运筹学与控制论 DOI:10.11721/cqnuj20260103

一类完全多部图的符号边控制数*

赵衍才[1,2]

(1. 无锡城市职业技术学院 会计学院,江苏 无锡 214153;2. 无锡环境科学与工程研究中心,江苏 无锡 214153)

摘要:设 G 是一个具有顶点集 V 和边集 E 的图,$G\in(V,E)$。一个函数 $f:E(G)\to\{-1,1\}$ 称为 G 的一个符号边控制函数,若对每一条边 $e\in E$ 都有 $f[e]=f(N[e])=\sum_{e'\in N[e]}f(e')\geqslant 1$ 成立。$w(f)=\sum_{e\in E}f(e)$ 称为 f 的权,G 的符号边控制数 $\gamma_s'(G)$ 定义为 G 的所有符号边控制函数的权的最小值。对完全多部图的符号边控制数进行讨论,当 G 是一个完全 r-部图,其中 r 为奇数且所有的部的大小相同时,给出了 $\gamma_s'(G)$ 的上界和下界,为计算一般的完全多部图的相关参数提供了解决思路。

关键词:符号边控制;符号边控制数;完全多部图

中图分类号:O224 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2026)01-0027-07

1 预备知识

本文考虑的图都是有限、无向、无环和重边的图。G 是一个具有顶点集 V 和边集 E 的图,$G\in(V,E)$。对点 $v\in V$,v 的邻域 $N[v]$是指与 v 相邻的所有点的集合,v 的闭邻域表示为 $N[v]=N(v)\cup\{v\}$。类似地,对一条边 $e\in E$,e 的邻域 $N[e]$是指与 e 相邻的所有边的集合,e 的闭邻域表示为 $N[e]=N(e)\cup\{e\}$。本文的概念和术语可参考文献[1]。

对于任意整数 $r\geqslant 2$,一个 r-部图是指这样的一个图:它的顶点集可以表示为 r 个子集(称为部)$V_1,V_2,\cdots,V_r$ 的并集,且同一部中的任意 2 点之间都无边相连。具有 r-划分$(V_1,V_2,\cdots,V_r)$的 r-部图 G 也记作 $G[V_1,V_2,\cdots,V_r]$。

如果 r-部图 $G[V_1,V_2,\cdots,V_r]$中的每个部中的每个点与其他 $r-1$ 部中的所有点都有边相连,则 $G[V_1,V_2,\cdots,V_r]$称为一个完全 r-部图或完全多部图。如果 $|V_1|=n_1$,$|V_2|=n_2$,$\cdots$,$|V_r|=n_r$,则该完全 r-部图记作 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$。特别地,若 $r=2$,此时的完全 r-部图称为完全二部图;若 $r=3$,此时的完全 r-部图称为完全三部图。

函数 $f:V(G)\to\{-1,1\}$称为 G 的一个符号控制函数[2],如果对每个点 $v(v\in V(G))$都有

$$f[v]=f(N[v])=\sum_{u\in N[v]}f(u)\geqslant 1$$

成立。函数 $f:E(G)\to\{-1,1\}$称为 G 的一个符号边控制函数(signed edge domination function,SEDF)[3],若对每一条边 $e(e\in E)$都有

$$f[e]=f(N[e])=\sum_{e'\in N[e]}f(e')\geqslant 1$$

成立。$w(f)$称为 f 的权,且 $w(f)=\sum_{e\in E}f(e)$。G 的符号边控制数 $\gamma_s'(G)$定义为 G 的所有符号边控制函数的权的最小值,即 $\gamma_s'(G)=\min\{w(f)\mid f$ 是 G 的一个符号边控制函数$\}$。当 $\gamma_s'(G)=w(f)$时,f 称为 G 的 γ_s'-函数。符号边控制的概念自提出后就得到学者们的广泛研究[4-12],同时,研究者们还对边控制参数以外的其他控制参数也进行了讨论[13-15]。

