运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20260101

集优化中一类弱有效解的拉格朗日乘子方法*

李荣阳,赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331)

摘要:对有约束集优化问题的弱有效解进行研究。通过引入 C-凸类和 C-有界的概念,参考向量优化问题中的拉格朗日方法,在集优化问题中引入弱有效解的拉格朗日乘子,将有约束集优化问题转化为无约束集优化问题;进一步证明了这 2 个问题之间解的关系,并结合算例对相关结论进行验证。所建立的拉格朗日乘子定理为集优化问题提供了可推广的理论工具。

关键词:集优化;拉格朗日乘子;弱有效解
中图分类号:O221.6 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2026)01-0001-06

向量优化是优化理论中的一个重要课题,已有许多学者对此进行了研究。向量优化问题(vector optimization problem,VOP)的数学模型可表示为:

$$(\text{VOP})\ \min f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in X,$$

其中:$f:X\to Y$ 是一个向量值映射,X 和 Y 分别是线性空间和局部实凸空间。学者们探讨了 VOP 的不同解法,例如有效解、弱有效解和真有效解等[1-3]。

随着集值分析的发展,多位学者开始关注以下集值优化问题[4-5](set-valued optimization problem,SVOP):

$$(\text{SVOP})\ \min F(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in X,$$

其中:$F:X\rightrightarrows Y$ 是一个集值映射。当 $F(\boldsymbol{x})$ 是单点集映射时,SVOP 就退化为了 VOP。在 SVOP 中,许多解的概念被提出,包括 Benson 适当有效解[6]、Hening 适当有效解[7]和超有效解[8]等。近些年来,已有学者开始利用序凸锥来实现 2 个集合之间的比较,这种方法被称为集合法[9]。1997 年 Kuroiwa 等人[10]基于锥引入了 6 种集合序关系。2007 年 Hernández 等人[11]提出了集优化问题(set optimization problem,SOP)的有效解与弱有效解,并研究了该问题的对偶性、拉格朗日乘子法则及鞍点特性。2018 年 Hernández 等人[12]则深入探讨了改进集在 SOP 中的应用。针对 SOP 的解的存在性[13]、标量化方法[14]以及解集的连通性[15]等方向,学界也展开了广泛研究。

本文在已有文献基础上,对弱有效解的拉格朗日乘子进行了研究,证明了有约束集优化问题(constrained set optimization problem,CSOP)可以转化为无约束集优化问题(unconstrained set optimization problem,USOP)以及解之间的关系。

1 预备知识

设 X 和 Y 均为实的局部凸空间,X^* 和 Y^* 分别是 X 和 Y 的对偶空间,每个空间的零元素用 $\mathbf{0}$ 来表示。定义 $P(Y)=\{A\subseteq Y\mid A\neq\varnothing\}$。任取 $C\in P(Y)$。C 被称为凸集当且仅当:

$$\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2\in C,\forall\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in C,\forall\lambda\in[0,1]。$$

C 被称为锥当且仅当:

* **收稿日期**:2025-10-31 **网络出版时间**:2026-03-03T11:30
资助项目:国家重点研发计划项目(No. 2023YFA1011302);国家自然科学基金面上项目(No. 12171063);重庆市教育委员会科学技术研究计划青年项目(No. KJQN202500510);重庆市自然科学基金面上项目(No. CSTB2025NSCQ-GPX0994)
第一作者简介:李荣阳,男,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:1773729742@qq.com;**通信作者简介**:赵克全,男,教授,博士生导师,E-mail:kequanz@163.com
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20260303.0903.004

$$\lambda \boldsymbol{x} \in C, \forall \boldsymbol{x} \in C, \forall \lambda \geqslant 0。$$

锥 C 被称为尖锥当且仅当 $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}\}$。如果 $C \neq \{\mathbf{0}\}$ 且 $C \neq Y$,则称 C 为非平凡的。C 的内部和闭包分别记作 $\mathrm{int}\, C$ 和 $\mathrm{cl}\, C$。除非另有说明,下文中的 C, D 分别表示 Y, Z 中的尖凸锥且 C, D 的内部和闭包均非空。

