

线性双调和方程的超收敛有限点法*

刘颖, 李小林

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要: 提出并分析了一种超收敛有限点法,用于求解线性双调和方程。首先,将光滑导数引入移动最小二乘近似,构建了基于光滑梯度的超收敛有限点法来获得高精度和超收敛的数值结果。其次,通过局部截断误差分析,详细地研究了超收敛有限点法的理论精度。最后,通过数值实验验证了该方法的超收敛性及理论分析的正确性。

关键词: 有限点法; 移动最小二乘近似; 双调和方程; 超收敛性

中图分类号: O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2025)06-0094-10

基于网格的数值方法(如有限差分法和有限元法)在处理复杂几何问题时面临网格依赖等局限。无网格方法不依赖于网格单元,能有效克服这些局限。伽辽金无网格方法^[1-2]在实施过程中需要借助网格背景进行数值积分,并利用特殊方法来施加 Dirichlet 边界条件;而配点型无网格方法^[1,3]通过在散点上直接求解偏微分方程,避免了积分运算,实现了真正的无网格计算,简化了求解步骤。

有限点法(finite particle method, FPM)^[4]是一种典型的配点型无网格方法。该方法是基于移动最小二乘(moving least squares, MLS)近似来构造数值解,并利用配点技术将边值问题离散成代数系统。FPM 是真正的无网格方法,具有无需数值积分、易于编程、稀疏和带状的离散系统等特点。大量数值实验验证了 FPM 的有效性^[4-7]。然而, FPM 在计算时涉及无网格形函数的高阶导数,直接计算复杂的高阶导数会影响精度和收敛速度^[1,8]。为此,文献[8-9]提出了 MLS 近似的光滑导数,首先对标准一阶导数进行光滑处理来计算一阶光滑导数,然后对一阶光滑导数进行微分计算可得高阶光滑导数。文献[10-11]将光滑导数融入 FPM 中,建立了求解二阶椭圆边值问题和 Klein-Gordon 初边值问题的超收敛有限点法(superconvergent finite point method, SFPM),得到了超收敛的数值结果。

本文将 SFPM 的应用从二阶问题扩展到四阶问题,建立了 SFPM 求解四阶双调和问题的计算公式。通过局部截断误差分析,研究了 SFPM 和传统 FPM 求解四阶双调和问题时的理论精度。当基函数阶数 m 为奇数时,理论结果表明 SFPM 在 L^2 、 H^1 和 H^2 范数中的收敛速度为 $m-1$,在 H^3 范数中的收敛速度为 $m-2$,而传统 FPM 的收敛速度通常都为 $m-3$,因此 SFPM 在求解四阶双调和问题时仍然具有超收敛性质。

1 计算方法

考虑以下线性双调和方程:

$$\sum_{k,l=1}^2 a_{kkll} u_{,kkll} + \sum_{k,l=1}^2 b_{kkll} u_{,kkll} + \sum_{k,l=1}^2 c_{kl} u_{,kl} + \sum_{k=1}^2 \xi_k u_{,k} + \sigma u = f, \text{ 在 } \Omega \text{ 里}; \quad (1)$$

$$u = \bar{u}, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}; \quad (2)$$

$$\lambda_1 \Delta u + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}. \quad (3)$$

其中: $u(x)$ 是关于点 $x = (x_1, x_2)^T \in \Omega$ 的未知函数, $(\cdot)_{,k} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k}$, $(\cdot)_{,kl} = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_k \partial x_l}$, $(\cdot)_{,kkll} = \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x_k^2 \partial x_l^2}$ 和

* 收稿日期:2025-06-14 修回日期:2025-10-17 网络出版时间:2026-01-08T16:28

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11971085);重庆市自然科学基金重点项目(No. CSTB2022NSCQ-LZX0016);重庆市研究生科研创新项目(No. CYB240228)

第一作者简介:刘颖,女,研究方向为微分方程的数值解法,E-mail:2821226357@qq.com;通信作者简介:李小林,男,教授,博士生导师,E-mail:lxlmath@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20260108.1549.016

$(\cdot)_{,kkl} = \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x_k^2 \partial x_l^2}$ 表示不同的微分, $a_{kkl}(\mathbf{x}), b_{kkl}(\mathbf{x}), c_{kl}(\mathbf{x}), \xi_{,k}(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}), \bar{u}(\mathbf{x})$ 和 $\bar{q}(\mathbf{x})$ 是已知有界函数, λ_1 和 λ_2 的取值为 0 或 1, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2, \Omega$ 是边界为 $\Gamma = \partial\Omega$ 的平面域, $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = (n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x}))^T$ 是边界 Γ 上的单位外法向量。

1.1 MSL 近似及其光滑导数

函数 $u(\mathbf{x})$ 的 MLS 乘近似 $Mu(\mathbf{x})$ 可以表示为^[12]:

$$u(\mathbf{x}) \approx Mu(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \Lambda(\mathbf{x})} \Phi_i(\mathbf{x})d_i = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{x})d_i, \quad (4)$$

其中: $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ 是 $\Omega \cup \Gamma$ 上 N 个节点的集合, $\Lambda(\mathbf{x}) = \{I_1, I_2, \dots, I_r\} = \{1, 2, \dots, N\}$ 是一组影响域包括点 \mathbf{x} 的节点序号的集合, 节点系数 d_i 是节点函数值 $u(\mathbf{x}_i)$ 的近似, 形函数 $\Phi_i(\mathbf{x})$ 的表达式为:

$$\Phi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} p_j(\mathbf{x}) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_j) \mathbf{B}(\mathbf{x}_j)]_{jk}, & i = I_k \in \Lambda(\mathbf{x}) \\ 0, & i \notin \Lambda(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in \Lambda(\mathbf{x})} \omega_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i)^T, \mathbf{B}(\mathbf{x}) = [\omega_{I_1} \mathbf{p}(\mathbf{x}_{I_1}), \omega_{I_2} \mathbf{p}(\mathbf{x}_{I_2}), \dots, \omega_{I_r} \mathbf{p}(\mathbf{x}_{I_r})], \\ \omega_i(\mathbf{x}) &= \frac{\exp(-(|x_1 - x_{1i}|/h)^2) - \exp(-s_{1i}^2)}{1 - \exp(-s_{1i}^2)} \times \frac{\exp(-(|x_2 - x_{2i}|/h)^2) - \exp(-s_{2i}^2)}{1 - \exp(-s_{2i}^2)}, \\ \mathbf{p}(\mathbf{x}) &= [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_{\tilde{m}}(\mathbf{x})]^T. \end{aligned}$$

上述式中: $p_j(\mathbf{x})$ 是由单项式组成的 m 阶基函数, $\tilde{m} = (m+2)(m+1)/2$ 是基函数的个数, $\omega_i(\mathbf{x})$ 是高斯权函数, s_{1i} 和 s_{2i} 分别是 x_1 和 x_2 方向上的归一化支撑域半径。

