq b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j) < b_{\mathbf{x}_2(k)}^1(j)。$$

故 $b_{\mathbf{x}_5(k)}^1(j) = \min \{b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j), b_{\mathbf{x}_2(k)}^1(j)\} = b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j)$, $b_{\mathbf{x}_6(k)}^1(j) = \max \{b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j), b_{\mathbf{x}_4(k)}^1(j)\} = b_{\mathbf{x}_1(k)}^1(j)$ 。显然, $\mathbf{x}_5(k) = \mathbf{x}_6(k)$ 。

情形 2, 当 k_1, k_2, k_3 互不相等或恰两相等时, 由情形 1 和性质 4 的证明过程可知, 结论显然成立。

综上所述, $\mathbf{x}_1(k_1) \wedge (\mathbf{x}_2(k_2) \vee (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_3(k_3))) = (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_2(k_2)) \vee (\mathbf{x}_1(k_1) \wedge \mathbf{x}_3(k_3))$ 成立。由定义 10, 偏序集 (X, \leq) 是模格。 证毕

3 结论

本文基于位置关系的一类偏序建立了具故障或正常状态属性向量集的一些格序性质, 特别是利用定义证明了具状态属性向量集的有界、完备和分配等格序性质。本文的研究结果可对于大规模复杂电力系统状态空间的分解、状态筛选以及可靠性评估提供理论与方法支撑, 这也是后续研究的重要内容之一。

参考文献:

- [1] SAMANLIOGLU F. A multi-objective mathematical model for the industrial hazardous waste location-routing problem[J]. European Journal of Operational Research, 2013, 226(2): 332-340.
- [2] LI D, LI K. A multi-objective model for cold chain logistics considering customer satisfaction[J]. Alexandria Engineering Journal, 2023, 67: 513-523.
- [3] 赵克全, 杨新民, 夏远梅. 多目标优化问题的完全标量化[J]. 中国科学: 数学, 2021, 51(2): 411-424.
ZHAO K Q, YANG X M, XIA Y M. Complete scalarization of multi-objective optimization problems[J]. Science China Mathematics, 2021, 51(2): 411-424.
- [4] DEDEKIND R. Ueber die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe[J]. Mathematische Annalen, 1900, 53(3): 371-403.
- [5] SCHRÖDER E, LÜROTH J, MÜLLER K E. Vorlesungen über die algebra der logik[M]. Leipzig: B. G. Teubner, 1890.
- [6] BIRKHOFF G. Lattice theory[M]. Washington: American Mathematical Society, 1948.
- [7] 程林, 何剑. 电力系统可靠性原理和应用[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2015.
CHENG L, HE J. Principles and applications of power system reliability[M]. 2nd edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2015.
- [8] 赵克全, 刘美含, 夏远梅. 一类特殊向量集的偏序性质与最优性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2024, 41(4): 35-41.

- ZHAO K Q, LIU M H, XIA Y M. Partial order properties and optimality of a special class of vector sets[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2024, 41(4): 35-41.
- [9] 刘朗亭, 刘美含, 刘学文. 自然序下具权重信息电力系统状态空间的结构性质[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2025, 42(5): 42-50.
- LIU L T, LIU M H, LIU X W. Structural properties of state space of power systems with weighted information in natural order [J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science), 2025, 42(5): 42-50.
- [10] 刘宏升, 夏远梅, 赵克全. 具状态属性向量集的标量化方法与缩减性质[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2025, 42(2): 78-87.
- LIU H S, XIA Y M, ZHAO K Q. Scalarization method and reduction properties of vector sets with state attributes [J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science), 2025, 42(2): 78-87.
- [11] CHINCHULUUN A. Pareto optimality, game theory and equilibria[M]. New York: Springer, 2008.
- [12] 刘龙章. 完全分配格的内蕴式刻画与性质 P[J]. 模糊系统与数学, 1994, 8(1): 28-31.
- LIU L Z. Intrinsic characterization of completely distributive lattices and property P[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1994, 8(1): 28-31.
- [13] 马占新. 偏序集与数据包络分析[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- MA Z X. Partially ordered sets and data envelopment analysis[M]. Beijing: Science Press, 2013.
- [14] DAVEY B A, PRIESTLEY H A. Introduction to lattices and order [M]. 2nd edition. New York: Cambridge University Press, 2002.
- [15] GIERZ G, HOFMANN K H, KEIMEL K, et al. Continuous lattices and domains[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [16] 张昆龙, 宋丽霞. 格的子代数[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- ZHANG K L, SONG L X. Subalgebras of lattices[M]. Beijing: Science Press, 2017.

Operations Research and Cybernetics

Lattice Property for a Class of Vector Sets with Fault or Normal State Attributes

ZHANG Tong, WAN Xuan, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Study on the lattice order-related properties of a class of vector sets with state attributes. A lattice is a kind of special partially ordered set. The state space of a power system is abstracted as a class of vector sets with state attributes. Furthermore, under a class of partial orders based on positional relations, the lattice-order properties of this class of vector sets with state attributes are proven, including lattice, bounded lattice, complete lattice, and distributive lattice, and some examples are also provided to explain the main results. Research results can provide theoretical and methodological support for the effective partitioning of the state space of large-scale complex power systems, state screening for reliability assessment, and research on efficient algorithms.

Keywords: vector sets with state attributes; partial order; lattice properties

(责任编辑 陈 乔)