定义 1[16] 设 $A \in P(Y)$,$\boldsymbol{x} \in A$,则:

1) $\boldsymbol{x}$ 是 A 的弱极小元当且仅当 $(A - \boldsymbol{x}) \cap (-\mathrm{int}\, C) = \varnothing$,记作 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{WMin}\, A$;

2) $\boldsymbol{x}$ 是 A 的弱极大元当且仅当 $(A + \boldsymbol{x}) \cap (-\mathrm{int}\, C) = \varnothing$,记作 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{WMax}\, A$。

定义 2[17] 设 $A, B \in P(Y)$,定义序关系 $\leqslant_C^c$ 如下:

$$A \leqslant_C^c B \Leftrightarrow A = B \text{ 或者 } B - A \subseteq C \text{ 且 } A \neq B。$$

在序关系 $\leqslant_C^c$ 中,若将 C 替换为 $\mathrm{int}\, C$ 则得到序关系 $\leqslant_{\mathrm{int}\, C}^c$[18]:

$$A \leqslant_{\mathrm{int}\, C}^c B \Leftrightarrow B - A \subseteq \mathrm{int}\, C \text{ 且 } A \neq B。$$

基于集合序关系 $\leqslant_{\mathrm{int}\, C}^c$,定义 $\mathcal{S} \subseteq P(Y)$ 中的弱极小元和弱极大元如下所示。

定义 3 设 $\mathcal{S} \subseteq P(Y)$,$A \in \mathcal{S}$,则有:

1) 称 A 是关于 $\mathcal{S}$ 的一个 c-弱极小元,如果对于任意 $B \in \mathcal{S}$ 且满足 $B \leqslant_{\mathrm{int}\, C}^c A$,都有 $A \leqslant_{\mathrm{int}\, C}^c B$。记作 $A \in c\text{-}\mathrm{WMin}\, S$。

2) 称 A 是关于 $\mathcal{S}$ 的一个 c-弱极大元,如果对于任意 $B \in \mathcal{S}$ 且满足 $A \leqslant_{\mathrm{int}\, C}^c B$,都有 $B \leqslant_{\mathrm{int}\, C}^c A$。记作 $A \in c\text{-}\mathrm{WMax}\, S$。

性质 1 设 $\mathcal{S} \subseteq P(Y)$,$A \in \mathcal{S}$ 满足 $\mathrm{WMin}\, A \neq \varnothing$。$A$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一个 c-弱极小元当且仅当不存在 $B \in \mathcal{S}$ 使得 $B \leqslant_{\mathrm{int}\, C}^c A$,且 $A \neq B$。

证明 充分性是显然的,下面证明必要性。

假设 $A \in \mathrm{WMin}\mathcal{S}$,且存在一个 $B \in \mathcal{S}$ 使得:

$$B \leqslant_{\mathrm{int}\, C}^c A, \tag{1}$$

则由式(1)可得:

$$A - B \subseteq \mathrm{int}\, C。 \tag{2}$$

又因为 A 是 $\mathcal{S}$ 中的 c-弱有效解,可以得到 $A \leqslant_{\mathrm{int}\, C}^c B$,即:

$$B - A \subseteq \mathrm{int}\, C。 \tag{3}$$

由式(2)和式(3)可知:

$$B - A \subseteq \mathrm{int}\, C \cap (-\mathrm{int}\, C),$$

又因为 $\mathrm{int}\, C \cap (-\mathrm{int}\, C) = \varnothing$,与 $A \neq B$ 矛盾。 证毕

2 拉格朗日乘子

下面将建立 SOP 的拉格朗日乘子规则。假设 X 是一个线性空间,A 是 X 的一个非空子集。

定义 4[19] 集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 被称为在 A 中 C-类凸的当且仅当:

$$\lambda F(\boldsymbol{x}_1) + (1 - \lambda) F(\boldsymbol{x}_2) \subseteq F(A) + C, \forall \lambda \in [0, 1], \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in A。$$