根据文献[13], 对式(4)关于 x_k 求导可得 $u_{,k}(\mathbf{x}) = \partial u(\mathbf{x}) / \partial x_k$ 的近似:

$$u_{h,k}(\mathbf{x}) \approx Mu_{,k}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \Lambda(\mathbf{x})} \Phi_{i,k}(\mathbf{x})d_i, \quad k = 1, 2. \quad (5)$$

其中: $\Phi_{i,k}(\mathbf{x})$ 表示 $\Phi_i(\mathbf{x})$ 的一阶导数。根据式(4), 对 $Mu_{,k}(\mathbf{x})$ 进一步做 MLS 近似可得:

$$\begin{aligned} u_{h,k}(\mathbf{x}) \approx Mu_{,k}(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in \Lambda(\mathbf{x})} \Phi_j(\mathbf{x}) Mu_{,k}(\mathbf{x}_j) = \sum_{j \in \Lambda(\mathbf{x})} \sum_{i \in \Lambda(\mathbf{x}_j)} \Phi_j(\mathbf{x}) \Phi_{i,k}(\mathbf{x}_j) d_i = \\ &= \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \left[\sum_{j \in \Lambda(\mathbf{x})} \Phi_j(\mathbf{x}) \Phi_{i,k}(\mathbf{x}_j) \right] d_i = \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,k}(\mathbf{x}) d_i, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $\bar{\Lambda}(\mathbf{x}) = \bigcup_{j \in \Lambda(\mathbf{x})} \Lambda(\mathbf{x}_j)$, $\bar{\Phi}_{i,k}(\mathbf{x})$ 是 $\Phi_i(\mathbf{x})$ 的一阶光滑导数, 可以表示为:

$$\bar{\Phi}_{i,k}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \Lambda(\mathbf{x})} \Phi_j(\mathbf{x}) \Phi_{i,k}(\mathbf{x}_j), \quad i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x}).$$

对式(6)求导可得:

$$u_{h,kl}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kl}(\mathbf{x}) d_i, \quad u_{h,kkl}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x}) d_i, \quad u_{h,kkll}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}) d_i, \quad k, l = 1, 2. \quad (7)$$

其中: $\bar{\Phi}_{i,kl}(\mathbf{x}), \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x})$ 和 $\bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x})$ 分别是 $\Phi_i(\mathbf{x})$ 的二阶、三阶和四阶光滑导数, 可以表示为:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{i,kl}(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in \Lambda(\mathbf{x})} \Phi_{j,l}(\mathbf{x}) \Phi_{i,k}(\mathbf{x}_j), \quad \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \Lambda(\mathbf{x})} \Phi_{j,kl}(\mathbf{x}) \Phi_{i,k}(\mathbf{x}_j), \\ \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in \Lambda(\mathbf{x})} \Phi_{j,kll}(\mathbf{x}) \Phi_{i,k}(\mathbf{x}_j), \quad i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

1.2 无网格离散

把式(6)、(7)代入式(1)可得:

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^2 a_{kkl}(\mathbf{x}_j) \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x}_j) d_i + \sum_{k,l=1}^2 b_{kkl}(\mathbf{x}_j) \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x}_j) d_i + \sum_{k,l=1}^2 c_{kl}(\mathbf{x}_j) \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i,kl}(\mathbf{x}_j) d_i + \\ \sum_{k=1}^2 \xi_k(\mathbf{x}_j) \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i,k}(\mathbf{x}_j) d_i + \sigma(\mathbf{x}_j) \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \Phi_i(\mathbf{x}_j) d_i = f(\mathbf{x}_j), \quad \mathbf{x}_j \in \Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

其中: $\Lambda_j = \Lambda(\mathbf{x}_j), \bar{\Lambda}_j = \bar{\Lambda}(\mathbf{x}_j)$ 。将式(4)代入式(2)可得:

$$\sum_{i \in \Lambda_j} \Phi_i(\mathbf{x}_j) d_i = \bar{u}(\mathbf{x}_j), \quad \mathbf{x}_j \in \Gamma. \quad (9)$$

将式(5)代入式(3)可得:

$$\lambda_1 \sum_{k=1}^2 \sum_{i \in \Lambda_j} \Phi_{i,kk}(\mathbf{x}_j) d_i + \lambda_2 \sum_{k=1}^2 \sum_{i \in \Lambda_j} n_k(\mathbf{x}_j) \Phi_{i,k}(\mathbf{x}_j) d_i = \bar{q}(\mathbf{x}_j), \mathbf{x}_j \in \Gamma. \quad (10)$$

由式(8)~(10), SFPM 求解式(1)~(3)中线性双调和方程的无网格离散代数系统为:

$$\mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{b}, \quad (11)$$

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_N)^T, [\mathbf{b}]_j = \begin{cases} f(\mathbf{x}_j), \mathbf{x}_j \in \Omega \\ \bar{u}(\mathbf{x}_j), \mathbf{x}_j \in \Gamma \\ \bar{q}(\mathbf{x}_j), \mathbf{x}_j \in \Gamma \end{cases}$$

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \begin{cases} \sum_{k,l=1}^2 a_{kkll}(\mathbf{x}_j) \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}_j) + \sum_{k,l=1}^2 b_{kkll}(\mathbf{x}_j) \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}_j) + \sum_{k,l=1}^2 c_{kl}(\mathbf{x}_j) \bar{\Phi}_{i,kl}(\mathbf{x}_j) + \\ \sum_{k=1}^2 \xi_k(\mathbf{x}_j) \bar{\Phi}_{i,k}(\mathbf{x}_j) + \sigma(\mathbf{x}_j) \Phi_i(\mathbf{x}_j), \mathbf{x}_j \in \Omega \\ \Phi_i(\mathbf{x}_j), \mathbf{x}_j \in \Gamma \\ \lambda_1 \sum_{k=1}^2 \Phi_{i,kk}(\mathbf{x}_j) + \lambda_2 \sum_{k=1}^2 n_k(\mathbf{x}_j) \Phi_{i,k}(\mathbf{x}_j), \mathbf{x}_j \in \Gamma \end{cases}, i = 1, 2, \dots, N.$$