文献[3]给出了完全二部图的符号边控制数的精确值。文献[11]给出了某些类型的完全三部图的符号边控制数的精确值。文献[12]给出了当 r 为偶数且所有的部大小相等时的完全 r-部图的符号边控制数的上界和下

* **收稿日期**:2024-05-16 **修回日期**:2025-11-23 **网络出版时间**:2026-03-05T10:30

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 12361067)

第一作者简介:赵衍才,男,教授,博士,研究方向为图论与组合优化,E-mail:zhaoyc69@126.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20260305.0946.002

界。文献[11-12]都将完全多部图的符号边控制数作为未解决的问题而提出。

本文继续研究完全多部图的符号边控制数,给出了当 r 为奇数且所有的部大小相等时的完全 r-部图的符号边控制数的上界和下界,从而部分解决了文献[11-12]提出的问题。

2 符号边控制数的界

给定 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 的一个符号边控制函数 f,则对任意的 $i,j\in\{1,2,\cdots,r\}$,使用如下的记法:将 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 的 r 部记作 $V_1,V_2,\cdots,V_r$,并且 $|V_i|=n_i$,$V_i=\{v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{in_i}\}$;对于任意的 $v\in V$,将与 v 相关联的所有边的集合记作 $E(v)$,并记:

$$s_v=\sum_{e\in E(v)}f(e),E(V_i)=\bigcup_{v\in V_i}E(v),f(E(V_i))=\sum_{e\in E(V_i)}f(e),$$
$$E(V_i,V_j)=\{e\mid e=uv,u\in V_i,v\in V_j,i,j\in\{1,2,\cdots,r\},i\neq j\},$$
$$f(V_i,V_j)=\sum_{e\in E(V_i,V_j)}f(e)\text{ 且 }s_i=\sum_{v\in V_i}s_v;$$

对于一个整数 k 和某个 $i\in\{1,2,\cdots,r\}$,记 $V_i(k)=\{v_{ij}\mid s_{v_{ij}}=k,j=1,2,\cdots,n_i\}$,将 $\bigcup_{j\in\{1,2,\cdots,r\}\backslash\{i\}}V_j$ 记作 $\bigcup_{j\neq i}V_j$;对于某一个 $i\in\{1,2,\cdots,r\}$,将 $\sum_{j\in\{1,2,\cdots,r\}\backslash\{i\}}f(V_j)$ 记作 $\sum_{j\neq i}f(V_j)$。

根据符号边控制函数的定义可得到如下结论。

结论 一个函数 $f:E(K_{n_1,n_2,\cdots,n_r})\to\{-1,1\}$ 是 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 的一个符号边控制函数的充要条件是对任意的 $u\in V_i,v\in V_j,i,j\in\{1,2,\cdots,r\},i\neq j$,都有 $f[uv]=s_u+s_v-f(uv)\geqslant 1$ 成立。

下面给出本文的主要结果,完全多部图的符号边控制数 $\gamma_s'(K_{n,n,\cdots,n})$ 的上界和下界。

定理 1 设 $r\geqslant 3$ 且 r 为奇数,则对任意的完全 r-部图 $K_{n,n,\cdots,n}$,有:

$$\frac{(r-1)n}{2}\leqslant\gamma_s'(K_{n,n,\cdots,n})\leqslant\begin{cases}\dfrac{rn}{2},n=4k\\ \dfrac{rn+3}{2},n=4k+1\\ \dfrac{rn+2}{2},n=4k+2\\ \dfrac{rn+1}{2},n=4k+3\end{cases}。$$

在证明定理 1 之前先给出如下引理。

引理 1 设 f 是完全 r-部图 $K_{n,n,\cdots,n}$ 的一个符号边控制函数,则 $W(f)$ 与 $\frac{r(r-1)n}{2}$ 具有相同的奇偶性。