注 1[19] F 在 A 中是 C-类凸的当且仅当 $F(A) + C$ 在 Y 上是凸集。

定义 5[20] 设 C 是 Y 中的尖凸锥,若 $C^+ = \{\boldsymbol{y} \in Y^* \mid \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \geqslant 0, \forall \boldsymbol{x} \in C\}$,则称 C^+ 为 C 的对偶锥。

定义 6[21] 设 B 是 Y 上的一个非空子集,B 被称为是 C-有界的当且仅当对于 Y 中零元的任意邻域 U,存在 $t > 0$ 使得 $B \subseteq tU + C$。

性质 2 假设 Y 中的非空子集 B 是 C-有界的,那么 $\bigcap_{b \in B} (b - C) \neq \varnothing$。

证明 令 $c \in \mathrm{int}\, C$,记 $U = -c + \mathrm{int}\, C$。显然 U 是 Y 的零元的一个邻域。又因为 $B \subseteq Y$ 是 C-有界的,故存在 $t > 0$ 使得:

$$B \subseteq tU + C = t(-c + \mathrm{int}\, C) + C \subseteq -tc + \mathrm{int}\, C + C \subseteq -tc + C。$$

从而找到了 $-tc \in \bigcap_{b \in B} (b - C)$,因此 $\bigcap_{b \in B} (b - C) \neq \varnothing$。 证毕

若 $F:X \rightrightarrows Y$，$G:X \rightrightarrows Z$，设 F，G 分别是 A 上的 2 个集值映射。现在考虑以下 SOP：

$$(\mathrm{SOP})\ \min\{F(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x}\in\Omega\},$$

其中：$\Omega\in\{\boldsymbol{x}\in A \mid G(\boldsymbol{x})\cap(-D)\neq\varnothing\}$。下面给出 SOP 弱有效解的定义。

定义 7　假设 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$，则 $\boldsymbol{x}_0$ 被称为 SOP 中的一个 c-弱有效解当且仅当 $F(\boldsymbol{x}_0)\in c\text{-WMin}\{F(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x}\in\Omega\}$。

令 $\mathcal{L}(Z,Y)$ 表示从 Z 到 Y 的所有连续线性映射集，记：

$$\mathcal{L}_+(Z,Y)=\{T\in\mathcal{L}(Z,Y) \mid T(D)\subseteq C\}。$$

定义 8[20]　SOP 满足广义 Slater 约束条件当且仅当存在 $\boldsymbol{x}'\in A$ 使得 $G(\boldsymbol{x}')\cap(-\mathrm{int}\ D)\neq\varnothing$。

定理 1　设 $\boldsymbol{x}_0\in A$。假设满足以下条件：

1) SOP 满足广义 Slater 约束条件；

2) $F(\boldsymbol{x}_0)$ 是 C-有界的；

3) 集值映射 $(F,G):X \rightrightarrows Y\times Z$ 在 A 上是 $C\times D$-类凸的；

4) 设 $B=\bigcap_{\boldsymbol{y}_0\in F(\boldsymbol{x}_0)}(\boldsymbol{y}_0-C)$，$H=\{(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)\in C^+\backslash\{0\}\times D^+ \mid (\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)$ 分离 $(F,G)(A)$ 和 $B\times(-D)\}$。如果 $H\neq\varnothing$，那么存在 $(\boldsymbol{y}_0^*,\boldsymbol{z}_0^*)\in H$ 和 $(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0)\in F(\boldsymbol{x}_0)\times G(\boldsymbol{x}_0)$ 使得：

$$\inf\{\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_0^*\rangle+\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}_0^*\rangle \mid \langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle\in F(A)\times G(A)\}=\langle\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{y}_0^*\rangle+\langle\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{z}_0^*\rangle; \tag{4}$$

5) 不存在 $\boldsymbol{x}\in A$ 使得 $(F(\boldsymbol{x}_0)-F(\boldsymbol{x}))\cap\mathrm{int}\ C\neq\varnothing$。