2 精度分析

根据文献[8-11,14],可以通过计算离散方程的局部截断误差来研究无网格配点法的精度。将式(11)中的数值解 d_i 替换为式(1)~(3)中线性双调和方程的精确解 $u_i = u(\mathbf{x}_i)$, 可得 SFPM 的局部截断误差为:

$$e^S = \sum_{i=1}^N [\mathbf{A}]_{ij} u_i - f(\mathbf{x}_j).$$

由式(1)、(11)可得:

$$\begin{aligned} e^S &= \sum_{k,l=1}^2 a_{kkll}(\mathbf{x}_j) \left[\sum_{i \in \Lambda_j} \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}_j) u_i - \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l^2} \right] + \sum_{k,l=1}^2 b_{kkll}(\mathbf{x}_j) \left[\sum_{i \in \Lambda_j} \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}_j) u_i - \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l} \right] + \\ &\sum_{k,l=1}^2 c_{kl}(\mathbf{x}_j) \left[\sum_{i \in \Lambda_j} \bar{\Phi}_{i,kl}(\mathbf{x}_j) u_i - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} \right] + \sum_{k=1}^2 \xi_k(\mathbf{x}_j) \left[\sum_{i \in \Lambda_j} \bar{\Phi}_{i,k}(\mathbf{x}_j) u_i - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] + \sigma(\mathbf{x}_j) \left[\sum_{i \in \Lambda_j} \Phi_i(\mathbf{x}_j) u_i - u_j \right] = \\ &\sigma(\mathbf{x}_j) e_0^S + \sum_{k=1}^2 \xi_k(\mathbf{x}_j) e_{1k}^S + \sum_{k,l=1}^2 c_{kl}(\mathbf{x}_j) e_{2kl}^S + \sum_{k,l=1}^2 b_{kkll}(\mathbf{x}_j) e_{3kkll}^S + \sum_{k,l=1}^2 a_{kkll}(\mathbf{x}_j) e_{4kkll}^S, \end{aligned} \quad (12)$$

其中: $\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j}$, $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j}$, $\frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l} = \frac{\partial^3 u(\mathbf{x})}{\partial x_k^2 \partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j}$ 和 $\frac{\partial^4 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l^2} = \frac{\partial^4 u(\mathbf{x})}{\partial x_k^2 \partial x_l^2} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i})^T$ 。根据式(12)可得:

$$e_0^S = \sum_{i \in \Lambda_j} \Phi_i(\mathbf{x}_j) u_i - u_j, \quad (13)$$

$$e_{1k}^S = \sum_{i \in \Lambda_j} \bar{\Phi}_{i,k}(\mathbf{x}_j) u_i - \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad (14)$$

$$e_{2kl}^S = \sum_{i \in \Lambda_j} \bar{\Phi}_{i,kl}(\mathbf{x}_j) u_i - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}, \quad (15)$$

$$e_{3kkll}^S = \sum_{i \in \Lambda_j} \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}_j) u_i - \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l}, \quad (16)$$

$$e_{4kkll}^S = \sum_{i \in \Lambda_j} \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}_j) u_i - \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l^2}. \quad (17)$$

2.1 MLS 形函数及其光滑导数的性质

为了分析 SFPM 的误差,需要应用 MLS 形函数 $\Phi_i(\mathbf{x})$ 及其光滑导数 $\bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x})$ 和 $\bar{\Phi}_{i,kl}(\mathbf{x})$ 的一些性质。由文献[12-13]可得:

$$\Phi_{i,kkll}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(h^{-3}), \bar{\Phi}_{i,kl}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(h^{-4}), i \in \Lambda(\mathbf{x}), k, l = 1, 2;$$

$$\bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(h^{-3}), \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(h^{-4}), i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x}), k, l = 1, 2. \tag{18}$$

其中: $h = \max_{1 \leq j \leq N} \min_{1 \leq i \leq N, j \neq i} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ 为节点间距。根据文献[3,8-9,14]可得:

$$\sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x}_j)(x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{m+2-s} = 0, m \text{ 为偶数}; \tag{19}$$

$$\sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}_j)(x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{m+2-s} = 0, m \text{ 为奇数}. \tag{20}$$

其中: $s = 0, 1, \dots, m+2$ 。

根据文献[15],光滑导数 $\bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x})$ 和 $\bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x})$ 具有以下再生性质:

$$\begin{cases} \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_i) = p_{j,kkl}(\mathbf{x}) \\ \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_i) = p_{j,kkll}(\mathbf{x}) \end{cases}, j = 1, 2, \dots, \tilde{m}; k, l = 1, 2.$$

从而有:

$$\begin{cases} \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) = p_{j,kkl}(\mathbf{0}) \\ \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) = p_{j,kkll}(\mathbf{0}) \end{cases}, j = 1, 2, \dots, \tilde{m}; k, l = 1, 2.$$

令 δ_{ij} 或者 $\delta_{i,j}$ 表示一般的 δ 函数,则由上式可得:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x})(x_{1i} - x_1)^s (x_{2i} - x_2)^{n-s} = \\ & \left. \begin{cases} 6\delta_{3n}\delta_{0,n-s} = 6\delta_{3n}\delta_{l+2k-3,n-s}, k = l = 1 \\ 2\delta_{3n}\delta_{1,n-s} = 2\delta_{3n}\delta_{l+2k-3,n-s}, k = 1, l = 2 \\ 2\delta_{3n}\delta_{2,n-s} = 2\delta_{3n}\delta_{l+2k-3,n-s}, k = 2, l = 1 \\ 6\delta_{3n}\delta_{3,n-s} = 6\delta_{3n}\delta_{l+2k-3,n-s}, k = l = 2 \end{cases} \right\} = 2(1 + 2\delta_{kl})\delta_{3n}\delta_{l+2k-3,3-s}, 0 \leq s \leq n \leq m; \tag{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x})(x_{1i} - x_1)^s (x_{2i} - x_2)^{n-s} = \\ & \left. \begin{cases} 24\delta_{4n}\delta_{4s}, k = l = 1 \\ 4\delta_{4n}\delta_{2s}, k \neq l \\ 24\delta_{4n}\delta_{0s}, k = l = 2 \end{cases} \right\} = 4(1 + 5\delta_{kl})\delta_{4n}\delta_{[4\delta_{k1}\delta_{l1}+2(1-\delta_{kl})],s}, 0 \leq s \leq n \leq m. \tag{22} \end{aligned}$$

根据文献[13],光滑导数 $\bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x})$ 和 $\bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x})$ 都具有比基函数阶数高一阶的额外再生性,即:

$$\sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}_i) = p_{,kkl}(\mathbf{x}), \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}_i) = p_{,kkll}(\mathbf{x}). \tag{23}$$

其中: $p(\mathbf{x})$ 是阶数为 $m+1$ 的任意多项式。由式(23)可得:

$$\sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) = p_{,kkl}(\mathbf{0}), \sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) = p_{,kkll}(\mathbf{0}).$$

联立式(21)~(23)得到:

$$\sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x})(x_{1i} - x_1)^s (x_{2i} - x_2)^{m+1-s} = 2(1 + 2\delta_{kl})\delta_{2m}\delta_{l+2k-3,3-s}, 0 \leq s \leq n \leq m+1; \tag{24}$$

$$\sum_{i \in \bar{\Lambda}(\mathbf{x})} \bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x})(x_{1i} - x_1)^s (x_{2i} - x_2)^{m+1-s} = 4(1 + 5\delta_{kl})\delta_{3m}\delta_{[4\delta_{k1}\delta_{l1}+2(1-\delta_{kl})],s}, 0 \leq s \leq n \leq m+1. \tag{25}$$

