

一类具有含参边值条件分数阶微分方程边值问题的正解*

岳文璇, 周文学, 陈潇, 袁佳佳
(兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

摘要: 研究了一类具有含参非线性边值条件的 Caputo 型分数阶微分方程边值问题, 借助 Laplace 变换、不动点定理及锥理论等给出了该问题正解的存在性、多重性以及不存在性条件。最后, 通过具体例题对理论结果进行验证。

关键词: 分数阶微分方程; Laplace 变换; 不动点定理; Caputo 型分数阶导数; 含参边值条件; 正解存在性

中图分类号: O175.8

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2025)06-0104-12

分数阶微积分理论是一个重要的数学分支, 能对记忆性和遗传性现象进行精确描述, 因此, 在物理学、工程技术、生物科学等领域展现出重要的应用价值^[1-5]。近些年来, 对分数阶微分方程边值问题的研究已成为非线性分析领域的热点方向之一, 特别是涉及 Mittag-Leffler 函数等特殊函数的分数阶系统, 因解的结构复杂性和应用背景的广泛性, 吸引了众多学者的关注^[6-9]。主要的研究工具有算子不动点理论、非线性抉择理论、上下解方法、单调迭代技术等。

Fazli 等人^[10]通过上下解方法和单调迭代技术给出了一类带非线性边值条件的分数阶微分方程

$$\begin{cases} -u^{(m)}(t) + M^c D^\alpha u(t) = f(t, u(t)), t \in (0, T), \\ g_k(u^{(k)}(t_0), u^{(k)}(t_1), \dots, u^{(k)}(t_r)) = 0, k = 0, 1, \dots, m-1, \end{cases}$$

极值解的存在性相关理论, 其中 $m-1 < \alpha < m, m \in \mathbf{N}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = T$, 函数 $f: [0, T] \times [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ 连续。但结论仅保证极值解的存在性, 未能探讨无解情形或参数变化对解结构如存在性、多重性等的影响。

Yadav 等人^[11]用一种新的分数阶 Fibonacci 小波技术, 给出了求解分数阶 Bagley-Torvik 方程的

$$\begin{cases} \Delta D^2 z(\xi) + \beta D^{3/2} z(\xi) + \gamma z(\xi) = h(\xi), \xi \in [0, U], \\ z(0) = z_0, z(U) = z_1, \end{cases}$$

新的数值方法, 其中 Δ, β, γ 为常数系数, $\Delta \neq 0, h$ 连续。但本文未涉及边值问题解的理论分析。

受以上工作的启发, 本文研究一类积分边值条件含参的分数阶微分方程边值问题:

$$\begin{cases} -u^{(n)}(t) + c^c D^\gamma u(t) = x(t, u(t)) + y(t, u(t)), t \in (0, 1), \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0, u(1) - \int_0^1 k(s)u(s)ds = \lambda. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $n \in \mathbf{Z}$ 且 $n \geq 2, \gamma \in (n-1, n), c > 0, \lambda \geq 0$ 为参数, $x, y: [0, 1] \times [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ 连续, $k(s) \in C[0, 1], 0 < \psi := \int_0^1 k(s)s^{n-1}ds < 1$ 。本文拓展了边值条件, 增加参数使问题更具有一般性, 并结合 Laplace 变换与不动点定理补充了正解多重性与参数敏感性分析方面的理论。

1 预备知识

定义 1^[12] $\forall \alpha \in [n-1, n), n \in \mathbf{Z}^+$ 函数 f 的 α 阶 Caputo 型分数阶导数定义为:

$${}^c D_a^\alpha (f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dt,$$

等式右端在 $(a, +\infty)$ 上有定义。

* 收稿日期: 2025-07-03 修回日期: 2025-10-28 网络出版时间: 2026-01-15T15:09

资助项目: 甘肃省基础研究创新群体项目(No. 25JRR A805); 国家自然科学基金地区科学基金项目(No. 11961039)

第一作者简介: 岳文璇, 女, 研究方向为分数阶微分方程, E-mail: wxue77@163.com; 通信作者简介: 周文学, 男, 教授, 博士, E-mail: wxzhou2006@126.com

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20260115.0928.002>

定义 2^[13] 双参数的 Mittag-Leffler 函数定义如下:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0,$$

显然,双参数的 Mittag-Leffler 函数是非负且连续的。

定义 3^[14] 函数 $y(t)$ 为定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的实值函数,则它的 Laplace 变换式定义为:

$$\mathcal{L}[y](s) = Y(s) = \int_0^{+\infty} \exp(-st) y(t) dt.$$

引理 1^[15] 若 $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$, 则:

1) 连续函数 f 的 m 阶导数的 Laplace 变换公式如下:

$$\mathcal{L}[f^{(m)}](s) = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0^+), m \in \mathbf{N}^+.$$

2) 连续函数 f 的 α 阶 Caputo 型分数阶导数的 Laplace 变换公式如下:

$$\mathcal{L}[{}^c D^\alpha f](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+), \alpha \in (m-1, m), m \in \mathbf{N}^+.$$

3) 双参数 Mittag-Leffler 函数的 Laplace 变换公式如下:

$$\mathcal{L}[t^{ak+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^\alpha)] = \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}}, a, \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

引理 2 令函数 $m \in C[0, 1]$, 则边值问题

$$\begin{cases} -u^{(n)}(t) + c {}^c D^\gamma u(t) = m(t), t \in (0, 1), \\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0, u(1) - \int_0^1 k(s)u(s) ds = \lambda, \end{cases} \quad (2)$$

有唯一解 $u \in C^n(0, 1) \cap C^{n-1}[0, 1]$, 形式如下:

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)m(s) ds + \frac{t^{n-1}}{1-\phi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p)m(p) dp ds + \frac{\lambda t^{n-1}}{1-\phi}, \quad (3)$$

其中:

$$G(t, s) = \begin{cases} (t-ts)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(1-s)^{n-\gamma}) - (t-s)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(1-s)^{n-\gamma}), 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ (t-ts)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(1-s)^{n-\gamma}), 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (4)$$

证明 首先利用反证法证明问题(2)至多有 1 个解。设问题(2)有 2 个解 u_1 和 u_2 , 令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 是边值问题

$$\begin{cases} -w^{(n)}(t) + c {}^c D^\gamma w(t) = 0, t \in (0, 1), \\ w(0) = w'(0) = \cdots = w^{(n-2)}(0) = 0, w(1) - \int_0^1 k(s)w(s) ds = 0, \end{cases} \quad (5)$$

的解。由引理 1 及边值条件,对问题(5)的方程两端做 Laplace 变换有:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[-w^{(n)}(t) + c {}^c D^\gamma w(t)] &= 0, \\ -[s^n W(s) - w^{(n-1)}(0)] + c[s^\gamma W(s) - s^{\gamma-n} w^{(n-1)}(0)] &= 0, \end{aligned}$$