那么存在 $T\in\mathcal{L}_+(Z,Y)$ 使得：

$$T(G(\boldsymbol{x}_0)\cap(-D))\subseteq -C,$$

且 $\boldsymbol{x}_0$ 是以下 USOP 的 c-弱有效解：

$$(\mathrm{USOP})\ \min\{F(\boldsymbol{x})+(T\circ G)(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x}\in A\}。$$

证明　显然 B 是 Y 中的凸集。因为 $F(\boldsymbol{x}_0)$ 是 C-有界的，结合性质 2 可得 $B=\bigcap_{\boldsymbol{y}_0\in F(\boldsymbol{x}_0)}(\boldsymbol{y}_0-C)\neq\varnothing$。因此 $B\times(-D)$ 是 $Y\times Z$ 中的凸集且：

$$\mathrm{int}(B\times(-D))=\mathrm{int}\ B\times\mathrm{int}(-D)\neq\varnothing。$$

通过条件 3) 可得 $(F,G)(A)+C\times D$ 在 $Y\times Z$ 中是凸集，下面证明：

$$((F,G)(A)+C\times D)\cap\mathrm{int}(B\times(-D))=\varnothing。 \tag{5}$$

假设存在 $(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{z}})\in((F,G)(A)+C\times D)\cap\mathrm{int}(B\times(-D))$，那么存在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in A$ 使得：

$$\bar{\boldsymbol{y}}\in(F(\bar{\boldsymbol{x}})+C)\cap\mathrm{int}\ B,$$

$$\bar{\boldsymbol{z}}\in(G(\bar{\boldsymbol{x}})+D)\cap\mathrm{int}(-D)。$$

由 $\bar{\boldsymbol{z}}\in(G(\bar{\boldsymbol{x}})+D)\cap\mathrm{int}(-D)$ 得，存在 $\boldsymbol{z}'\in G(\bar{\boldsymbol{x}})$ 和 $\boldsymbol{d}\in D$ 使得 $\bar{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{z}'+\boldsymbol{d}$。因为 $\bar{\boldsymbol{z}}\in\mathrm{int}(-D)$，故有：

$$\boldsymbol{z}'=\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{d}\in\mathrm{int}(-D)-D\subseteq -D,$$

即 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\Omega$。由 $\bar{\boldsymbol{y}}\in(F(\bar{\boldsymbol{x}})+C)\cap\mathrm{int}\ B$ 得，存在 $\boldsymbol{y}'\in F(\bar{\boldsymbol{x}})$，$\boldsymbol{c}\in C$ 使得 $\bar{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{c}\in\mathrm{int}\ B$。又由 $B-C\subseteq B$，可得 $\mathrm{int}\ B-C\subseteq\mathrm{int}\ B$。故 $\boldsymbol{y}'=\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{c}\in\mathrm{int}\ B$。从而有：

$$\boldsymbol{y}'=\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{c}\in\mathrm{int}\ B\subseteq\bigcap_{\boldsymbol{y}_0\in F(\boldsymbol{x}_0)}(\boldsymbol{y}_0-\mathrm{int}\ C), \tag{6}$$

由式(6)可得：

$$\boldsymbol{y}'\in\boldsymbol{y}_0-\mathrm{int}\ C,\ \forall\,\boldsymbol{y}_0\in F(\boldsymbol{x}_0)。$$

上式等价于 $F(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{y}'\subseteq\mathrm{int}\ C$。由此可得：

$$(F(\boldsymbol{x}_0)-F(\bar{\boldsymbol{x}}))\cap\mathrm{int}\ C\neq\varnothing,$$

与条件 4) 矛盾。因此式(5)成立。

由 Hahn-Banach 分离定理可知，存在非零连续线性泛函 $(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)\in(Y^*,Z^*)\backslash\{\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}\}$ 使得：

$$\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}^*\rangle+\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}^*\rangle\geqslant\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}^*\rangle+\langle-\boldsymbol{d},\boldsymbol{z}^*\rangle,\ \forall\,(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in(F,G)(A)+C\times D,\ \forall\,\boldsymbol{b}\in B,\ \forall\,\boldsymbol{d}\in D。 \tag{7}$$

由式(7)以及文献[22]可得 $(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)\in C^+\times D^+$。