证明 因为 $W(f)=\sum_{e\in E}f(e)$,$|E|=\frac{r(r-1)n^2}{2}$,并且注意到 $f(e)$ 的值要么是 1,要么是 -1,不难看出 $W(f)$ 与 $\frac{r(r-1)n^2}{2}$ 具有相同的奇偶性,从而与 $\frac{r(r-1)n}{2}$ 具有相同的奇偶性。 证毕

证明(定理 1) 首先证明 $\gamma_s'(K_{n,n,\cdots,n})\geqslant\frac{(r-1)n}{2}$。反设存在完全 r-部图 $K_{n,n,\cdots,n}$ 的一个符号边控制函数 f 使得 $W(f)<\frac{(r-1)n}{2}$,下面推出矛盾。

可以断定对任意的 $v\in V$ 都有 $s_v\geqslant 0$ 成立。事实上不失一般性,假设存在某个点 $u\in V_1$ 满足 $s_u=\min\{s_v,v\in V\}=-k$,$k\geqslant 2$(注意到对于每个 $v\in V$,当 r 为奇时,s_v 为偶)。则根据前面的结论,对每个 $v\in V\backslash V_1$ 有 $s_v\geqslant k+1+f(uv)$,对每个 $w\in V_i(k)$,$i\in\{2,3,\cdots,r\}$ 有 $f(uw)=-1$。因此有 $\sum_{i=2}^{r}V_i(k)\leqslant\frac{(r-1)n}{2}+\frac{k}{2}$。否则,$s_u<(r-1)n-2\left(\frac{(r-1)n}{2}+\frac{k}{2}\right)=-k$,与 $s_u=-k$ 的假设矛盾。因此,有:

$$\sum_{v\in V\backslash V_1}s_v\geqslant\left[\frac{(r-1)n}{2}+\frac{k}{2}\right]\cdot k+\left[\frac{(r-1)n}{2}+\frac{k}{2}\right]\cdot(k+2)=(k+1)(r-1)n-k。$$

从而，可以得到：

$$w(f)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}s_v=\frac{1}{2}\Big(\sum_{v\in V_1}s_v+\sum_{v\in V\setminus V_1}s_v\Big)\geqslant\frac{1}{2}((k+1)(r-1)n-k-kn)。$$

将 $w(k)=\frac{1}{2}((k+1)(r-1)n-k-kn)$看作以 k 为自变量的一个函数。因为 $w'(k)=\frac{1}{2}[(r-1)n-1-n]\geqslant 0$，故 $w(k)$是增函数。从而有：

$$w(f)=\frac{1}{2}((k+1)(r-1)n-k-kn)\geqslant\frac{1}{2}(3(r-1)n-2-2n)=\frac{(3r-5)n}{2}-1\geqslant\frac{rn}{2},$$

得到矛盾。所以，对所有 $v\in V$ 都有 $s_v\geqslant 0$。

令 t 表示集合$\{i\mid$存在点 $v\in V_i$ 满足 $s_v=0,i=1,2,\cdots,r\}$的基数。下面分 3 种情况进行讨论。

情况 1，$t\leqslant\frac{r-1}{2}$。

注意到对任意的 $v\in V$，s_v 均为偶，所以有：

$$w(f)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}s_v\geqslant\frac{1}{2}\cdot(r-t)n\cdot 2>\frac{rn}{2},$$

得到矛盾。

情况 2，$\frac{r-1}{2}<t\leqslant r$。

不失一般性，设对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$都有 $|V_i|>0$。可以断言：对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$都有 $\sum\limits_{j\neq i,j=1}^{t}|V_j(0)|\leqslant\frac{(r-1)n}{2}$。否则，反设对于某个 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$有 $\sum\limits_{j\neq i,j=1}^{t}|V_j(0)|\geqslant\frac{(r-1)n}{2}+1$。设 $u\in V_i$ 满足 $s_u=0$。另一方面，根据前面的结论，对任意的 $v\in\bigcup\limits_{j\neq i,j=1}^{t}V_j(0)$ 都有 $f(uv)=-1$，但这导致 $s_u<0$，与 $s_u\geqslant 0$ 的事实矛盾。既然对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$都有 $\sum\limits_{j\neq i,j=1}^{t}|V_j(0)|\leqslant\frac{(r-1)n}{2}$，将这 t 个不等式相加得：