其中: $W(s) = \mathcal{L}[w](s)$, 则:

$$W(s) = \frac{w^{(n-1)}(0)(1 - cs^{\gamma-n})}{s^n - cs^\gamma} = \frac{w^{(n-1)}(0)}{s^n}. \quad (6)$$

由引理 1,对式(6)两端做 Laplace 逆变换有:

$$w(t) = \frac{w^{(n-1)}(0)}{\Gamma(n)} t^{n-1},$$

又 $w(1) - \int_0^1 k(s)w(s) ds = \frac{w^{(n-1)}(0)}{\Gamma(n)} - \int_0^1 k(s) \frac{w^{(n-1)}(0)}{\Gamma(n)} s^{n-1} ds = 0$, $\frac{w^{(n-1)}(0)}{\Gamma(n)}(1-\phi) = 0$, 由 $0 < \phi < 1$ 有 $w^{(n-1)}(0) = 0$, 则 $w = 0$, 即 $u_1 = u_2$, 因此问题(2)至多有 1 个解。

下面证明式(3)是问题(2)的解。将式(4)代入式(3)有:

$$u(t) = \int_0^t [(t-ts)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(1-s)^{n-\gamma}) - (t-s)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(1-s)^{n-\gamma})] m(s) ds +$$

$$\begin{aligned} & \int_t^1 [(t-ts)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(1-s)^{n-\gamma})]m(s)ds + \\ & \frac{t^{n-1}}{1-\phi} \left\{ \int_0^1 k(s) \int_0^s [(s-sp)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(1-p)^{n-\gamma}) - (s-p)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(1-p)^{n-\gamma})]m(p)dp ds + \right. \\ & \left. \int_0^1 k(s) \int_s^1 [(s-sp)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(1-p)^{n-\gamma})]m(p)dp ds \right\} + \frac{\lambda t^{n-1}}{1-\phi} = \\ & - \int_0^t (t-s)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(t-s)^{n-\gamma})m(s)ds + t^{n-1} \int_0^1 (1-s)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(1-p)^{n-\gamma})m(s)ds + \\ & \frac{\phi t^{n-1}}{1-\phi} \int_0^1 (1-s)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(1-p)^{n-\gamma})m(s)ds - \\ & \frac{t^{n-1}}{1-\phi} \int_0^1 k(s) \int_0^s (s-p)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(1-p)^{n-\gamma})]m(p)dp ds + \frac{\lambda t^{n-1}}{1-\phi}, \end{aligned}$$

上式合并化简后有:

$$\begin{aligned} u(t) = & - \int_0^t (t-s)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(t-s)^{n-\gamma})m(s)ds + \\ & \left(1 + \frac{\phi}{1-\phi}\right) t^{n-1} \int_0^1 (1-s)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(1-p)^{n-\gamma})m(s)ds - \\ & \frac{t^{n-1}}{1-\phi} \int_0^1 k(s) \int_0^s (s-p)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(1-p)^{n-\gamma})]m(p)dp ds + \frac{\lambda t^{n-1}}{1-\phi}, \end{aligned}$$

现令:

$$\begin{aligned} M = & \frac{\Gamma(n)}{1-\phi} \left[\int_0^1 (1-s)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(1-p)^{n-\gamma})m(s)ds - \right. \\ & \left. \int_0^1 k(s) \int_0^s (s-p)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(s-p)^{n-\gamma})m(p)dp ds + \lambda \right] \end{aligned}$$

则得到:

$$u(t) = - \int_0^t (t-s)^{n-1} E_{n-\gamma,n}(c(t-s)^{n-\gamma})m(s)ds + \frac{Mt^{n-1}}{\Gamma(n)}. \tag{7}$$

对式(7)求导至 n 阶导数:

$$\begin{aligned} u'(t) = & - \int_0^t (t-s)^{n-2} E_{n-\gamma,n-1}(c(t-s)^{n-\gamma})m(s)ds + \frac{Mt^{n-2}}{\Gamma(n-1)}, \\ & \vdots \\ u^{(n-1)}(t) = & - \int_0^t E_{n-\gamma,1}(c(t-s)^{n-\gamma})m(s)ds + M, \\ u^{(n)}(t) = & -c \int_0^t (t-s)^{n-\gamma-1} E_{n-\gamma,n-\gamma}(c(t-s)^{n-\gamma})m(s)ds - m(t). \end{aligned}$$

由函数 m 和 Mittag-Leffler 函数的连续性,有:

$$\begin{aligned} & u \in C^n(0,1) \cap C^{n-1}[0,1], \\ & u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0, u^{(n-1)}(0) = M. \end{aligned}$$

又由引理 1 有 $\mathcal{L}[u](s) = U(s) = \frac{-M(s)}{s^n - cs^\gamma} + \frac{M}{s^n}$, 其中 $M(s) = \mathcal{L}[m](s)$, 则:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[^c D^\gamma u](s) = & s^\gamma U(s) - s^{\gamma-n} u^{(n-1)}(0) = \frac{-M(s)}{s^{n-\gamma} - c}, \\ ^c D^\gamma u(t) = & - \int_0^t (t-s)^{n-\gamma-1} E_{n-\gamma,n-\gamma}(c(t-s)^{n-\gamma})m(s)ds. \end{aligned}$$

综上, $-u^{(n)}(t) + {}^c D^\gamma u(t) = m(t)$ 。又 $u(1) = \int_0^1 G(1,s)m(s)ds + \frac{1}{1-\phi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s,p)m(p)dp ds$,

则有:

$$u(1) - \int_0^1 k(s)u(s)ds = \frac{\lambda}{1-\phi} + \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s,p)m(p)dp ds - \frac{\lambda}{1-\phi} \int_0^1 k(s)s^{n-1} ds -$$

$$\frac{1}{1-\phi} \int_0^1 k(s) s^{n-1} ds \int_0^1 k(p) \int_0^1 G(p, \tau) m(\tau) d\tau dp = \frac{\lambda}{1-\phi} - \frac{\phi\lambda}{1-\phi} = \lambda. \quad \text{证毕}$$

引理 3 1) $\forall t, s \in [0, 1]$, 有:

$$0 \leq G(t, s) \leq Q(s) := (1-s)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(1-s)^{n-\gamma}).$$

2) $\forall \xi \in (0, \frac{1}{2}), s \in [0, 1]$, 有:

$$\min_{t \in [\xi, 1-\xi]} G(s, t) \geq K_\xi Q(s), K_\xi := \frac{c^{k_0} \xi^{k_0(n-\gamma)+2n-2}}{\Gamma(k_0(n-\gamma)+n) E_{n-\gamma, n}(c)},$$

其中: $k_0 = \lceil \frac{1}{n-\gamma} \rceil$, $\lceil a \rceil$ 表示比 a 大的最小整数, $K_\xi \in (0, 1)$ 。

