

Signorini 问题的无单元 Galerkin 方法*

孙登月, 李小林

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:为了得到一种高效求解 Signorini 问题的数值方法,结合无网格方法,利用投影迭代法处理 Signorini 边界条件,并采用无单元 Galerkin 法进行离散。分析了该方法的收敛性,并通过数值实例验证了有效性和收敛阶。该方法有效结合了无网格技术与投影迭代的优势,为求解 Signorini 问题提供了一种可靠的新途径。

关键词:Signorini 问题;无单元 Galerkin 方法;Nitsche 方法;投影迭代

中图分类号:O241.82

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2026)01-0098-09

Signorini 问题用于描述弹性体与刚性体无摩擦之间的相互作用,常应用于物理、工程、生物学等方面,例如水坝渗流问题^[1]等,当问题包含复杂的地形、孔洞等情况时,非线性条件极为突出,不利于求解。有限元方法^[2]、有限体积元(finite volume element, FVE)方法^[3]等常被用于求解 Signorini 问题。Signorini 问题的边界条件可以视为互补问题,而投影迭代方法能够将 Signorini 问题的不等式边界转化为线性条件。目前对投影迭代方法的研究,特别是结合有限差分法^[4]、边界元方法^[5]的投影迭代方法被用于求解 Signorini 问题,并取得了不错的数值效果。传统方法的求解精度依赖于网格划分,具有一定局限,因此不依赖网格划分的无网格方法在近些年来得到了快速发展。通过与边界处理方法结合,如基本解法^[6]等无网格方法已被用于求解 Signorini 问题并取得了较好的效果,但这些方法的求解需要方程的基本解,因此适用范围有限。

无单元 Galerkin(element-free Galerkin, EFG)方法是一种典型的 Galerkin 弱式无网格方法^[7],首先利用移动最小二乘近似(moving least-square approximation, MLSA)构建问题的近似解^[8-9],然后通过变分公式构建代数系统,最后通过求解代数系统获得近似解。但由于 MLSA 基函数缺乏插值性质,这使得求解问题的 Dirichlet 边界条件难以施加。为了解决这一问题,罚函数法^[10]、Lagrange 乘子法^[11]、Nitsche 法^[12]等边界条件施加手段又被开发出来,但这些方法存在一些问题,如罚函数法虽然计算量相对较小,但精度依赖罚因子的取值;Lagrange 乘子法引入了新的变量,增加了计算的复杂度;Nitsche 法没有引入新变量,并且保证了精度不受罚因子的影响,但计算量相比罚函数法更大。

本文提出了一种运用 Nitsche 技术的 EFG 方法用于求解 Signorini 问题。第 2 节讨论了投影迭代方法处理 Signorini 边界问题中非线性边界条件的过程。第 3 节中通过 Nitsche 方法施加 Dirichlet 边界条件,并通过 EFG 方法离散代数系统。EFG 离散的相应误差分析在第 4 节中给出。最后通过几个数值模拟验证了方法的有效性和收敛性。

1 非线性边界处理

考虑如下 Signorini 问题:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla u(\mathbf{x})) + b(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \Omega; \\ u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_D; \\ \mathbf{A}\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \bar{q}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_R; \\ u(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{A}\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{x}); \\ (u(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}))(\mathbf{A}\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_S. \end{cases} \quad (1)$$

* 收稿日期:2025-07-10 修回日期:2025-11-13 网络出版时间:2026-03-03T13:48

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11971085);重庆市自然科学基金重点项目(No. CSTB2022NSCQ-LZX0016);重庆市研究生科研创新项目(No. CYB240228)

第一作者简介:孙登月,男,研究方向为微分方程的数值解,E-mail:1198237521@qq.com;通信作者简介:李小林,男,教授,博士生导师,E-mail:lxlmath@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20260302.1657.002

其中: $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为有界域, $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_R \cup \Gamma_S$ 为 Lipschitz 边界, $u \in H^1(\Omega)$ 为未知函数, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $a_{ij} = a_{ji} \in L^2(\Omega)$, $f(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$, $b(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$, $\bar{u}(\mathbf{x}) \in L^2(\Gamma_D)$, $\bar{q}(\mathbf{x}) \in L^2(\Gamma_D)$, $\sigma(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Gamma_R)$, $\varphi(\mathbf{x}) \in L^2(\Gamma_S)$, $\varphi(\mathbf{x}) \in L^2(\Gamma_S)$ 均为关于 \mathbf{x} 的已知函数, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 为单位外法向量。为了便于后续分析, 给出如下假设。