$$(t-1)\sum_{j=1}^{t}|V_j(0)|\leqslant\frac{(r-1)nt}{2},$$

即：

$$\sum_{j=1}^{t}|V_j(0)|\leqslant\frac{(r-1)nt}{2(t-1)}=\frac{(r-1)n}{2}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)。$$

从而有：

$$w(f)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}s_v\geqslant\frac{1}{2}\left(\left(tn-\frac{(r-1)nt}{2(t-1)}\right)\cdot 2+(r-t)n\cdot 2\right)=$$

$$\left(1-\frac{r-1}{2(t-1)}\right)nt+(r-t)n=rn-\frac{(r-1)n}{2}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\geqslant$$

$$rn-\frac{(r-1)n}{2}\left(1+\frac{1}{\frac{r+1}{2}-1}\right)=rn-\frac{(r-1)n}{2}\frac{r+1}{r-1}=rn-\frac{(r+1)n}{2}=\frac{(r-1)n}{2},$$

得到矛盾。

情况 3，$t=r$。

设存在某个 $v_i\in V_i$ 使得对每个 $i\in\{1,2,\cdots,r\}$都有 $s_{v_i}=0$ 成立，则由前面的结论知，$f(v_iv)=-1$ 对每个 $v\in\bigcup\limits_{j\neq i,j=1}^{r}V_j(0)$成立。因此有 $\sum\limits_{j\neq i,j=1}^{r}|V_j(0)|\leqslant\frac{(r-1)n}{2}$。否则有 $s_{v_i}<0$，与 $s_{v_i}=0$ 的事实矛盾。现在将这 r 个不等式相加，有 $(r-1)\sum\limits_{j=1}^{r}|V_j(0)|\leqslant\frac{r(r-1)n}{2}$，从而有 $\sum\limits_{j=1}^{r}|V_j(0)|\leqslant\frac{rn}{2}$。进而得到：

$$w(f)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}s_v\geqslant\frac{1}{2}\left(rn-\frac{rn}{2}\right)\cdot 2=\frac{rn}{2},$$

得到矛盾。

上述各种情况下的矛盾说明:$\gamma_s'(K_{n,n,\cdots,n})\geqslant\dfrac{(r-1)n}{2}$。

下面证明上界。证明的方法是分别构造 $K_{n,n,\cdots,n}$ 在4种情形下的4个符号边控制函数 f,g,φ,ψ,使得当 $n=4k$ 时,有 $w(f)=\dfrac{rn}{2}$;当 $n=4k+2$ 时,有 $w(g)=\dfrac{rn+2}{2}$;当 $n=4k+1$ 时,有 $w(\varphi)=\dfrac{rn+3}{2}$;当 $n=4k+3$ 时,有 $w(\psi)=\dfrac{rn+1}{2}$。首先构造函数 f 和 g,然后在 f 和 g 的基础上构造 φ 和 ψ。

当 $n=4k$ 时,构造函数 f 如下。对于 $e\in E_1=E(V_1,V_2)\cup E(V_3,V_4)\cup\cdots\cup E(V_{r-2},V_{r-1})$,以 $e\in E(V_1,V_2)$为例,令:

$$f(v_{1i}v_{2j})=\begin{cases}1,\ i>\dfrac{n}{2},j>\dfrac{n}{2},i=j\ \text{为偶}\\(-1)^{i+j+1},\text{否则}\end{cases};$$