2.2 SFPM 的局部截断误差

为了分析式(13)~(17)中的误差,函数 $u(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i})^T$ 处关于点 $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, x_{2j})^T$ 的泰勒展开式为:

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} (x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s}. \tag{26}$$

其中: $\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!(n-s)!}$ 。

首先,为了分析式(16)中 e_{3kkl}^S 的误差,将式(26)代入式(19)得到:

$$e_{3kkl}^S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x}_j)(x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s} - \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l}. \tag{27}$$

当 $m \geq 2$ 时,由式(24)可得:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{m+1} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i, kkl}(\mathbf{x}_j) (x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s} = \\ & \sum_{n=0}^{m+1} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} 2(1 + 2\delta_{kl}) \delta_{l+2k-3, 3-s} = \frac{1}{3!} \sum_{s=0}^3 \binom{3}{s} \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{3-s}} 2(1 + 2\delta_{kl}) \delta_{l+2k-3, 3-s} = \\ & \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_2^3} 2(1 + 2\delta_{kl}) \delta_{l+2k-3, 3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_1 \partial x_2^2} 2(1 + 2\delta_{kl}) \delta_{l+2k-3, 2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_1^2 \partial x_2} 2(1 + 2\delta_{kl}) \delta_{l+2k-3, 1} + \\ & \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_1^3} 2(1 + 2\delta_{kl}) \delta_{l+2k-3, 0} = \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l}, k, l = 1, 2. \end{aligned}$$

注意到式(19),由式(27)可得:

$$e_{3kkl}^S = \begin{cases} \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i, kkl}(\mathbf{x}_j) (x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s} - \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l}, m = 1; \\ \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i, kkl}(\mathbf{x}_j) (x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s}, m \text{ 为奇数且 } m \geq 3; \\ \sum_{n=m+3}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i, kkl}(\mathbf{x}_j) (x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s}, m \text{ 为偶数且 } m \geq 2. \end{cases}$$

因此,在 $i \in \bar{\Lambda}_j$ 上,利用式(18)和 $(x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s} = O(h^n)$,可得:

$$e_{3kkl}^S = \begin{cases} \mathcal{O}(h^m), m \text{ 为偶数} \\ \mathcal{O}(h^{m-1}), m \text{ 为奇数} \end{cases}, k, l = 1, 2. \tag{28}$$

其次,为了分析式(17)中的误差 e_{4kkl}^S ,将式(26)代入式(17)得到:

$$e_{4kkl}^S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i, kkl}(\mathbf{x}_j) (x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s} - \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l^2}. \tag{29}$$

当 $m \geq 3$ 时,由式(25)可得:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{m+1} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i, kkl}(\mathbf{x}_j) (x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s} = \\ & \sum_{n=0}^{m+1} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} 4(1 + 5\delta_{kl}) \delta_{[4\delta_{k1}\delta_{l1}+2(1-\delta_{kl})], s} = \frac{1}{4!} \sum_{s=0}^4 \binom{4}{s} \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{4-s}} 4(1 + 5\delta_{kl}) \delta_{[4\delta_{k1}\delta_{l1}+2(1-\delta_{kl})], s} = \\ & \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_2^4} 4(1 + 5\delta_{kl}) \delta_{[4\delta_{k1}\delta_{l1}+2(1-\delta_{kl})], 0} + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_1 \partial x_2^3} 4(1 + 5\delta_{kl}) \delta_{[4\delta_{k1}\delta_{l1}+2(1-\delta_{kl})], 1} + \\ & \frac{1}{4} \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} 4(1 + 5\delta_{kl}) \delta_{[4\delta_{k1}\delta_{l1}+2(1-\delta_{kl})], 2} + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_1^3 \partial x_2} 4(1 + 5\delta_{kl}) \delta_{[4\delta_{k1}\delta_{l1}+2(1-\delta_{kl})], 3} + \\ & \frac{1}{24} \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_1^4} 4(1 + 5\delta_{kl}) \delta_{[4\delta_{k1}\delta_{l1}+2(1-\delta_{kl})], 4} = \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l^2}, k, l = 1, 2. \end{aligned}$$

注意到式(20),由式(29)可得:

$$e_{4kkl}^S = \begin{cases} \sum_{n=m+3}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i, kkl}(\mathbf{x}_j) (x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s} - \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l^2}, 1 \leq m \leq 2; \\ \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i, kkl}(\mathbf{x}_j) (x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s}, m \text{ 为偶数且 } m \geq 4; \\ \sum_{n=m+3}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{\partial^n u_j}{\partial x_1^s \partial x_2^{n-s}} \sum_{i \in \bar{\Lambda}_j} \bar{\Phi}_{i, kkl}(\mathbf{x}_j) (x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s}, m \text{ 为奇数且 } m \geq 3. \end{cases}$$

因此,在 $i \in \bar{\Lambda}_j$ 上,利用式(18)和 $(x_{1i} - x_{1j})^s (x_{2i} - x_{2j})^{n-s} = O(h^n)$,可得:

$$e_{4kkl}^S = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{m-2}), m \text{ 为偶数} \\ \mathcal{O}(h^{m-1}), m \text{ 为奇数} \end{cases}, k, l = 1, 2. \tag{30}$$

由文献[10]可得 e_0^S, e_{1k}^S 和 e_{2kl}^S , 公式如下:

$$e_0^S = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{m+2}), m \text{ 为偶数} \\ \mathcal{O}(h^{m+1}), m \text{ 为奇数} \end{cases}, e_{1k}^S = \begin{cases} \mathcal{O}(h^m), m \text{ 为偶数} \\ \mathcal{O}(h^{m+1}), m \text{ 为奇数} \end{cases}, e_{2kl}^S = \begin{cases} \mathcal{O}(h^m), m \text{ 为偶数} \\ \mathcal{O}(h^{m+1}), m \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (31)$$

其中: $k, l=1, 2$.