证明 只证 2), 对 $0 \leq s \leq t \leq 1$, 由 Mittag-Leffler 函数的定义式, 即为级数形式, 每一项都具有非负性, 第 k_0

项为 $\frac{c^{k_0}}{\Gamma(k_0(n-\gamma)+n)} (1-s)^{k_0(n-\gamma)}$, 只保留此项有:

$$\begin{aligned} G(t, s) &= (t-ts)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(1-s)^{n-\gamma}) - (t-s)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(1-s)^{n-\gamma}) \geq \\ &\frac{c^{k_0}}{\Gamma(k_0(n-\gamma)+n)} [t^{n-1} (1-s)^{k_0(n-\gamma)+n-1} - (t-s)^{k_0(n-\gamma)+n-1}] \geq \\ &\frac{c^{k_0}}{\Gamma(k_0(n-\gamma)+n)} [t^{n-1} (1-t)^{k_0(n-\gamma)+n-1}], \end{aligned}$$

则 $\forall t \in [\xi, 1-\xi]$, 有:

$$\frac{G(t, s)}{Q(s)} \geq \frac{c^{k_0} t^{n-1} (1-t)^{k_0(n-\gamma)+n-1}}{\Gamma(k_0(n-\gamma)+n) (1-s)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(1-s)^{n-\gamma})} \geq \frac{c^{k_0} \xi^{k_0(n-\gamma)+2n-2}}{\Gamma(k_0(n-\gamma)+n) E_{n-\gamma, n}(c)} = K_\xi.$$

显然 $\Gamma(k_0(n-\gamma)+n) E_{n-\gamma, n}(c) \geq c^{k_0}$, 则 $\forall \xi \in (0, \frac{1}{2})$, 有 $K_\xi \in (0, 1)$ 。

对 $0 \leq t \leq s \leq 1, t \in [\xi, 1-\xi]$, 有:

$$G(t, s) = (t-ts)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(1-s)^{n-\gamma}) \geq t^{n-1} Q(s) \geq \xi^{n-1} Q(s) \geq K_\xi Q(s). \quad \text{证毕}$$

引理 4 若 $m \in C^+[0, 1] := \{m \in C[0, 1]; m(t) \geq 0, t \in [0, 1]\}$, 则式(3)非负且满足:

$$\min_{t \in [\xi, 1-\xi]} u(t) \geq K_\xi \|u\|.$$

证明 由式(3)显然有 $u \geq 0$ 。由引理 1 有:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G(t, s) m(s) ds + \frac{t^{n-1}}{1-\phi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p) m(p) dp ds + \frac{\lambda t^{n-1}}{1-\phi} \leq \\ &\int_0^1 Q(s) m(s) ds + \frac{1}{1-\phi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p) m(p) dp ds + \frac{\lambda}{1-\phi}, \end{aligned}$$

则有:

$$\|u\| = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)| \leq \int_0^1 Q(s) m(s) ds + \frac{1}{1-\phi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p) m(p) dp ds + \frac{\lambda}{1-\phi}.$$

又 $\forall t \in [\xi, 1-\xi]$, 有:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G(t, s) m(s) ds + \frac{t^{n-1}}{1-\phi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p) m(p) dp ds + \frac{\lambda t^{n-1}}{1-\phi} \geq \\ K_\xi \int_0^1 Q(s) m(s) ds + \frac{\xi^{n-1}}{1-\phi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p) m(p) dp ds + \frac{\lambda \xi^{n-1}}{1-\phi} &\geq K_\xi \|u\|. \quad \text{证毕} \end{aligned}$$

引理 5^[16] (Arzelà-Ascoli 定理) 若 E 是 Banach 空间, C 是 E 的紧集, 序列 $\{x_n\}$ 在 C 中一致有界且等度连续, 则此序列在 C 中有一致连续子序列。

引理 6^[17] (锥压缩与拉伸不动点定理) 设 X 为 Banach 空间, $P \subset X$ 为 X 中的一个锥。假设 Ω_1, Ω_2 为 X 的开子集且满足 $0 \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, 且令算子 $S: P \rightarrow P$ 为全连续算子并使得以下条件之一成立:

- 1) $\|Sw\| \geq \|w\|, w \in P \cap \partial\Omega_1, \|Sw\| \leq \|w\|, w \in P \cap \partial\Omega_2$;
- 2) $\|Sw\| \leq \|w\|, w \in P \cap \partial\Omega_1, \|Sw\| \geq \|w\|, w \in P \cap \partial\Omega_2$ 。

则算子 S 在 $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ 中有 1 个不动点。

引理 7^[18] (Schauder 不动点定理) 设 X 是 Banach 空间, $\Omega \in X$ 是有界凸闭集。若 $T: \Omega \rightarrow \Omega$ 是连续算子并且使得 $T\Omega \subset X, T\Omega$ 是相对紧的, 那么在 Ω 上至少存在 1 个不动点。

2 主要结果

设 $X = C[0, 1]$, 范数为 $\|u\| = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|$, 现定义锥 $B \in X$ 和算子 $T: X \rightarrow X$ 如下:

$$B = \{u \in C^+[0, 1]; \min_{t \in [\xi_0, 1-\xi_0]} u(t) \geq K_{\xi_0} \|u\|\}.$$

其中:

$$\xi_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), K_{\xi_0} = \frac{c^{k_0} \xi_0^{k_0(n-\gamma)+2n-2}}{\Gamma(k_0(n-\gamma)+n) E_{n-\gamma, n}(c)}.$$

该锥的构造基于非负连续函数空间, 确保了函数在区间内部“远离零点”。这种构造有助于在应用不动点定理时, 结合 Green 函数的正性, 保证所获不动点为正解。

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t, s)[x(s, u(s)) + y(s, u(s))] ds + \frac{t^{n-1}}{1-\psi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p)[x(p, u(p)) + y(p, u(p))] dp ds + \frac{\lambda t^{n-1}}{1-\psi}. \tag{8}$$

算子的构造将微分方程有解问题转化为算子不动点问题。

引理 8 u 为问题(1)的解当且仅当 u 为算子 T 的不动点。

引理 9 算子 $T: B \rightarrow B$ 为全连续算子。

证明 若 $u \in B$, 由引理 4 有 $T(u) \in B$, 则 $T(B) \subseteq B$ 。又由函数 G, x, y 的连续性有算子 $T: B \rightarrow B$ 也连续。令 $E \subset B$ 有界, 则存在 $L > 0$, 使得对 $\forall u \in E$ 都有 $\|u\| \leq L$, 再令 $N = \max_{\substack{t \in [0, 1] \\ u \in [0, L]}} |x(t, u) + y(t, u)| + 1$ 。