对于 $e\in E_2=E(V_2,V_3)\cup E(V_4,V_5)\cup\cdots\cup E(V_{r-1},V_r)$,以 $e\in E(V_2,V_3)$为例,令:

$$f(v_{2i}v_{3j})=\begin{cases}1,\ i\leqslant\dfrac{n}{2},j\leqslant\dfrac{n}{2},i=j\ \text{为偶}\\(-1)^{i+j+1},\text{否则}\end{cases};$$

对于 $e\in E(V_1,V_r)$,令:

$$f(v_{1i}v_{rj})=\begin{cases}1,\ i\leqslant\dfrac{n}{2},j>\dfrac{n}{2},i=j-\dfrac{n}{2}\text{为偶}\\(-1)^{i+j+1},\text{否则}\end{cases};$$

当 $e\in E\backslash(E_1\cup E_2\cup E(V_1,V_r))$时,设 $e\in E(V_p,V_q)$,$p,q\in\{1,2,\cdots,r\}$,令 $f(v_{pi},v_{qj})=(-1)^{i+j+1}$。

通过上面的函数构造过程,不难发现,对每个 $p\in\{1,2,\cdots,r\}$和 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,当 i 为奇数时,$s_{v_{pi}}=0$;当 i 为偶数时,$s_{v_{pi}}=2$。注意到 $f(e)$的定义,并根据前面的结论,易知 f 是 $K_{n,n,\cdots,n}$ 的一个符号边控制函数,且有 $w(f)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{v\in V}s_v=\dfrac{rn}{2}$。

当 $n=4k+2$ 时,构造函数 g 如下。

对于 $e\in E_1=E(V_1,V_2)\cup E(V_3,V_4)\cup\cdots\cup E(V_{r-2},V_{r-1})$,以 $e\in E(V_1,V_2)$为例,令:

$$g(v_{1i}v_{2j})=\begin{cases}1,\ i>\dfrac{n}{2}+1,j>\dfrac{n}{2}+1,i=j\ \text{为偶}\\(-1)^{i+j+1},\text{否则}\end{cases};$$

对于 $e\in E_2=E(V_2,V_3)\cup E(V_4,V_5)\cup\cdots\cup E(V_{r-1},V_r)$,以 $e\in E(V_2,V_3)$为例,令:

$$g(v_{2i}v_{3j})=\begin{cases}1,\ i\leqslant\dfrac{n}{2}+1,j\leqslant\dfrac{n}{2}+1,i=j\ \text{为偶}\\(-1)^{i+j+1},\text{否则}\end{cases};$$

对于 $e\in E(V_1,V_r)$,令:

$$g(v_{1i}v_{rj})=\begin{cases}1,\ i\leqslant\dfrac{n}{2}+1,j\geqslant\dfrac{n}{2}+1,i=j-\dfrac{n}{2}+1\ \text{为偶}\\(-1)^{i+j+1},\text{否则}\end{cases};$$

对于 $e\in E\backslash(E_1\cup E_2\cup E(V_1,V_r))$,设 $e\in E(V_p,V_q)$,$p,q\in\{1,2,\cdots,r\}$,令 $f(v_{pi},v_{qj})=(-1)^{i+j+1}$。

通过上述的函数构造过程,可以看出对每个 $p\in\{1,2,\cdots,r-1\}$和 $i\in\{1,2,\cdots,r\}$,当 i 为奇数时,$s_{v_{pi}}=0$;当 i 为偶数时,$s_{v_{pi}}=2$,且有:

$$s_{v_{ri}}=\begin{cases}0,\ i\neq\dfrac{n}{2}+1\ \text{为奇}\\2,\ i\neq\dfrac{n}{2}+1\ \text{为偶}\\4,\ i=\dfrac{n}{2}+1\end{cases}。$$

再注意到 $g(e)$ 的定义，根据前面的结论不难发现 g 是 $K_{n,n,\cdots,n}$ 的一个符号边控制函数，且：

$$w(g)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}s_v=\frac{rn+2}{2}。$$