下证 $\boldsymbol{y}^*\neq\boldsymbol{0}$。假设 $\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{0}$，因为 $(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)$ 为非零连续线性泛函，故 $\boldsymbol{z}^*\neq\boldsymbol{0}$。取 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$，由式(7)可得：

$$\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}^*\rangle\geqslant 0,\ \forall\,\boldsymbol{z}\in G(A)。 \tag{8}$$

再通过条件1),即存在$\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'\in A$,使得$\boldsymbol{z}'\in G(\boldsymbol{x}')\cap(-\mathrm{int}\ D)$。又$\boldsymbol{z}^*\in D^+$,故有$\langle \boldsymbol{z}',\boldsymbol{z}^*\rangle<0$,与式(8)矛盾。从而$\boldsymbol{y}^*\neq\mathbf{0}$。因此,式(7)可以简化为:

$$\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}^*\rangle+\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}^*\rangle\geqslant\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{y}^*\rangle+\langle -\boldsymbol{d},\boldsymbol{z}^*\rangle,\ \forall(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in(F,G)(A),\ \forall \boldsymbol{b}\in B,\ \forall \boldsymbol{d}\in D, \tag{9}$$

由$(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)\in C^+\times D^+$和式(9)可得$H\neq\mathbf{0}$。通过条件5)可知,存在$(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)\in H$,$(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0)\in F(\boldsymbol{x}_0)\times G(\boldsymbol{x}_0)$,使得式(4)成立,即:

$$\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_0^*\rangle+\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}_0^*\rangle\geqslant\langle \boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{y}_0^*\rangle+\langle \boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{z}_0^*\rangle,\ \forall(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in(F,G)(A)。 \tag{10}$$

固定$\boldsymbol{c}_0\in\mathrm{int}\ C$,由于$\boldsymbol{y}_0^*\in C^+$,$\langle \boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{y}_0^*\rangle>0$,定义映射$T:Z\rightrightarrows Y$如下:

$$T(\boldsymbol{z})=\frac{\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}_0^*\rangle}{\langle \boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{y}_0^*\rangle}\boldsymbol{c}_0,\ \forall \boldsymbol{z}\in Z。 \tag{11}$$

显然$T\in\mathcal{L}_+(Z,Y)$,由此可得$\boldsymbol{z}_0^*\in D^+$使得:

$$\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}_0^*\rangle\leqslant 0,\ \forall \boldsymbol{z}\in G(\boldsymbol{x}_0)\cap(-D), \tag{12}$$

由式(11)和式(12)可知式(5)成立。

最后证明不存在$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\in A)$使得

$$F(\boldsymbol{x})+(T\circ G)(\boldsymbol{x})\leqslant^{c}_{\mathrm{int}\ C}F(\boldsymbol{x}_0)+(T\circ G)(\boldsymbol{x}_0)$$

成立。假设存在$\tilde{\boldsymbol{x}}$使得

$$F(\tilde{\boldsymbol{x}})+(T\circ G)(\tilde{\boldsymbol{x}})\leqslant^{C}_{\mathrm{int}\ C}F(\boldsymbol{x}_0)+(T\circ G)(\boldsymbol{x}_0)$$

成立,即:

$$F(\boldsymbol{x}_0)+(T\circ G)(\boldsymbol{x}_0)-(F(\tilde{\boldsymbol{x}})+(T\circ G)(\tilde{\boldsymbol{x}}))\subseteq\mathrm{int}\ C。$$

设$\boldsymbol{y}_0\in F(\boldsymbol{x}_0)$,$\boldsymbol{z}_0\in G(\boldsymbol{x}_0)$。那么存在$\tilde{\boldsymbol{y}}\in F(\tilde{\boldsymbol{x}})$,$\tilde{\boldsymbol{z}}\in G(\tilde{\boldsymbol{x}})$和$\tilde{\boldsymbol{c}}\in\mathrm{int}\ C$使得:

$$\boldsymbol{y}_0+\frac{\langle \boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{z}_0^*\rangle}{\langle \boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{y}_0^*\rangle}\boldsymbol{c}_0-\left(\tilde{\boldsymbol{y}}+\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{z}_0^*\rangle}{\langle \boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{y}_0^*\rangle}\boldsymbol{c}_0\right)=\tilde{\boldsymbol{c}}。 \tag{13}$$