将式(28)、(30)和(31)代入式(12), 利用 $a_{kkll}(\mathbf{x}_j), b_{kkl}(\mathbf{x}_j), c_{kl}(\mathbf{x}_j), \xi_k(\mathbf{x}_j)$ 和 $\sigma(\mathbf{x}_j)$ 的有界性, 则 SFPM 的局部截断误差为:

$$e^S = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{m-2}), m \text{ 为偶数}; \\ \mathcal{O}(h^{m-1}), m \text{ 为奇数}. \end{cases} \quad (32)$$

2.3 SFPM 的误差

根据文献[16], SFPM 在 H^k 范数下的误差可以表示为:

$$e_k(u) \approx \max \{e^S, e_k^M\}, k=0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

其中: e_k^M 是 MLS 近似在 H^k 范数下的误差。根据文献[12-13]可得:

$$e_k^M = \mathcal{O}(h^{m-k+1}). \quad (34)$$

由式(32)~(34)可得 SFPM 在 L^2, H^1, H^2 和 H^3 范数下的误差为:

$$e_k(u) \approx \max \{e^S, e_k^M\} = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{m-2}), m \text{ 为偶数} \\ \mathcal{O}(h^{m-1}), m \text{ 为奇数} \end{cases}, k=0, 1, 2; \quad (35)$$

$$e_3(u) \approx \max \{e^S, e_3^M\} = \mathcal{O}(h^{m-2}), \text{对任意的 } m. \quad (36)$$

2.4 SFPM 和传统 FPM 的精度比较

将式(12)中的 $\bar{\Phi}_{i,kkll}(\mathbf{x}_j), \bar{\Phi}_{i,kkl}(\mathbf{x}_j), \bar{\Phi}_{i,kl}(\mathbf{x}_j)$ 和 $\bar{\Phi}_{i,k}(\mathbf{x}_j)$ 分别替换为 $\Phi_{i,kkll}(\mathbf{x}_j), \Phi_{i,kkl}(\mathbf{x}_j), \Phi_{i,kl}(\mathbf{x}_j)$ 和 $\Phi_{i,k}(\mathbf{x}_j)$, 即可得到双调和问题的传统 FPM 的计算公式, 与式(28)、(30)和(31)类似, 可以验证:

$$\sum_{i \in \Lambda_j} \Phi_{i,k}(\mathbf{x}_j) u_i - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \begin{cases} \mathcal{O}(h^m), m \text{ 为偶数} \\ \mathcal{O}(h^{m+1}), m \text{ 为奇数} \end{cases}, \sum_{i \in \Lambda_j} \Phi_{i,kl}(\mathbf{x}_j) u_i - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} = \begin{cases} \mathcal{O}(h^m), m \text{ 为偶数} \\ \mathcal{O}(h^{m-1}), m \text{ 为奇数} \end{cases},$$

$$\sum_{i \in \Lambda_j} \Phi_{i,kkl}(\mathbf{x}_j) u_i - \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l} = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{m-2}), m \text{ 为偶数} \\ \mathcal{O}(h^{m-1}), m \text{ 为奇数} \end{cases}, \sum_{i \in \Lambda_j} \Phi_{i,kkll}(\mathbf{x}_j) u_i - \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_k^2 \partial x_l^2} = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{m-2}), m \text{ 为偶数} \\ \mathcal{O}(h^{m-3}), m \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

然后, 根据式(33)和(34), 传统 FPM 求解双调和问题的误差:

$$e_k(u) = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{m-2}), m \text{ 为偶数} \\ \mathcal{O}(h^{m-3}), m \text{ 为奇数} \end{cases}, k=0, 1, 2, 3. \quad (37)$$

式(35)~(37)给出了 SFPM 和传统 FPM 的精度结果。表 1 比较了 SFPM 和 FPM 的精度。当基函数次数为偶数时, SFPM 和 FPM 的收敛速度相同, 在 L^2 和 $H^k (1 \leq k \leq 3)$ 范数下的收敛速度均为 $m-2$; 当基函数的阶数为奇数时, SFPM 和 FPM 的收敛速度在 L^2, H^1 和 H^2 范数下均为 $m-3$ 和 $m-1$, 在 H^3 范数下, SFPM 的收敛速度为 $m-2$, 传统的 FPM 的收敛速度为 $m-3$ 。因此, 对于奇数阶基函数, SFPM 在 L^2 和 $H^k (1 \leq k \leq 3)$ 范数下具有超收敛特性。

表 1 SFPM 和 FPM 的精度比较

Tab. 1 Accuracy comparison for SFPM and traditional FPM

| 基函数的次数 m | 方法 | L^2 误差 | H^1 误差 | H^2 误差 | H^3 误差 |
|------------|------|----------|----------|----------|----------|
| m 为偶数 | FPM | $m-2$ | $m-2$ | $m-2$ | $m-2$ |
| | SFPM | $m-2$ | $m-2$ | $m-2$ | $m-2$ |
| m 为奇数 | FPM | $m-3$ | $m-3$ | $m-3$ | $m-3$ |
| | SFPM | $m-1$ | $m-1$ | $m-1$ | $m-2$ |

3 数值结果

本节通过一些数值算例来说明 SFPM 的收敛速度, 并验证理论结果。采用了三次基函数 ($m=3$) 和四次基函数 ($m=4$), 其中归一化支撑域半径为 $m+0.5$ 。分别用 $e_0(u), e_1(u)$ 和 $e_2(u)$ 表示函数 u 在 L^2, H^1 和 H^2 范数下的误差。

3.1 算例 1

考虑如下双调和问题:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = f(x), x \in \Omega; \\ u(x) = \bar{u}(x), \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = \bar{q}(x), x \in \Gamma. \end{cases}$$

其中: $\Omega = [-5, 5] \times [0, 10]$, $f(x)$, $\bar{u}(x)$ 和 $\bar{q}(x)$ 是已知函数, 解析解为 $u(x) = \sin(\pi x_1/10) \sin(\pi x_2/10)$ 。

图 1 给出了 FPM 和 SFPM 在 $m=4$ 和节点间距 $h=1$ 时在直线 $x_2=x_1$ 上的解析解 u 、数值解 u_h 和误差 $|u-u_h|$ 。可以看出, 2 种方法的解析解与数值解十分吻合, 但是 SFPM 的误差小于 FPM 的误差。