当 $n=4k+1$ 时，构造函数 φ 如下。

首先，在子图 $K_{n-1,n-1,\cdots,n-1}=K_{n,n,\cdots,n}\setminus\{v_{1n},v_{2n},\cdots,v_{rn}\}$ 上，φ 的定义与 f 相同。即对于 $e\in E(K_{n-1,n-1,\cdots,n-1})$，令 $\varphi(e)=f(e)$。给定 $p\in\{1,2,\cdots,r\}$，用 P_1 表示 $\{1,2,\cdots,r\}\setminus\{p\}$ 中最前面的 $\frac{r-1}{2}$ 个元素的集合，用 P_2 表示集合 $\{1,2,\cdots,r\}\setminus(\{p\}\cup P_1)$。现在对每个 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 和 $p,j\in\{1,2,\cdots,r\}$，令：

$$\varphi(v_{pi}v_{jn})=\begin{cases}(-1)^{j+1},\ j\in P_1\\(-1)^{j},\ j\in P_2\end{cases}。$$

这个定义保持所有 $s_{v_{pi}}$ 的值不变，且 $s_{v_{pn}}=0,p\in\{1,2,\cdots,r\},i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$。为方便起见，记 $v_{1n}=w_1,v_{2n}=w_2,v_{3n}=w_3$，且对 $4\leqslant i\leqslant\frac{r+3}{2}$，记 $v_{in}=u_{i-3}$；对 $\frac{r+5}{2}\leqslant i\leqslant r$，记 $v_{in}=v_{i-\frac{r+3}{2}}$。因此，有下面的划分：

$$\{v_{1n},\cdots,v_{rn}\}=\{w_1,w_2,w_3\}\cup\left\{u_i\ \middle|\ 1\leqslant i\leqslant\frac{r-3}{2}\right\}\cup\left\{v_i\ \middle|\ 1\leqslant i\leqslant\frac{r-3}{2}\right\}。$$

现在定义：

$$\varphi(e)=\begin{cases}1,\ e\in\{u_iw_2,u_iw_3,v_iw_1,u_iv_j,w_iw_j\}\\-1,\ e\in\{u_iw_1,v_iw_2,v_iw_3,u_iu_j(i\neq j),v_iv_j(i\neq j)\}\end{cases}。$$

从 φ 的构造不难发现，对每个 $p\in\{1,2,\cdots,r\}$，有：

$$s_{v_{pi}}=\begin{cases}0,\ i\leqslant n-1\text{ 为奇}\\2,\ i\leqslant n-1\text{ 为偶}\end{cases},$$

且：

$$s_{v_{pn}}=\begin{cases}2,1\leqslant p\leqslant\frac{r+3}{2}\\2,\frac{r+3}{2}+1\leqslant p\leqslant r\end{cases}。$$

并且注意到所有 $\varphi(e)$ 的定义，依据前面的结论不难验证 φ 是 $K_{n,n,\cdots,n}$ 的一个符号边控制函数，而且有：

$$w(\varphi)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}s_v=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\cdot2\cdot\frac{r+3}{2}+\frac{n-1}{2}\cdot2\cdot\frac{r-3}{2}\right)=\frac{rn+3}{2}。$$

当 $n=4k+3$ 时，构造函数 ψ 如下。

首先，在 $K_{n-1,n-1,\cdots,n-1}=K_{n,n,\cdots,n}\setminus\{v_{1n},v_{2n},\cdots,v_{rn}\}$ 上，ψ 与 g 相同，即对 $e\in E(K_{n-1,n-1,\cdots,n-1})$，令 $\psi(e)=g(e)$。对每个 $p\in\left\{1,2,\cdots,\frac{r-1}{2}\right\},i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，令：

$$\psi(v_{pi}v_{jn})=\begin{cases}(-1)^{i+1},\ j\in\left\{1,\cdots,\frac{r-1}{2}\right\}\setminus\{p\}\\(-1)^{i},\ j\in\left\{\frac{r+1}{2},\cdots,r\right\}\end{cases};$$