则由引理 3, $\forall u \in E$, 有:

$$|Tu(t)| \leq N \int_0^1 Q(s) ds + \frac{N \int_0^1 k(s) ds}{1-\psi} \int_0^1 Q(s) ds + \frac{\lambda}{1-\psi} := A_1,$$

再记:

$$A_2 = \frac{N \int_0^1 k(s) ds}{1-\psi} \int_0^1 Q(s) ds + \frac{\lambda}{1-\psi}.$$

$\forall t_1, t_2 \in [0, 1]$, 设 $t_1 < t_2$, 有:

$$\begin{aligned} & |(Tu)(t_2) - (Tu)(t_1)| \leq \\ & \left| \int_0^1 G(t_2, s)[x(s, u(s)) + y(s, u(s))] ds - \int_0^1 G(t_1, s)[x(s, u(s)) + y(s, u(s))] ds \right| + \\ & \frac{t_2^{n-1} - t_1^{n-1}}{1-\psi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p)[x(p, u(p)) + y(p, u(p))] dp ds + \frac{\lambda(t_2^{n-1} - t_1^{n-1})}{1-\psi} \leq \\ & N \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| ds + A_2(t_2^{n-1} - t_1^{n-1}) \leq \\ & N \left| \int_0^1 (t_2 - s)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(t_2 - s)^{n-\gamma}) - (t_1 - s)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(t_1 - s)^{n-\gamma}) ds \right| + \\ & N \left| \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{n-1} E_{n-\gamma, n}(c(t_2 - s)^{n-\gamma}) ds \right| + A_2(t_2^{n-1} - t_1^{n-1}), \end{aligned}$$

则:

$$|(Tu)(t_2) - (Tu)(t_1)| \rightarrow 0, t_2 \rightarrow t_1.$$

因此算子 T 是等度连续算子, 则由引理 5 有算子 $T: B \rightarrow B$ 是全连续算子。

证毕

为方便起见, 做以下记号:

$$\underline{x}_0 = \liminf_{u \rightarrow 0^+} \frac{x(t, u)}{u}, \underline{x}_\infty = \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{x(t, u)}{u}, \underline{x}_0 = \limsup_{u \rightarrow 0^+} \frac{x(t, u)}{u}, \underline{x}_\infty = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{x(t, u)}{u};$$

$$\underline{y}_0 = \liminf_{u \rightarrow 0^+} \frac{y(t, u)}{u}, \underline{y}_\infty = \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{y(t, u)}{u}, \underline{y}_0 = \limsup_{u \rightarrow 0^+} \frac{y(t, u)}{u}, \underline{y}_\infty = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{y(t, u)}{u}.$$

有如下假设:

(H₁) $\underline{x}_0 = \underline{x}_\infty = \underline{y}_0 = \underline{y}_\infty = \infty$ 。

(H₂) $\underline{x}_0 = \underline{x}_\infty = \underline{y}_0 = \underline{y}_\infty = 0$ 。

(H₃) 存在常数 $k_1 > 0$, 使得 $\forall u \in [K_{\xi_0} k_1, k_1]$ 有:

$$x(t, u) + y(t, u) \leq k_1 \alpha_1,$$

其中: $\alpha_1 < \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\int_0^1 k(s) ds}{1 - \psi} \right) \int_0^1 Q(s) ds \right]^{-1}$ 。

(H₄) 存在常数 $k_2 > 0$, 使得 $\forall u \in [K_{\xi_0} k_2, k_2]$ 有:

$$x(t, u) + y(t, u) \geq k_2 \alpha_2,$$

其中: $\alpha_2 > \frac{1}{K_{\xi_0}} \left[\left(1 + \frac{\xi_0^{n-1} \int_0^1 k(s) ds}{1 - \psi} \right) \int_{\xi_0}^{1-\xi_0} Q(s) ds \right]^{-1}$ 。

定理 1 若条件(H₁)和(H₃)成立, 则当 λ 充分小时, 问题(1)至少有 2 个正解即 u_1 和 u_2 , 且满足 $0 < \|u_1\| < k_1 < \|u_2\|$ 。

证明 由 $\underline{x}_0 = \underline{y}_0 = \infty$, 存在正常数 v_1 满足 $v_1 \in (0, k_1)$, 使得 $\forall u \in [0, v_1]$ 有:

$$x(t, u) \geq \frac{\beta_1}{2} u, y(t, u) \geq \frac{\beta_1}{2} u,$$

为满足引理 1 的条件, 选择 β_1 满足:

$$\beta_1 > \frac{1}{K_{\xi_0}^2} \left[\left(1 + \frac{\xi_0^{n-1} \int_0^1 k(s) ds}{1 - \psi} \right) \int_{\xi_0}^{1-\xi_0} Q(s) ds \right]^{-1}.$$

根据式(8)及引理 4, $\min_{t \in [\xi_0, 1-\xi_0]} u(t) \geq K_{\xi_0} \|u\|, \forall u \in \partial\Omega_{v_1}$, 有:

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &= \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 G(t, s) [x(s, u(s)) + y(s, u(s))] ds + \frac{\lambda t^{n-1}}{1 - \psi} + \right. \\ &\quad \left. \frac{t^{n-1}}{1 - \psi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p) [x(p, u(p)) + y(p, u(p))] dp ds \right| \geq \\ &\quad \min_{t \in [\xi_0, 1-\xi_0]} \left| \int_0^1 G(t, s) [x(s, u(s)) + y(s, u(s))] ds + \frac{\lambda t^{n-1}}{1 - \psi} + \right. \\ &\quad \left. \frac{t^{n-1}}{1 - \psi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p) [x(p, u(p)) + y(p, u(p))] dp ds \right| \geq \\ &\quad \beta_1 K_{\xi_0}^2 \left[\left(1 + \frac{\xi_0^{n-1} \int_0^1 k(s) ds}{1 - \psi} \right) \int_{\xi_0}^{1-\xi_0} Q(s) ds \right] \|u\| > \|u\| = v_1, \end{aligned}$$

即:

$$\|Tu\| > \|u\|, u \in \partial\Omega_{v_1}. \tag{9}$$

再由 $\underline{x}_\infty = \underline{y}_\infty = \infty$, 存在正常数 ρ 满足 $\rho > k_1$, 使得 $\forall u \in [\rho, +\infty)$ 有:

$$x(t, u) \geq \frac{\beta_1}{2} u, y(t, u) \geq \frac{\beta_1}{2} u.$$

为使 x 和 y 在 $\partial\Omega_{v_2}$ 上也满足上述条件, 取正常数 v_2 满足 $K_{\xi_0} v_2 \geq \rho$, 则对 $\forall u \in \partial\Omega_{v_2}$, 有:

$$\min_{t \in [\xi_0, 1-\xi_0]} u(t) \geq K_{\xi_0} \|u\| \geq \rho.$$

同理, 对 $\|Tu\|$ 进行放缩:

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &\geq K_{\xi_0} \int_{\xi_0}^{1-\xi_0} Q(s)[x(s, u(s)) + y(s, u(s))] ds + \\ &\frac{K_{\xi_0} \xi_0^{n-1} \int_0^1 k(s) ds}{1-\psi} \int_{\xi_0}^{1-\xi_0} Q(s)[x(s, u(s)) + y(s, u(s))] ds \geq \\ &\beta_1 K_{\xi_0}^2 \left[\left(1 + \frac{\xi_0^{n-1} \int_0^1 k(s) ds}{1-\psi} \right) \int_{\xi_0}^{1-\xi_0} Q(s) ds \right] \|u\| > \|u\| = v_2, \end{aligned}$$

即：

$$\|Tu\| > \|u\|, u \in \partial\Omega_{v_2} \tag{10}$$

最后, 当 λ 充分小时, 不妨令 λ 满足：

$$0 \leq \lambda \leq \frac{(1-\psi)k_1}{2}.$$

则由引理 3 及条件(H₃), $\forall u \in \partial\Omega_{k_1}$, 有：

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t, s)[x(s, u(s)) + y(s, u(s))] ds + \\ &\frac{t^{n-1}}{1-\psi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p)[x(p, u(p)) + y(p, u(p))] dp ds + \frac{\lambda t^{n-1}}{1-\psi} \leq \\ &\int_0^1 Q(s)[x(s, u(s)) + y(s, u(s))] ds + \\ &\frac{1}{1-\psi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 Q(p)[x(p, u(p)) + y(p, u(p))] dp ds + \frac{\lambda}{1-\psi} \leq \\ &k_1 \alpha_1 \left[\left(1 + \frac{\int_0^1 k(s) ds}{1-\psi} \right) \int_0^1 Q(s) ds \|u\| + \frac{k_1}{2} \right] < \frac{k_1}{2} + \frac{k_1}{2} = k_1 = \|u\|, \end{aligned}$$

则由 $\|Tu\| = \max_{t \in [0,1]} |Tu(t)|$, 易得：

$$\|Tu\| < \|u\|, u \in \partial\Omega_{k_1} \tag{11}$$

综上, 根据引理 6, 由式(9)、(10)及(11)得, 当 λ 充分小时, 算子 T 至少有 2 个不动点 $u_1 \in \overline{\Omega}_{k_1} \setminus \Omega_{v_1}$ 和 $u_1 \in \overline{\Omega}_{v_2} \setminus \Omega_{k_1}$ 且满足 $0 < \|u_1\| < k_1 < \|u_2\|$ 。又 $\forall \tilde{t} \in (0, 1), \exists \tilde{\xi} \in (0, \frac{1}{2})$ 使得 $\tilde{t} \in [\tilde{\xi}, 1-\tilde{\xi}]$ 。则由引理 4 有：

$$u_i(\tilde{t}) \geq K_{\tilde{\xi}} u_i > 0, i = 1, 2.$$

即 $\forall t \in (0, 1)$, 有 $u_i > 0$, 且 $u_i(1) - \int_0^1 k(s)u_i(s) ds = \lambda > 0, i = 1, 2$ 。因此, 由引理 8 有 u_1, u_2 为问题(1)的 2 个正解。 证毕

定理 2 若条件(H₂)和(H₄)成立, 则当 λ 充分小时, 问题(1)至少有 2 个正解即 u_3 和 u_4 , 且满足 $0 < \|u_3\| < k_1 < \|u_4\|$ 。

证明 由 $\bar{x}_0 = \bar{y}_0 = 0$, 存在正常数 ω_1 满足 $\omega_1 \in (0, k_2)$, 使得 $\forall u \in [0, \omega_1]$ 有：

$$x(t, u) \leq \frac{\beta_2}{2} u, y(t, u) \leq \frac{\beta_2}{2} u,$$

其中 β_2 满足：

$$0 < \beta_2 < \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\int_0^1 k(s) ds}{1-\psi} \right) \int_0^1 Q(s) ds \right]^{-1}.$$

不妨令 λ 满足：

$$0 \leq \lambda \leq \frac{(1-\psi)\omega_1}{2}.$$

同定理 1 的证明, $\forall u \in \partial\Omega_{\omega_1}$, 有:

$$Tu(t) \leq \beta_2 \left(1 + \frac{\int_0^1 k(s) ds}{1-\psi} \right) \int_0^1 Q(s) ds \|u\| + \frac{\omega_1}{2} < \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_1}{2} = \omega_1 = \|u\|,$$

即:

$$\|Tu\| < \|u\|, u \in \partial\Omega_{\omega_1}. \tag{12}$$

现定义函数 $X(t, u) = \max_{z \in [0, u]} [x(t, z)]$ 和 $Y(t, u) = \max_{z \in [0, u]} [y(t, z)]$, 则 $X(t, u)$ 和 $Y(t, u)$ 在 $[0, \infty)$ 上关于 u 为单调不减函数。由 $\bar{x}_\infty = \bar{y}_\infty = 0$, 知:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{X(t, u)}{u} = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{Y(t, u)}{u} = 0.$$

因而存在正常数 $\omega_2 > k_2$ 使得 $\forall u \in [\omega_2, +\infty)$ 有:

$$X(t, u) \leq \frac{\beta_2}{2} u, Y(t, u) \leq \frac{\beta_2}{2} u,$$

同时令 $0 \leq \lambda \leq \frac{(1-\psi)\omega_2}{2}$, 则 $\forall u \in \partial\Omega_{\omega_2}$, 有:

$$\begin{aligned} Tu(t) &\leq \int_0^1 Q(s) [X(s, u(s)) + Y(s, u(s))] ds + \\ &\frac{\int_0^1 k(s) ds}{1-\psi} \int_0^1 Q(s) [X(s, u(s)) + Y(s, u(s))] ds + \frac{\lambda}{1-\psi} \leq \\ &\beta_2 \left(1 + \frac{\int_0^1 k(s) ds}{1-\psi} \right) \int_0^1 Q(s) ds \|u\| + \frac{\omega_2}{2} < \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_2}{2} = \omega_2 = \|u\|, \end{aligned}$$

即:

$$\|Tu\| < \|u\|, u \in \partial\Omega_{\omega_2}. \tag{13}$$

最后, 由条件 (H_4) , $\forall u \in \partial\Omega_{k_2}$, 有:

$$\|Tu\| \geq k_2 \alpha_2 K_{\xi_0} \left[\left(1 + \frac{\xi_0^{n-1} \int_0^1 k(s) ds}{1-\psi} \right) \int_{\xi_0}^{1-\xi_0} Q(s) ds \right]^{-1} > k_2 = \|u\|,$$