式(13)两边同时作用$\boldsymbol{y}_0^*$可得:

$$\langle \boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{y}_0^*\rangle+\langle \boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{z}_0^*\rangle-\langle \tilde{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{y}_0^*\rangle-\langle \tilde{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{z}_0^*\rangle=\langle \tilde{\boldsymbol{c}},\boldsymbol{y}_0^*\rangle。 \tag{14}$$

因为$\boldsymbol{y}_0^*\in C^+$,所以有:

$$\langle \tilde{\boldsymbol{c}},\boldsymbol{y}_0^*\rangle>0, \tag{15}$$

由式(14)和式(15)可得:

$$\langle \boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{y}_0^*\rangle+\langle \boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{z}_0^*\rangle>\langle \tilde{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{y}_0^*\rangle+\langle \tilde{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{z}_0^*\rangle,$$

与式(10)矛盾。所以由性质1可知$\boldsymbol{x}_0$是USOP的c-弱有效解。　　证毕

下面给出一个算例。

例1　设$X=\mathbf{R}$,$Y=\mathbf{R}^2$,$Z=\mathbf{R}$,$C=\{(a,b)\in\mathbf{R}^2\mid a\geqslant 0,b\geqslant 0\}$,$D=\mathbf{R}^+$,$A=[0,2]$。集值映射$F:X\rightrightarrows Y$和$G:X\rightrightarrows Z$在$A$上被定义为:

$$F(x)=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\},G(x)=\{x-1\}。$$

约束集为:

$$\Omega=\{x\in A\mid G(x)\cap(-D)\neq\varnothing\}=\{x\in[0,2]\mid x-1\leqslant 0\}=[0,1],$$

设$x_0=0\in A$,可以很容易地验证满足定理1的条件1)~5)。存在线性映射T满足:

$$T(z)=\frac{\langle z,z_0^*\rangle}{\langle \boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{y}_0^*\rangle}\boldsymbol{c}_0,\ \forall z\in Z,$$

其中:$(\boldsymbol{y}_0^*,z_0^*)=((1,0),1)\in H$,$\boldsymbol{c}_0=(1,0)\in\mathrm{int}\ C$。则$T(z)=(z,0)$。显然定义的集值映射$T$满足式(5)。

上面CSOP可转化为USOP:

$$\min_{x\in A}\{F(x)+T(G(x))\}=$$
$$\{(x,y)+(x-1,0)\mid y\geqslant x^2\}=\{(2x-1,y)\mid y\geqslant x^2\}。$$

当$x_0=0$时,有:

$$F(0)+T(G(0))=\{(-1,y)\mid y\geqslant 0\}。$$

对任意 $x\in A$,若 $F(x)+T(G(x))\leqslant^{c}_{\operatorname{int} C}F(0)+T(G(0))$,则:

$$(-1,y_1)-(2x-1,y_2)=(-2x,y_1-y_2)\in \operatorname{int} C,\forall y_2\geqslant x^2,\forall y_1\geqslant 0。$$

当$-2x>0$ 且 $y_1-y_2>0$ 时成立。又因为 $x\in[0,2]$,则有$-2x\leqslant 0$,得到矛盾。由此可得 $x_0=0$ 是 USOP 的 c-弱有效解。

3　结论

本文引入集值映射的 C-类凸性、C-有界性等概念,结合广义 Slater 约束条件,建立了拉格朗日乘子法则,将 CSOP 转化为 USOP,并利用 Hahn-Banach 分离定理等工具,严格证明了拉格朗日乘子的存在性,构建了 CSOP 与 USOP 间的解的对应关系。实例结果表明,基于适当序关系的弱有效解定义,拉格朗日乘子法则可行,能够有效处理特定场景下的 SOP。

参考文献:

[1] ADÁN M,NOVO V. Proper efficiency in vector optimization on real linear spaces[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2004,121(3):515-540.