假设 1^[13] 假设 $\sigma_* = \inf_{\mathbf{x} \in \Gamma_R} \{\sigma(\mathbf{x})\} \geq 0$, 存在 $a_* > 0$, 满足 $\|\mathbf{A}\|_\infty \geq a_* \geq 0$, 使得:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq a_* \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad \forall (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top, \quad a_* \leq b(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2)$$

为了处理 Signorini 边界上的不等式约束, 引入投影算子 $[\kappa]_-$ ^[5-6,13]:

$$[\kappa]_- = \min\{\kappa, 0\}, \quad [\kappa]_- = \begin{cases} \kappa = \mathbf{A} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) - \gamma(u(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})), & \kappa < 0; \\ 0, & \text{其他情况。} \end{cases}$$

其中: γ 为任意正常数。

从而问题(1)中的 Signorini 边界条件可以等价于如下方程^[5-6,13]:

$$\mathbf{A} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) = [\kappa]_- . \quad (3)$$

由于上述给出的投影算子 $[\kappa]_-$ 是非线性的, 因此为了求解问题(3)给出如下显式迭代格式:

$$\mathbf{A} \nabla u^{(k)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{A} \nabla u^{(k-1)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) - \gamma(u^{(k)}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})), \quad (4)$$

其中: k 代表第 k 次迭代。 $u^{(0)}(\mathbf{x})$ 通过如下方程获得:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{A} \nabla u^{(0)}(\mathbf{x})) + b(\mathbf{x}) u^{(0)}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \Omega; \\ u^{(0)}(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_D; \\ \mathbf{A} \nabla u^{(0)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}) u^{(0)}(\mathbf{x}) = \bar{q}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_R; \\ \mathbf{A} \nabla u^{(0)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_S. \end{cases}$$

由式(4), 问题(1)可以近似为:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{A} \nabla u^{(k)}(\mathbf{x})) + b^{(k)}(\mathbf{x}) u^{(k)}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega; \\ u^{(k)}(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_D; \\ \mathbf{A} \nabla u^{(k)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}) u^{(k)}(\mathbf{x}) = \bar{q}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_R; \\ \mathbf{A} \nabla u^{(k)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_{SN}^{(k)}; \\ \mathbf{A} \nabla u^{(k)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \gamma u^{(k)}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \nabla u^{(k-1)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \gamma \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_{SR}^{(k)}. \end{cases} \quad (5)$$

2 EFG 离散

本节将详细推导 Nitsche 方法用于施加 Dirichlet 边界条件的过程, 以及 EFG 方法用于求解问题(5)的计算过程。

2.1 变分格式及 Dirichlet 边界条件的施加

问题(5)对应的变分问题为, 找到 $u \in H^2(\Omega)$ 使得:

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{A} u^{(k)}) v \, d\Omega + \int_{\Omega} b u^{(k)} v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^2(\Omega). \quad (6)$$

从而, 根据式(6)并应用 Gauss 公式可以得到:

$$\int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla u^{(k)} \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{A} \nabla u^{(k)} \cdot \mathbf{n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} b u^{(k)} v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad (7)$$

由于在 MLSA 缺乏插值性质, 因此采用 Nitsche 方法^[12]施加式(7)中的 Dirichlet 边界条件有:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \mathbf{A} \nabla u^{(k)} \cdot \mathbf{n} v \, d\Gamma = \\ & \int_{\Gamma_D} \mathbf{A} \nabla u^{(k)} \cdot \mathbf{n} v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_R} \mathbf{A} \nabla u^{(k)} \cdot \mathbf{n} v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{SN}^{(k)}} \mathbf{A} \nabla u^{(k)} \cdot \mathbf{n} v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{SR}^{(k)}} \mathbf{A} \nabla u^{(k)} \cdot \mathbf{n} v \, d\Gamma = \\ & - \int_{\Gamma_D} (\alpha h^{-1} u^{(k)} v - u^{(k)} \mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n} - \mathbf{A} \nabla u^{(k)} \cdot \mathbf{n} v) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_R} \sigma u^{(k)} v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \bar{u} (\alpha h^{-1} v - \mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_R} \bar{q} v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{SN}^{(k)}} \varphi v \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{SR}^{(k)}} \gamma u^{(k)} v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{SR}^{(k)}} (\mathbf{A} \nabla u^{(k-1)} \cdot \mathbf{n} + \gamma \varphi) v \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (8)$$