即:

$$\|Tu\| > \|u\|, u \in \partial\Omega_{k_2}. \tag{14}$$

综上, 根据引理 6, 由式(12)、(13)及(14)得到, 当 λ 充分小时, 算子 T 至少有 2 个不动点 $u_3 \in \bar{\Omega}_{k_2} \setminus \Omega_{\omega_1}$ 和 $u_1 \in \bar{\Omega}_{\omega_2} \setminus \Omega_{k_2}$ 且满足 $0 < \|u_1\| < k_2 < \|u_2\|$ 。同定理 1, 由引理 8 有 u_3, u_4 为问题(1)的 2 个正解。证毕

定理 3 若 $\bar{x}_\infty = \bar{y}_\infty = \infty$, 则当 λ 充分大时, 问题(1)无正解。

证明 设有严格单调递增序列 $\{\lambda_n\}$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$, 使得边值问题

$$\begin{cases} -u^{(n)}(t) + c^c D^\gamma u(t) = x(t, u(t)) + y(t, u(t)), t \in (0, 1), \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0, u(1) - \int_0^1 k(s)u(s) ds = \lambda_n, \end{cases}$$

有解 u_n , 则由算子 T 的定义有:

$$\begin{aligned} u_n(1) &= \int_0^1 G(1, s) [x(s, u_n(s)) + y(s, u_n(s))] ds + \\ &\frac{1}{1-\psi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p) [x(p, u_n(p)) + y(p, u_n(p))] dp ds + \frac{\lambda_n}{1-\psi} \geq \frac{\lambda_n}{1-\psi} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|u_n\| \rightarrow \infty$ 。由 $\bar{x}_\infty = \bar{y}_\infty = \infty$ 知, 同定理 1 的证明, 当 n 充分大时, 可以取正常数 τ 满足 $K_{\xi_0} \|u_n\| \geq \tau$, 且 $x(t, u_n) \geq 2\beta_1 u, y(t, u_n) \geq 2\beta_1 u$, 有:

$$\|u_n\| \geq 2\beta_1 K_{\xi_0}^2 \left[\left(1 + \frac{\xi_0^{n-1} \int_0^1 k(s) ds}{1-\psi} \right) \int_{\xi_0}^{1-\xi_0} Q(s) ds \right] \|u_n\| > 2\|u_n\|,$$

显然矛盾,则当 λ 充分大时,问题(1)无正解。

证毕

定理 4 若 $\underline{x}_\infty = \underline{y}_\infty = \infty$ 及条件(H₃)成立,且 $x(t, u)$ 和 $y(t, u)$ 均关于 u 为单调不减函数,则存在正常数 λ^* 使得以下结论成立:

- 1) 当 $\lambda \in [0, \lambda^*)$ 时问题(1)至少有 1 个正解;
- 2) 当 $\lambda = \lambda^*$ 时问题(1)有 1 个正解;
- 3) 当 $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ 时问题(1)没有正解。

证明 令 $\Lambda = \{\lambda \geq 0: \text{式(1)至少有 1 个正解}\}$ 且 $\lambda^* = \sup \Lambda$ 。由定理 1 知当 λ 充分小时,式(1)至少有 1 个正解,以下仅考虑 $\lambda > 0$ 的情形。结合定理 3 知 $0 < \lambda^* < \infty$, 则 $\forall \lambda \in (0, \lambda^*), \exists \mu \in \Lambda$ 且 $\mu > \lambda$ 使得边值问题

$$\begin{cases} -u^{(n)}(t) + c^c D^\gamma u(t) = x(t, u(t)) + y(t, u(t)), t \in (0, 1), \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0, u(1) - \int_0^1 k(s)u(s)ds = \mu, \end{cases}$$

有 1 个正解 u_μ 。下面考虑边值问题:

$$\begin{cases} -u^{(n)}(t) + c^c D^\gamma u(t) = \mathcal{X}(t, u(t)) + \mathcal{Y}(t, u(t)), t \in (0, 1), \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0, u(1) - \int_0^1 k(s)u(s)ds = \lambda, \end{cases}$$

其中:

$$\mathcal{X}(t, u(t)) = \begin{cases} x(t, 0), u(t) < 0, \\ x(t, u(t)), 0 \leq u(t) \leq u_\mu(t), \\ x(t, u_\mu(t)), u(t) > u_\mu(t), \end{cases} \quad \mathcal{Y}(t, u(t)) = \begin{cases} y(t, 0), u(t) < 0, \\ y(t, u(t)), 0 \leq u(t) \leq u_\mu(t), \\ y(t, u_\mu(t)), u(t) > u_\mu(t), \end{cases}$$

现定义算子 $T^*: E \rightarrow E$ 如下:

$$T^* u(t) = \int_0^1 G(t, s) [\mathcal{X}(s, u(s)) + \mathcal{Y}(s, u(s))] ds + \frac{t^{n-1}}{1-\psi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p) [\mathcal{X}(p, u(p)) + \mathcal{Y}(p, u(p))] dp ds + \frac{\lambda t^{n-1}}{1-\psi}.$$

又由 \mathcal{X} 和 \mathcal{Y} 的连续性和有界性,存在 $L > 0$ 使得 $\forall u \in E$ 有 $\|T^* u\| \leq L$, 现令 $B^* = \{u \in E: \|u\| \leq L\}$, 显然有 $T^*(B^*) \subseteq B^*$ 。则同引理 9 的证明, $T^*: B^* \rightarrow B^*$ 是全连续算子。故根据引理 7 即 Schauder 不动点定理,有解 $u_\lambda \in B^*$, 显然,由 $X \geq 0$ 且 $Y \geq 0$, 当 $t \in (0, 1)$ 时,有 $u_\lambda(t) > 0$ 。现令 $v = u_\mu - u_\lambda$, 有 v 满足:

$$\begin{cases} -v^{(n)}(t) + c^c D^\gamma v(t) = x(t, v_\mu(t)) + y(t, v_\mu(t)) - [\mathcal{X}(t, v_\lambda(t)) + \mathcal{Y}(t, v_\lambda(t))], t \in (0, 1); \\ v(0) = v'(0) = \dots = v^{(n-2)}(0) = 0, v(1) - \int_0^1 k(s)v(s)ds = \mu - \lambda. \end{cases}$$

记 $n(t) = x(t, v_\mu(t)) + y(t, v_\mu(t)) - [\mathcal{X}(t, v_\lambda(t)) + \mathcal{Y}(t, v_\lambda(t))] \geq 0$ 。根据 $u_\mu, u_\lambda, x, y, \mathcal{X}$ 和 \mathcal{Y} 的连续性易知 $n(t) \in C^+[0, 1]$ 。由引理 2 知:

$$v(t) = \int_0^1 G(t, s)n(s)ds + \frac{t^{n-1}}{1-\psi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p)n(p)dp ds + \frac{\lambda t^{n-1}}{1-\psi}.$$