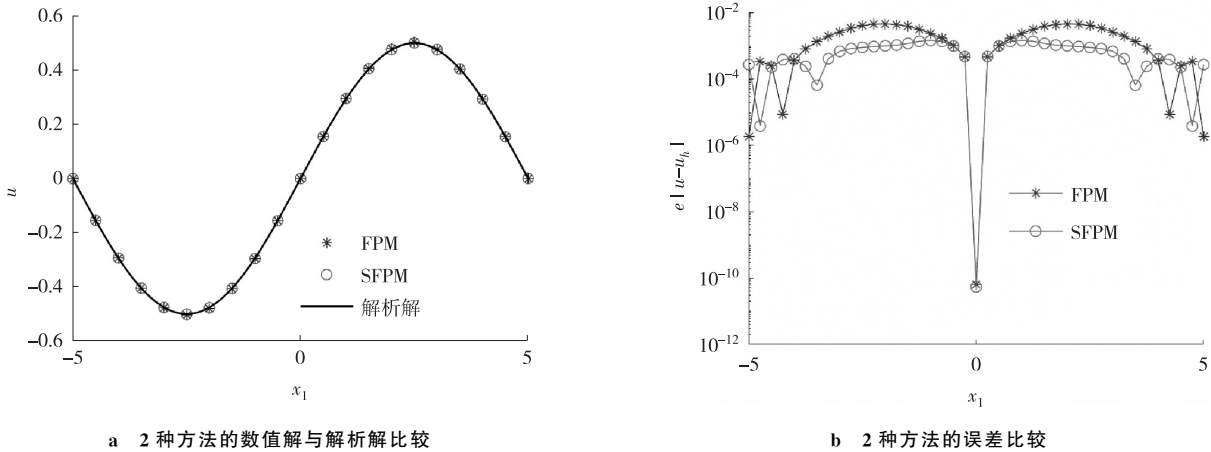


图 1 例 1 中的函数 u 在直线 $x_2=x_1$ 上的数值解和误差

Fig. 1 Numerical solution and error of u along the line $x_2=x_1$ for Example 1

图 2 和图 3 分别是三次基 ($m=3$) 和四次基 ($m=4$) 时 FPM 和 SFPM 的收敛结果。在 $m=3$ 时, SFPM 在 L^2, H^1 和 H^2 范数下均收敛且收敛速度约为 2, FPM 在 L^2, H^1 和 H^2 下均不收敛。在 $m=4$ 时, FPM 和 SFPM 的收敛速度相同, 均约为 2。这些实验收敛速度与表 1 中的理论预测一致。特别地, 在 $m=3$ 时, 传统 FPM 不收敛, 而本文 SFPM 在所有范数下均收敛, 得到了预期的超收敛结果。

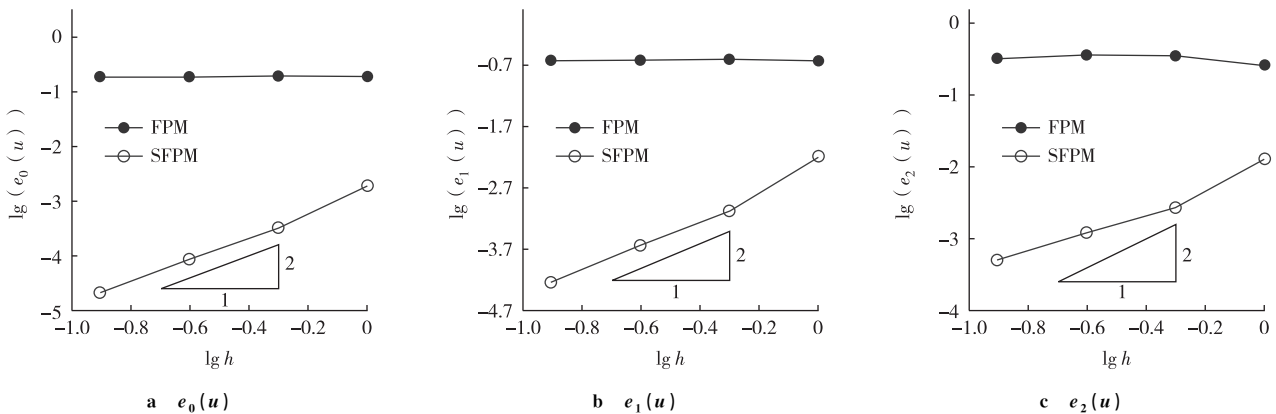


图 2 例 1 中 SFPM 和 FPM 在三次基 ($m=3$) 时的收敛情况

Fig. 2 Convergence of the FPM and the SFPM for Example 1 by cubic basis function ($m=3$)

3.2 算例 2

考虑如下变系数线性双调和问题:

$$\Delta^2 u(x) - 2 \left[(1 + e^{x_1} \cos x_2) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + 2(1 + \cos x_1 \sin x_2) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + (1 + e^{x_1} \sin x_2) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \right] = f(x), x \in \Omega, \tag{38}$$

$$u(x) = \cos x_1 \cos x_2, \Delta u(x) = -2 \cos x_1 \cos x_2, x \in \Gamma.$$

其中: $\Omega = (-0.5\pi, 0.5\pi)^2$, $f(x)$ 是已知函数, 解析解为 $u(x) = \cos x_1 \cos x_2$ 。

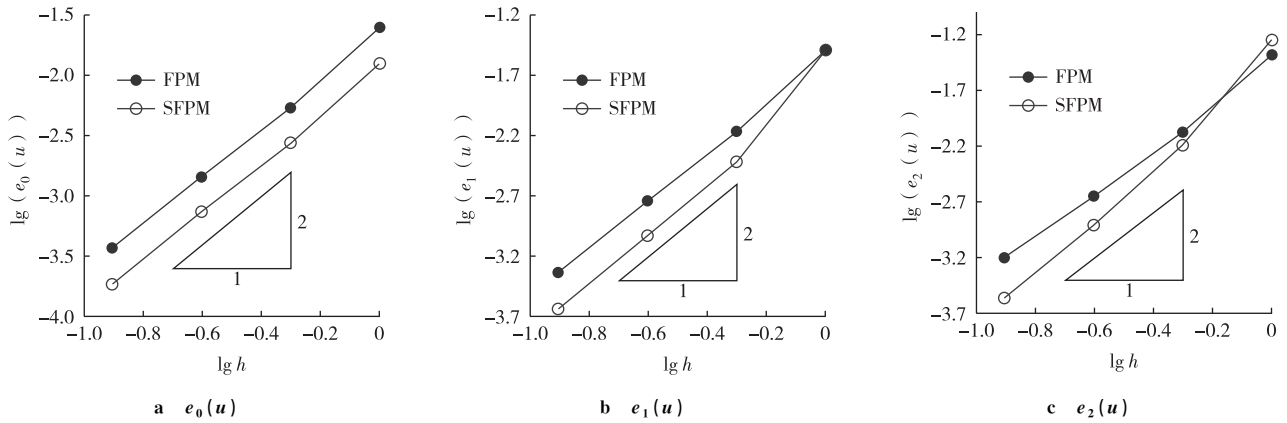
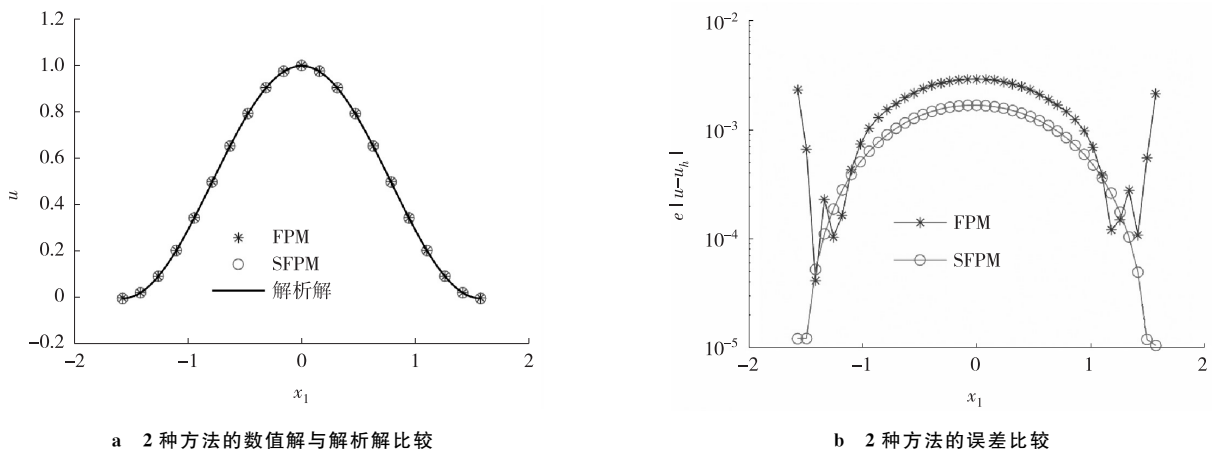