其中: α 为 Nitsche 方法中的惩罚因子, 特别的当 $\Gamma_D = \emptyset$ 时, $\alpha = 0$ 。根据式(8), 可将式(7)变为:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u^{(k)}, v) = & \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_D} \bar{u}(\alpha h^{-1} v - \mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \int_{\Gamma_R} \bar{q} v d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_{SN}^{(k)}} \varphi v d\Gamma + \int_{\Gamma_{SR}^{(k)}} [(\mathbf{A} \nabla u \cdot \mathbf{n})^{(k-1)} + \gamma \varphi] v d\Gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

其中:双线性格式 $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ 定义为:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u^{(k)}, v) \triangleq & \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla u^{(k)} \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Omega} b u^{(k)} v d\Omega + \int_{\Gamma_R} \sigma u^{(k)} v d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_D} (\alpha h^{-1} u^{(k)} v - u^{(k)} \mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n} - \mathbf{A} \nabla u^{(k)} \cdot \mathbf{n} v) d\Gamma + \int_{\Gamma_{SR}^{(k)}} \gamma u^{(k)} v d\Gamma. \end{aligned} \quad (10)$$

2.2 EFG 近似

为了得到 EFG 近似解,首先给出一些记号。

令 $\{x_i\}_{i=1}^N$ 为区域 $\Omega \cup \Gamma$ 上的 N 个互异的节点, $h = \max_{1 \leq i \leq N} \min_{1 \leq j \leq N, j \neq i} |x_i - x_j|$ 为节点间距。 $\{\Phi_i\}_{i=1}^N$ 为 MLSA 形函数,它的形式为^[8-9]:

$$\Phi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ji}, & i = I_i \in \Lambda(\mathbf{x}); \\ 0, & i \neq \Lambda(\mathbf{x}). \end{cases}$$

其中: $1 \leq i \leq N$ $\{p_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^m$ 为基函数, $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})]^T$, $\Lambda(\mathbf{x})$ 为在 \mathbf{x} 影响域范围内的点的全局坐标所构成的序号集,且:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \Lambda(\mathbf{x})} \omega_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [\omega_{I_1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_{I_1}), \omega_{I_2}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_{I_2}), \dots, \omega_{I_l}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_{I_l})],$$

其中: $\omega_i(\mathbf{x})$ 为权函数。从而 $u^{(k)}$ 的 MLSA 为:

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) \approx u_h^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{x}) u_i^{(k)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma, k=0, 1, \dots. \quad (11)$$

其中: $u_i^{(k)}$ 为 $u^{(k)}(\mathbf{x}_i)$ 的近似值。

令 $V_h(\Omega) = \text{span}\{\Phi_i, 1 \leq i \leq N\}$ 为无网格近似解空间,从而问题的近似变分问题为,寻找 $u_h^{(k)} \in V_h(\Omega)$, 使得:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u_h^{(k)}, v) = & \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_D} \bar{u}(\alpha h^{-1} v - \mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \int_{\Gamma_R} \bar{q} v d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_{SN}^{(k)}} \varphi v d\Gamma + \int_{\Gamma_{SR}^{(k)}} [(\mathbf{A} \nabla u \cdot \mathbf{n})_h^{(k-1)} + \gamma \varphi] v d\Gamma, \quad \forall v \in V_h(\Omega). \end{aligned} \quad (12)$$

2.3 离散代数系统

根据式(11)和式(12)可以得到问题(9)的离散代数系统为:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{G} + \mathbf{H}^{(k)}) \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{L}^{(k)} \mathbf{u}^{(k-1)} \mathbf{f} + \alpha h^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{g}^{(k)}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (13)$$