[2] CHEN G Y,RONG W D. Characterizations of the Benson proper efficiency for nonconvex vector optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1998,98:365-384.

[3] GUTIERREZ C,HUERGA L,JIMENEZ B,et al. Approximate solutions of vector optimization problems via improvementsets in real linear spaces[J]. Journal of Global Optimization,2018,70:875-901.

[4] KHAN A A,TAMMER C,ZALINESCU C. Set-valued optimization[M]. Berlin:Springer-Verlag,2016.

[5] CHEN G,HUANG X,YANG X. Vector optimization:set-valued and variational analysis[M]. Berlin:Springer,2005.

[6] LI Z F. Benson proper efficiency in the vector optimization of set-valued maps[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1998,98(3):623-649.

[7] ZHOU Z A,YANG X M,PENG J W. ε-Henig proper efficiency of set-valued optimization problems in real ordered linear spaces[J]. Optimization Letters,2014,8(6):1813-1827.

[8] XIA L Y,QIU J H. Superefficiency in vector optimization with nearly subconvexlike set-valued maps[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2008,136(1):125-137.

[9] KHAN A A,TAMMER C,ZĂLINESCU C. Set-valued optimization: an introduction with applications[M]. Berlin:Springer,2015.

[10] KUROIWA D,TANAKA T,XUAN DUC HA T. On cone convexity of set-valued maps[J]. Nonlinear Analysis:Theory,Methods & Applications,1997,30(3):1487-1496.

[11] HERNÁNDEZ E,RODRíGUEZ-MARíN L. Lagrangian duality in set-valued optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2007,134(1):119-134.

[12] HERNÁNDEZ E,RODRíGUEZ-MARíN L. Existence theorems for set optimization problems[J]. Nonlinear Analysis:Theory,Methods & Applications,2007,67(6):1726-1736.

[13] HAN Y. Nonlinear scalarizing functions in set optimization problems[J]. Optimization,2019,68(9):1685-1718.

[14] HAN Y. Connectedness of weak minimal solution set for set optimization problems[J]. Operations Research Letters,2020,48(6):820-826.

[15] HAN Y,WANG S H,HUANG N J. Arcwise connectedness of the solution sets for set optimization problems[J]. Operations Research Letters,2019,47(3):168-172.

[16] YANG X M,YANG X Q,CHEN G Y. Theorems of the alternative and optimization with set-valued maps[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2000,107(3):627-640.

[17] JAHN J,HA T X D. New order relations in set optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2011,148(2):209-236.

[18] LAHA V,MARÉCHAL P,MISHRA S K. Optimization,variational analysis and applications:IFSOVAA-2020,Varanasi,

India, February 2-4[M]. Singapore: Springer, 2021.

[19] PAECK S. Convexlike and concavelike conditions in alternative, minimax, and minimization theorems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1992, 74(2): 317-332.

[20] JAHN J. Vector optimization[M]. Berlin: Springer, 2004.

[21] LUC D T. Theory of vector optimization[M]. Berlin: Springer, 1989.

[22] ZHOU Z A, HUANG M, KÖBIS E. Globally proper efficiency of set optimization problems based on the certainly set less order relation[J]. Applicable Analysis, 2024, 103(1): 184-197.

Operations Research and Cybernetics

The Lagrange Multiplier Method for a Class of Weakly Efficient Solutions in Set Optimization

LI Rongyang, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: It investigates weakly efficient solutions of constrained set optimization problems. By introducing the notions of C-convexlike and C-boundedness, and referencing the Lagrange multiplier approach commonly used in vector optimization, a Lagrange multiplier framework for weakly efficient solutions is developed in set optimization. This framework enables the transformation of constrained set optimization problems into equivalent unconstrained formulations. Moreover, it establishes the relationship between the solutions of the original and transformed problems and substantiates the theoretical results with numerical examples. The proposed Lagrange multiplier theorem offers an extendable theoretical foundation for further studies in set optimization.

Keywords: set optimization; Lagrangian multiplier; weakly efficient solution

(责任编辑 黄 颖)