图 3 例 1 中 SFPM 和 FPM 在四次基 ($m=4$) 时的收敛情况

Fig. 3 Convergence of the FPM and the SFPM for Example 1 by quartic basis function ($m=4$)

图 4 给出了 FPM 和 SFPM 在 $m=4$ 和 $h=\frac{\pi}{40}$ 时在直线 $x_2=x_1$ 上的解析解 u 、数值解 u_h 和误差 $|u-u_h|$ 。

同样,这 2 种方法的解析解与数值解一致且 SFPM 的误差更小。



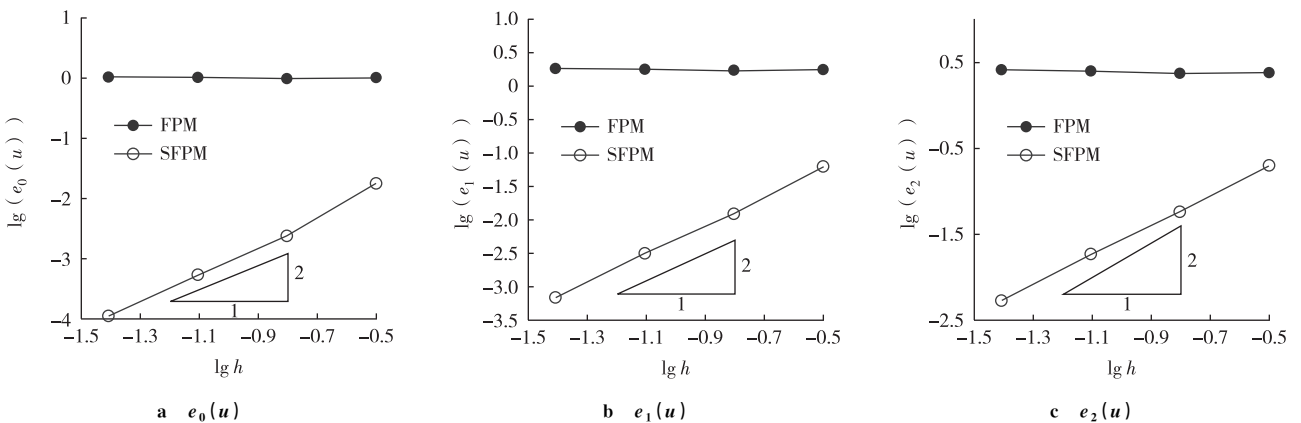
a 2 种方法的数值解与解析解比较

b 2 种方法的误差比较

图 4 例 2 中的函数 u 在直线 $x_2=x_1$ 上的数值解和误差

Fig. 4 Numerical solution and error of u along the line $x_2=x_1$ for Example 2

图 5 和图 6 比较了 FPM 和 SFPM 在 $m=3$ 和 4 时的收敛情况。当 $m=3$ 时,图 5 表明传统 FPM 在 L^2, H^1 和 H^2 范数下是不收敛的,而 SFPM 在这 3 种范数下的收敛速度均约为 2。当 $m=4$ 时,图 6 表明 FPM 和 SFPM 的实验收敛速度在 L^2, H^1 和 H^2 范数下都约为 2。这些实验收敛率与表 1 中的理论收敛率是一致的。



a $e_0(u)$

b $e_1(u)$

c $e_2(u)$

图 5 例 2 中 SFPM 和 FPM 在三次基 ($m=3$) 时的收敛情况

Fig. 5 Convergence of the FPM and the SFPM for Example 2 by cubic basis function ($m=3$)

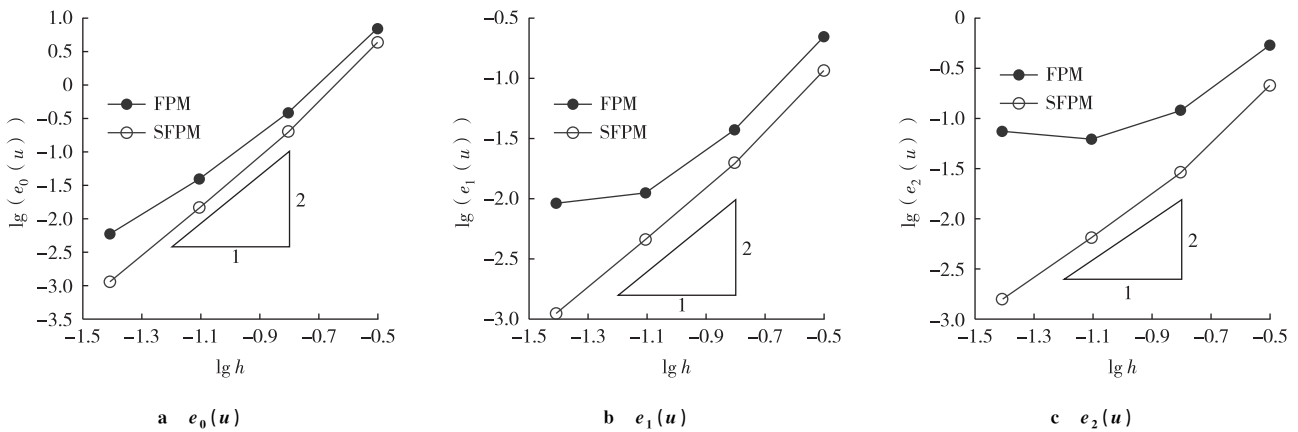


图 6 例 2 中 SFPM 和 FPM 在四次基 ($m=4$) 时的收敛情况

Fig. 6 Convergence of the FPM and the SFPM for Example 2 by quartic basis function ($m=4$)

3.3 算例 3

在算例 2 的控制方程(38)基础上,本算例考虑混合边界条件情况,即:

$$u(x) = \cos x_1 \cos x_2, \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \bar{q}(x), x \in \Gamma.$$

其中 $\bar{q}(x)$ 是已知函数,解析解为 $u(x) = \cos x_1 \cos x_2$ 。

为了展示 SFPM 处理复杂区域问题的能力,本算例选取了以下不规则区域(Amoeba 形区域):

$$\Omega = \{(\rho, \theta) : \rho \leq e^{\sin \theta} \sin^2(2\theta) + e^{\cos \theta} \cos^2(2\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