其中: $\mathbf{u}^{(k)} = [u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_N^{(k)}]^T$,

$$\mathbf{K}(i, j) = \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j d\Omega + \int_{\Omega} b \Phi_i \Phi_j d\Omega, \quad (14)$$

$$\mathbf{G}(i, j) = \int_{\Gamma_D} (\alpha h^{-1} \Phi_i \Phi_j - \Phi_i \mathbf{A} \nabla \Phi_j \cdot \mathbf{n} - \mathbf{A} \nabla \Phi_i \cdot \mathbf{n} \Phi_j) d\Gamma + \int_{\Gamma_R} \sigma \Phi_i \Phi_j d\Gamma, \quad (15)$$

$$\mathbf{H}^{(k)} = \gamma \int_{\Gamma_{SR}^{(k)}} \Phi_i \Phi_j d\Gamma, \quad (16)$$

$$\mathbf{f}(i) = \int_{\Omega} f \Phi_i d\Omega + \int_{\Gamma_R} \bar{q} \Phi_i d\Gamma, \quad (17)$$

$$\mathbf{b} = \int_{\Gamma_D} \bar{u} \Phi_i d\Gamma, \quad (18)$$

$$\mathbf{L}^{(k)}(i, j) = \int_{\Gamma_{SR}^{(k)}} \mathbf{A} \nabla \Phi_i \cdot \mathbf{n} \Phi_j d\Gamma, \quad (19)$$

$$\mathbf{g}^{(k)}(i) = \int_{\Gamma_{SN}^{(k)}} \varphi \Phi_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{SR}^{(k)}} \gamma \varphi \Phi_i d\Gamma. \quad (20)$$

对于 $\mathbf{u}^{(0)} = [u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_N^{(0)}]^T$, 可以通过如下代数系统求得:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{G})\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{f} + \alpha h^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{g}^{(0)}, \quad (21)$$

其中: $\mathbf{K}, \mathbf{G}, \mathbf{f}, \mathbf{b}$ 的定义如式(14)、(15)、(17)和(18)所示。

$$\mathbf{g}^{(0)}(i) = \int_{\Gamma_D} \bar{u} \mathbf{A} \nabla \Phi_i \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_S} \varphi \Phi_i d\Gamma. \quad (22)$$

2.4 算法过程

为了获得 $u^{(k)}(\mathbf{x})$ 的近似值 $u_h^{(k)}(\mathbf{x})$, 首先将 Γ_S 划分为 M 个区域的并, 即 $\Gamma_S = \bigcup_{i=1}^M \Gamma_i$, 并有如下步骤。

算法 1 第 1 步, 先预先设立相对误差限 $\epsilon (\epsilon > 0)$ 、步长 h 以及 Nitsche 惩罚参数 α , 并确定式(11)中的节点 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$, 再根据式(14)、(15)、(17)、(18)和(22)计算出 $\mathbf{K}, \mathbf{G}, \mathbf{f}, \mathbf{b}$ 以及 $\mathbf{g}^{(0)}$;

第 2 步, 令 $k=0$, 并根据式(21)计算得到 $\mathbf{u}^{(0)}$, 并作为初值代入后续计算过程中, 更新 $k=k+1$, 对 $\mathbf{x}_i \in \Gamma_i \in \Gamma_S$, 将 $u_h^{(k-1)}(\mathbf{x}_i)$ 代入下式中对 Γ_S 进行划分, 若:

$$\mathbf{A} \nabla u_h^{(k-1)}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_i) - \varphi(\mathbf{x}_i) - \gamma(u_h^{(k-1)}(\mathbf{x}_i) - \varphi(\mathbf{x}_i)) > 0$$

成立, 则 $\Gamma_i \in \Gamma_{SN}^{(k)}$, 反之 $\Gamma_i \in \Gamma_{SR}^{(k)}$;

第 3 步, 由式(16)、(19)和(20)得到 $\mathbf{H}^{(k)}, \mathbf{L}^{(k)}$ 和 $\mathbf{g}^{(k)}$;