显然 $v \geq 0$, 即 $u_\mu \geq u_\lambda$, 则 $\mathcal{X}(t, u(t)) = x(t, u(t))$ 且 $\mathcal{Y}(t, u(t)) = y(t, u(t))$, 因而 u_λ 为问题(1)的 1 个正解。

现考虑 $\lambda^* \in \Lambda$ 。取恒正严格递增序列 $\{\lambda_j\}$ 满足 $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda^*$, 再令 z_j 为 $\lambda = \lambda_j$ 时问题(1)的正解, 即:

$$z_j(t) = \int_0^1 G(t, s) [x(s, z_j(s)) + y(s, z_j(s))] ds + \frac{t^{n-1}}{1-\psi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p) [x(p, z_j(p)) + y(p, z_j(p))] dp ds + \frac{\lambda_j t^{n-1}}{1-\psi}.$$

由 $\underline{x}_\infty = \underline{y}_\infty = \infty$, 存在 $\sigma > 0$ 使得 $\forall z \in [\sigma, +\infty), x(t, z(t)) \geq \frac{\beta}{2} z, y(t, z(t)) \geq \frac{\beta}{2} z$ 成立, 其中 $\beta >$

$\left[K_{\xi_0}^2 \int_{\xi_0}^{1-\xi_0} Q(s) ds \right]^{-1}$ 。存在 $Z^* > 0$ 使得 $\|z_j\| \leq Z^*$, 如若不然, 则存在 $J > 0, \forall j \in J$ 有 $\min_{t \in [\xi_0, 1-\xi_0]} z_j \geq K_{\xi_0} \|z_j\| \geq \sigma$, 则 $z_j \geq \beta K_{\xi_0}^2 \int_{\xi_0}^{1-\xi_0} Q(s) ds \|z_j\| > \|z_j\|$, 矛盾, 即 $\{z_j\}$ 一致有界。又:

$$|z'_j(t)| = \left| - \int_0^t (t-s)^{n-2} E_{n-\gamma, n-1}(c(t-s)^{n-\gamma}) [x(s, z_j(s)) + y(s, z_j(s))] ds + \frac{Mt^{n-2}}{\Gamma(n-1)} \right| \leq$$

$$Z_1 \int_0^1 [x(s, z_j(s)) + y(s, z_j(s))] ds + Z_2 \leq$$

$$Z_1 \int_0^1 [x(s, Z^*) + y(s, Z^*)] ds + Z_2 \leq Z_3,$$

其中: Z_1, Z_2, Z_3 为正常数, 则 $\forall t_1, t_2 \in [0, 1]$, 由拉格朗日中值定理有:

$$|z_j(t_2) - z_j(t_1)| = |z'_j(t^*)(t_2 - t_1)| \leq Z_3 |t_2 - t_1| \rightarrow 0, |t_2 - t_1| \rightarrow 0, t^* \in (0, 1),$$

则 $\{z_j\}$ 等度连续, 由引理 5 知, $\{z_j\}$ 有子序列 $\{z_{j_k}\}$ 收敛于 \tilde{z} 。易证:

$$\tilde{z}(t) = \int_0^1 G(t, s) [x(s, \tilde{z}(s)) + y(s, \tilde{z}(s))] ds +$$

$$\frac{t^{n-1}}{1-\phi} \int_0^1 k(s) \int_0^1 G(s, p) [x(p, \tilde{z}(p)) + y(p, \tilde{z}(p))] dp ds + \frac{\lambda^* t^{n-1}}{1-\phi},$$

即当 $\lambda = \lambda^*$ 时 \tilde{z} 是问题(1)的一个正解。

证毕

3 举例验证

例 1 考虑如下边值问题:

$$\begin{cases} -u''(t) + \frac{1}{2} D^{\frac{3}{2}} u(t) = t + u^2(t) + \frac{1}{2} u^3(t), t \in (0, \frac{1}{2}); \\ u(0) = u'(0) = 0, u(1) - \int_0^1 su(s) ds = \lambda. \end{cases}$$

其中: $n=2, \gamma=\frac{3}{2}, c=\frac{1}{2}, x(t, u)=t+u^2, y(t, u)=\frac{1}{2}u^3, k(s)=s$ 。

现将 $x(t, u), y(t, u)$ 的表达式代入 $\underline{x}_0, \underline{x}_\infty, \underline{y}_0, \underline{y}_\infty$ 的定义式中, 有:

$$\underline{x}_0 = \liminf_{u \rightarrow 0^+} \frac{t+u^2}{u}, \underline{x}_\infty = \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{t+u^2}{u},$$

$$\underline{y}_0 = \liminf_{u \rightarrow 0^+} \frac{1/2u^3}{u}, \underline{y}_\infty = \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{1/2u^3}{u}.$$

算得 $\underline{x}_0 = \underline{x}_\infty = \underline{y}_0 = \underline{y}_\infty = 0$, 则条件 (H_1) 成立。

下证条件 (H_3) 成立。

$$\left(1 + \frac{\int_0^1 k(s) ds}{1-\phi} \right) \int_0^1 Q(s) ds = \left(1 + \frac{\int_0^1 s ds}{1-\int_0^1 s^2 ds} \right) \int_0^1 (1-s)^{\frac{1}{2}} E_{1/2, 2} \left[\frac{1}{2} (1-s)^{\frac{1}{2}} \right] ds \leq$$

$$\left(1 + \frac{3}{4} \right) E_{\frac{1}{2}, 2} \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^1 (1-s)^{\frac{1}{2}} ds \approx 0.263.$$

取 $\alpha_1 = 1.8$, 有 $\alpha_1 < \frac{1}{2 \times 0.263} \approx 1.9$, 又取 $k_1 = 5$, 则 $\forall (t, u) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, 2]$ 有:

$$x(t, u) + y(t, u) = t + u^2 + \frac{1}{2} u^3 \leq 8.5 \leq 9 = k_1 \alpha_1.$$

则由定理 1, 问题(1)至少有 u_1 和 u_2 这 2 个正解, 且满足 $0 < \|u_1\| < k_1 < \|u_2\|$ 。

例 2 考虑如下边值问题:

$$\begin{cases} -u^{(3)}(t) + \frac{1}{3} D^{\frac{5}{2}} u(t) = \frac{1}{4} [t + u^{\frac{1}{2}}(t)] + \frac{1}{2} u^{\frac{3}{2}}(t), t \in (0, 1), \\ u(0) = u'(0) = 0, u(1) - \int_0^1 su(s) ds = \lambda, \end{cases}$$

其中: $n=3, \gamma=\frac{5}{2}, c=\frac{1}{3}, x(t, u)=\frac{1}{4}(t+u^{\frac{1}{2}}), y(t, u)=\frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}}, k(s)=s$ 。