对每个 $q\in\left\{\frac{r+1}{2},\cdots,r\right\},i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，令：

$$\psi(v_{qi}v_{jn})=\begin{cases}(-1)^{i+1},\ j\in\left\{1,\cdots,\frac{r-1}{2}\right\}\\(-1)^{i},\ j\in\left\{\frac{r+1}{2},\cdots,r\right\}\setminus\{p\}\end{cases}。$$

容易看出：

$$s_{v_{pi}}=\begin{cases}-2,\ i\leqslant n-1\text{ 为奇}\\4,\ i\leqslant n-1\text{ 为偶}\end{cases};$$

$$s_{v_{qi}}=\begin{cases}0,\ i\leqslant n-1\text{ 为奇},q\in\left\{\dfrac{r+1}{2},\cdots,r-1\right\}\\2,\ i\leqslant n-1\text{ 为偶},q\in\left\{\dfrac{r+1}{2},\cdots,r-1\right\}\end{cases};$$

$$s_{v_{ri}}=\begin{cases}0,\ i\leqslant n-1,i\neq\dfrac{n+1}{2},i\text{ 为奇}\\2,\ i\leqslant n-1,i\neq\dfrac{n+1}{2},i\text{ 为偶。}\\4,\ i=\dfrac{n+1}{2}\end{cases}$$

且 $s_{v_{jn}}=0,j\in\{1,2,\cdots,r\}$。

现在的目标是构造函数 ψ 使得：

$$s_{v_{pi}}=\begin{cases}0,\ i\leqslant n-1\text{ 为奇}\\2,\ i\leqslant n-1\text{ 为偶}\end{cases}。$$

为此，对上述函数 ψ 进行如下修改：对每个 $i\leqslant n-2$ 且 i 为奇数，交换 $\psi(v_{r2}v_{pi})$ 和 $\psi(v_{r2}v_{p,i+1})$ 的值，所有其他值不变。显然，通过这些交换可实现上述目标。

最后，定义所有边 $e(e=v_{in}v_{jn})$ 的值。为方便起见，对 $1\leqslant i\leqslant\dfrac{r-1}{2}$，记 $v_{in}=u_i$；对 $\dfrac{r+1}{2}\leqslant i\leqslant r-1$，记 $v_{in}=v_{i-\frac{r-1}{2}}$，且记 $v_{rn}=w$。因此有：

$$\{v_{1n},v_{2n},\cdots,v_{rn}\}=\left\{u_i\ \middle|\ 1\leqslant i\leqslant\frac{r-1}{2}\right\}\cup\left\{v_i\ \middle|\ 1\leqslant i\leqslant\frac{r-1}{2}\right\}\cup\{w\}。$$

现在定义：

$$\psi(e)=\begin{cases}1,\ e\in\{u_iw,u_iv_j\}\\-1,\ e\in\{v_iw,u_iu_j(i\neq j),v_iv_j(i\neq j)\}\end{cases}。$$

通过上述定义不难发现：

$$s_{v_{jn}}=\begin{cases}2,\ 1\leqslant j\leqslant\dfrac{r-1}{2}\\0,\ \dfrac{r+1}{2}\leqslant j\leqslant r\end{cases}。$$

且对于其他 $v\in V$，s_v 的值不变。

进而注意到函数 $\psi(e)$ 对于所有边 $e\in E(K_{n,n,\cdots,n})$ 的定义，根据前面的结论不难发现：ψ 是 $K_{n,n,\cdots,n}$ 的一个符号边控制函数，且有：

$$w(\psi)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}s_v=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\cdot 2\cdot\frac{r-1}{2}+\frac{n-1}{2}\cdot 2\cdot\frac{r+1}{2}+2\right)=\frac{rn+1}{2}。$$

综上所述，定理 1 得证。 证毕

3 结语

未来可对完全 r-部图 $K_{n,n,\cdots,n}$ 的符号边控制数的精确值的计算进行讨论，并进一步考虑，一般的完全 r-部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 的符号边控制数的界和精确值的计算。

参考文献：

[1] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Fundamentals of domination in graphs [M]. New York: Marcel Dekker, 1998.