图 7 展示了采用四次基函数 ($m=4$) 的 SFPM 所得到的解析解 u 、数值解 u_h 以及误差 $|u - u_h|$ 。显然,尽管本算例采用了更为复杂的几何区域,所提出的 SFPM 在所有情况下仍能取得良好的数值结果。

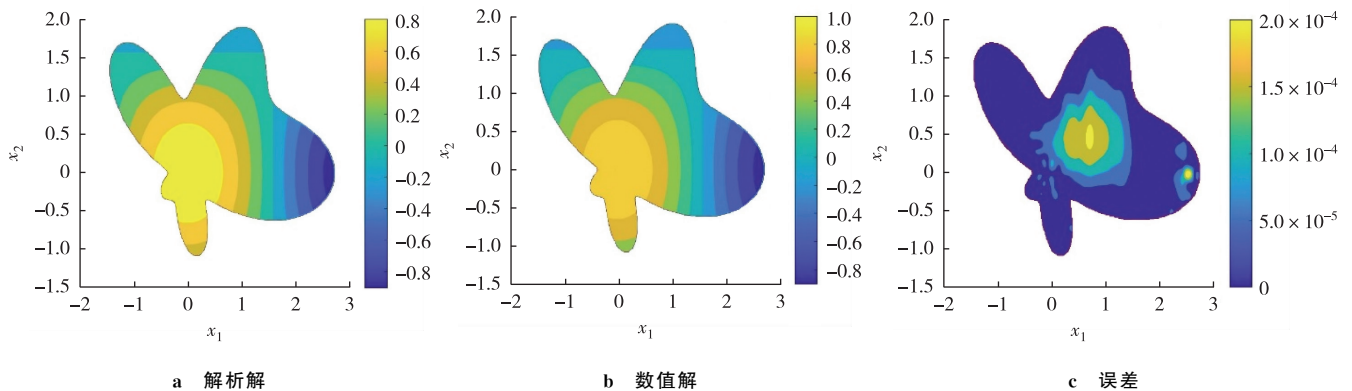


图 7 例 4 在 amoeba 形区域中采用个 543 节点的 SFPM 得到的解析解 u 、数值解 u_h 和误差 $|u - u_h|$

Fig. 7 Analytical solution u , numerical solution u_h , and the error $|u - u_h|$ obtained by the SFPM with 543 nodes for Example 4 in an amoeba-like domain

4 结论

本文提出并分析了一种求解双调和方程的 SFPM。将光滑导数引入 FPM 中, SFPM 提高了 FPM 的精度和收敛性。从理论结果可以看出,对于奇数阶基函数, SFPM 在 L^2, H^1 和 H^2 范数下的收敛速率都比 FPM 高两阶。数值算例验证了所提方法的有效性和理论结果的正确性。数值结果表明, SFPM 不仅在 L^2, H^1 和 H^2 范数下都具有超收敛性质,而且比 FPM 具有更高的精度和收敛速度。特别地,即使在复杂几何区域中, SFPM 依然表现出良好的适应性和稳定的数值性能。因此,该算法是一种无网格的超收敛算法,为无网格技术在高阶偏微分方程中的求解提供了新的思路。将 SFPM 从二维问题扩展至三维复杂几何域具有广阔的研究前景,而如何有效实现则有待进一步研究。

参考文献:

- [1] BELYTSCHKO T, CHEN J S, HILLMAN M. Meshfree and particle methods; fundamentals and applications[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2024.
- [2] 程玉民. 无网格方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
CHENG Y M. Meshless method[M]. Beijing: Science Press, 2015.
- [3] WANG L H, LIU Y J, ZHOU Y T, et al. A gradient reproducing kernel based stabilized collocation method for the static and dynamic problems of thin elastic beams and plates[J]. Computational Mechanics, 2021, 68(4): 709-739.
- [4] OÑATE E, IDELSOHN S, ZIENKIEWICZ O C, et al. A finite point method in computational mechanics applications to convective transport and fluid flow[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39(22): 3839-3866.
- [5] SHIRZADI M, DEHGHAN M, BASTANI A F. Optimal uniform error estimates for moving least-squares collocation with application to option pricing under jump-diffusion processes[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2021, 37(1): 98-117.
- [6] ORTEGA E, FLORES R, OÑATE E, et al. A-posteriori error estimation for the finite point method with applications to compressible flow[J]. Computational Mechanics, 2017, 60(2): 219-233.
- [7] LI X L, LI S L. A finite point method for the fractional cable equation using meshless smoothed gradients[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2022, 134: 453-465.
- [8] WANG D D, WANG J R, WU J C. Superconvergent gradient smoothing meshfree collocation method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 340: 728-766.
- [9] WANG D D, WANG J R, WU J C. Arbitrary order recursive formulation of meshfree gradients with application to superconvergent collocation analysis of Kirchhoff plates[J]. Computational Mechanics, 2020, 65(3): 877-903.
- [10] DENG L K, WANG D D, QI D L. A least squares recursive gradient meshfree collocation method for superconvergent structural vibration analysis[J]. Computational Mechanics, 2021, 68(5): 1063-1096.
- [11] HOU H Y, LI X L. A superconvergent finite node method for semilinear elliptic problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2023, 157: 301-313.
- [12] HOU H Y, LI X L. Numerical analysis of nonlinear Klein-Gordon equations by a meshless superconvergent finite point method[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2024, 169: 105954.
- [13] LI X L. Error estimates for the moving least-square approximation and the element-free Galerkin method in n -dimensional spaces[J]. Applied Numerical Mathematics, 2016, 99: 77-97.
- [14] WAN J S, LI X L. Analysis of the moving least squares approximation with smoothed gradients[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2022, 141: 181-188.
- [15] LIU W K, LI S F, BELYTSCHKO T. Moving least-square reproducing kernel methods (I) Methodology and convergence[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, 143(1/2): 113-154.
- [16] DENG L K, WANG D D. An accuracy analysis framework for meshfree collocation methods with particular emphasis on boundary effects[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 404: 115782.

A Superconvergent Finite Point Method for Linear Biharmonic Equations

LIU Ying, LI Xiaolin

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: A superconvergent finite point method (SFPM) is proposed and analyzed for solving linear biharmonic problems. Firstly, the smoothed derivative is introduced into the moving least squares approximation, and a superconvergent finite point method based on the smoothed gradient is constructed to obtain high accuracy and superconvergent numerical results. Secondly, the theoretical accuracy of the SFPM is provided through local truncation error analysis. Finally, the superconvergence of the method and the correctness of the theoretical analysis are verified through numerical experiments.

Keywords: finite point method; moving least squares approximation; biharmonic equations; superconvergence

(责任编辑 黄颖)