将 $x(t, u), y(t, u)$ 的表达式代入 $\bar{x}_0, \bar{x}_\infty, \bar{y}_0, \bar{y}_\infty$ 的定义式中, 有:

$$\begin{aligned}\bar{x}_0 &= \limsup_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{4}(t+u^{\frac{1}{2}})}{u}, \bar{x}_\infty = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(t+u^{\frac{1}{2}})}{u}, \\ \bar{y}_0 &= \limsup_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}}}{u}, \bar{y}_\infty = \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}}}{u}.\end{aligned}$$

算得 $\bar{x}_0 = \bar{x}_\infty = \bar{y}_0 = \bar{y}_\infty = 0$, 则条件 (H_2) 成立。

下证条件 (H_3) 成立。

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{\int_0^1 k(s) ds}{1-\psi}\right) \int_0^1 Q(s) ds &= \left(1 + \frac{\int_0^1 s ds}{1-\int_0^1 s^n ds}\right) \int_0^1 (1-s)^2 E_{\frac{1}{2}, 3} \left[\frac{1}{3}(1-s)^{\frac{1}{2}}\right] ds \leq \\ &\left(1 + \frac{2}{3}\right) E_{\frac{1}{2}, 3} \left(\frac{1}{3}\right) \int_0^1 (1-s)^2 ds \approx 0.345.\end{aligned}$$

取 $\alpha_1 = 1.4$, 有 $\alpha_1 < \frac{1}{2 \times 0.345} = 1.45$, 又取 $k_1 = 5$, 则 $\forall (t, u) \in [0, 1] \times [0, 5]$ 有:

$$x(t, u) + y(t, u) = \frac{1}{4}[t + u^{\frac{1}{2}}] + \frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}} \leq 6.41 \leq 7 = k_1 \alpha_1.$$

由定理 3 和定理 4 知, $\exists \lambda^* > 0$ 使得 $\lambda \in [0, \lambda^*)$ 时该问题至少有 1 个正解, $\lambda = \lambda^*$ 时该问题有 1 个正解, $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ 时该问题没有正解。

4 结论

本文首先利用 Laplace 变换求解分数阶微分方程, 再利用锥压缩与拉伸不动点定理等研究具有含参边值条件的分数阶微分方程的参数在不同范围下分数阶微分方程正解的存在性条件, 最后举例验证。

参考文献:

- [1] ULLAH I, SHAH K, ABDELJAWAD T. Study of traveling soliton and fronts phenomena in fractional Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation [J]. *Physica Scripta*, 2024, 99(5): 055259.
- [2] ABBAS HAIDER J, ALHUTHALI A M S, ABDELGHANY ELKOTB M. Exploring novel applications of stochastic differential equations: unraveling dynamics in plasma physics with the Tanh-Coth method [J]. *Results in Physics*, 2024, 60: 107684.
- [3] NAZNEEN A, NAWAZ R, ZADA L, et al. Analysis of the non-linear higher dimensional fractional differential equations arising in dusty plasma using the Atangana-Baleanu fractional derivative [J]. *Results in Engineering*, 2025, 25: 104116.
- [4] MOUALKIA S, LIU Y, QIU J L, et al. Mittag-Leffler-Ulam stabilities for variable fractional-order differential equations driven by Lévy noise [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2025, 113(11): 13043-13059.
- [5] AHMAD NAIK P, YAVUZ M, QURESHI S, et al. Memory impacts in hepatitis C: a global analysis of a fractional-order model with an effective treatment [J]. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 2024, 254: 108306.
- [6] LUCA R, LUCA R. Advances in boundary value problems for fractional differential equations [J]. *Fractal and Fractional*, 2023, 7(5): 406.
- [7] HAYAT A M, RIAZ M B, ABBAS M, et al. Numerical solution to the time-fractional Burgers-Huxley equation involving the mittag-leffler function [J]. *Mathematics*, 2024, 12(13): 2137.
- [8] SEVINIK ADIGÜZEL R, AKSOY Ü, KARAPINAR E, et al. On the solution of a boundary value problem associated with a fractional differential equation [J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2024, 47(13): 10928-10939.
- [9] ETEFA M, N'GUÉRÉKATA G M, BENCHOHRA M. Existence and uniqueness of solutions to impulsive fractional differential equations via the deformable derivative [J]. *Applicable Analysis*, 2025, 104(1): 15-26.
- [10] FAZLI H, SUN H G, AGHCHI S, et al. On a class of nonlinear nonlocal fractional differential equations [J]. *Carpathian Journal of Mathematics*, 2021, 37(3): 441-448.

- [11] YADAV P, JAHAN S, NISAR K S. Solving fractional Bagley-Torvik equation by fractional order Fibonacci wavelet arising in fluid mechanics [J]. *Ain Shams Engineering Journal*, 2024, 15(1): 102299.
- [12] KHALIL R, AL HORANI M, YOUSEF A, et al. A new definition of fractional derivative [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, 264: 65-70.
- [13] ALSULAMI M, AL-MAZMUMY M, ALYAMI M A, et al. Generalized Laplace transform with adomian decomposition method for solving fractional differential equations involving ψ -Caputo derivative [J]. *Mathematics*, 2024, 12(22): 3499.
- [14] SANTINA D, KAMRAN, ASIF M, et al. Application of the inverse Laplace transform techniques to solve the generalized Bagley-Torvik equation including Caputo's fractional derivative [J]. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 2024, 10: 100664.
- [15] JIN B T. *Fractional differential equations: an approach via fractional derivatives* [M]. Cham: Springer International Publishing, 2021.
- [16] DU X R, MENG Y, PANG H H. Iterative positive solutions to a coupled hadamard-type fractional differential system on infinite domain with the multistrip and multipoint mixed boundary conditions [J]. *Journal of Function Spaces*, 2020, 2020: 6508075.
- [17] XU X J, ZHANG H N. Multiple positive solutions to singular positive and semipositone m -point boundary value problems of nonlinear fractional differential equations [J]. *Boundary Value Problems*, 2018, 2018(1): 34.
- [18] JIANG D Q, GAO W J. Upper and lower solution method and a singular boundary value problem for the one-dimensional p -Laplacian [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, 252(2): 631-648.

The Positive Solutions for A Class of Boundary Value Problem of Fractional Differential Equations with Parameter-Dependent Boundary Conditions

YUE Wenxuan, ZHOU Wenxue, CHEN Xiao, YUAN Jiajia

(College of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: It studies a class of boundary value problems for Caputo fractional differential equations with parameter-dependent nonlinear boundary conditions. By means of Laplace transform, fixed point theorems, and cone theory, the conditions for the existence, multiplicity, and nonexistence of positive solutions to the problem are established. Finally, the theoretical results are verified by an example.

Keywords: fractional differential equation; Laplace transform; fixed point theorem; Caputo-type fractional derivatives; parameter-dependent boundary condition; existence of a positive solution

(责任编辑 陈新颖)