[2] KANG L Y, SHAN E F. Signed and minus dominating functions in graphs [M]//HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, HENNING M A, eds. Topics in domination in graphs. Cham: Springer International Publishing, 2020: 301-348.

[3] XU B G. On signed edge domination numbers of graphs [J]. Discrete Mathematics, 2001, 239(1/2/3): 179-189.

[4] AKBARI S, BOLOUKI S, HATAMI P, et al. On the signed edge domination number of graphs [J]. Discrete Mathematics, 2009,

309(3):587-594.

[5] BEINEKE L W, HENNING M A. Opinion functions on trees [J]. Discrete Mathematics, 1997, 167:127-139.

[6] CHEN W D, SONG E M. Lower bounds on several versions of signed domination number [J]. Discrete Mathematics, 2008, 308 (10):1837-1846.

[7] HENNING M A, HIND H R. Strict majority functions on graphs [J]. Journal of Graph Theory, 1998, 28(1):49-56.

[8] HENNING M A, SLATER P J. Inequalities relating domination parameters in cubic graphs [J]. Discrete Mathematics, 1996, 158 (1/2/3):87-98.

[9] SHAN E F, CHENG T C E. Remarks on the minus (signed) total domination in graphs [J]. Discrete Mathematics, 2008, 308 (15):3373-3380.

[10] XU B G. Two classes of edge domination in graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2006, 154(10):1541-1546.

[11] KHODKAR A N, GHAMESHL O U. Signed edge domination numbers of complete tripartite graphs: Part One [J]. Utilitas Mathematic, 2017, 105:237-258.

[12] ZHAO Y C. Bounds of the signed edge domination number of complete multipartite graphs [J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2023, 43(2):161-165.

[13] CABRERA-MARTÍNEZ A, VILLAMAR I R, RUEDA-VÁZQUEZ J M, et al. Double total domination in the generalized lexicographic product of graphs [J]. Quaestiones Mathematicae, 2024, 47(3):689-703.

[14] AMIN U, FAHMI A, YAQOOB N, et al. Domination in bipolar fuzzy soft graphs [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2024, 46(3):6369-6382.

[15] ALMULHIM A. Signed double Italian domination [J]. AIMS Mathematics, 2023, 8(12):30895-30909.

Operations Research and Cybernetics

Signed Edge Domination Numbers of a Type of Complete Multipartite Graphs

ZHAO Yancai[1,2]

(1. School of Accounting, Wuxi City College of Vocational Technology, Wuxi Jiangsu 214153;

2. Wuxi Environmental Science and Engineering Research Center, Wuxi Jiangsu 214153, China)

Abstract: Let G be a graph $G\in(V,E)$ with vertex set V and edge set E. A function $f:E(G)\rightarrow\{-1,1\}$ is a signed edge dominating function of a graph $G=(V,E)$ such that $f[e]=f(N[e])=\sum_{e'\in N[e]}f(e')\geqslant 1$ for every edge $e\in E$. $w(f)=\sum_{e\in E}f(e)$ is called the weight of f. The signed edge domination number $\gamma'_s(G)$ of $G$is the minimum weight among all signed edge dominating functions of G. It continues to study this parameter for G a complete multipartite graph. It gives some lower and upper bounds of $\gamma'_s(G)$ for G a complete r-partite graph with r being odd and all parts being equal, which provides solution ideas for computing parameters of general complete multipartite graphs.

Keywords: signed edge domination; signed edge domination number; complete multipartite graph

(责任编辑 黄 颖)