第 4 步, 根据式(13)可以计算出 $\mathbf{u}^{(k)}$, 将 $\mathbf{u}^{(k)}$ 代入可以得到近似值 $u_h^{(k)}(\mathbf{x})$, 计算 $u_h^{(k)}(\mathbf{x})$ 和 $u_h^{(k-1)}(\mathbf{x})$ 在 Γ_S 上的相对误差:

$$e(u) = \sqrt{\frac{\sum_{\mathbf{x}_i \in \Gamma_S} (u_h^{(k)}(\mathbf{x}_i) - u_h^{(k-1)}(\mathbf{x}_i))^2}{\sum_{\mathbf{x}_i \in \Gamma_S} (u_h^{(k)}(\mathbf{x}_i))^2}}.$$

若 $e(u) > \epsilon$, 则返回第 4 步重新计算。反之, 输出 Signorini 问题的 EFG 解 $u_h^{(k)}(\mathbf{x})$ 。

3 误差分析

在 H^1 范数下, Signorini 问题的解析解 $u(\mathbf{x})$ 与问题(12)求出的 EFG 解 $u_h^{(k)}(\mathbf{x})$ 之间的误差为 $\|u(\mathbf{x}) - u_h^{(k)}(\mathbf{x})\|_{H^1(\Omega)}$, 可以写为:

$$\|u(\mathbf{x}) - u_h^{(k)}(\mathbf{x})\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u(\mathbf{x}) - u^{(k)}(\mathbf{x})\|_{H^1(\Omega)} + \|u^{(k)}(\mathbf{x}) - u_h^{(k)}(\mathbf{x})\|_{H^1(\Omega)},$$

其中: $\|u(\mathbf{x}) - u^{(k)}(\mathbf{x})\|_{H^1(\Omega)}$ 为迭代产生的误差, $\|u^{(k)}(\mathbf{x}) - u_h^{(k)}(\mathbf{x})\|_{H^1(\Omega)}$ 为 EFG 方法产生的误差, 因此误差可以分为 2 个部分进行处理。

令 $\|\cdot\|_a$ 为如下定义的范数:

$$\|v\|_a^2 = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + h \|\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 + h^{-1} \|v\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 + \sigma_* \|v\|_{L^2(\Gamma_R)}^2 + \gamma \|v\|_{L^2(\Gamma_{SR})}^2. \quad (23)$$

假设 2 存在一个与 h 无关的正常数 δ , 使得如下逆不等式成立:

$$h \|\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 \leq \delta \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla v \cdot \nabla v d\Omega, \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

根据上式可以得到:

$$h \|\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 \leq \delta \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla v \cdot \nabla v d\Omega \leq \delta \|\mathbf{A}\|_{\infty} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (24)$$

引理 1 设 $\alpha > \frac{4\delta \|\mathbf{A}\|_{\infty}}{a_*}$, 其中 Ψ 满足假设 2, 则 $\forall w, v \in H^2(\Omega)$ 有:

$$\mathcal{B}(w, v) \leq C_1 (1 + \alpha) \|w\|_a \|v\|_a, \quad \mathcal{B}(v, v) \geq C_2 \|v\|_a^2. \quad (25)$$

证明 根据式(10), 并利用 Cauchy-Schwarz 不等式和式(23)可以得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(w, v) &= \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla w \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Omega} b w v d\Omega + \int_{\Gamma_R} \sigma w v d\Gamma + \\ &\quad \int_{\Gamma_D} (\alpha h^{-1} w v - w \mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n} - \mathbf{A} \nabla w \cdot \mathbf{n} v) d\Gamma + \int_{\Gamma_{SR}^{(k)}} \gamma w v d\Gamma \leq \\ &\|\mathbf{A}\|_{\infty} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|b\|_{\infty} \|w\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma\|_{\infty} \|w\|_{L^2(\Gamma_R)} \|v\|_{L^2(\Gamma_R)} + \\ &\alpha h^{-1} \|w\|_{L^2(\Gamma_D)} \|v\|_{L^2(\Gamma_D)} + (h^{-1/2} \|w\|_{L^2(\Gamma_D)})(h^{1/2} \|\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_D)}) + \end{aligned}$$

$$(h^{1/2} \|\mathbf{A} \nabla \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_D)}) (h^{-1/2} \|v\|_{L^2(\Gamma_D)}) + \gamma \|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Gamma_{SR})} \|v\|_{L^2(\Gamma_{SR})} \leq C_1(1 + \alpha) \|\boldsymbol{\omega}\|_a \|v\|_a,$$

因此,式(25)前半部分成立。

又根据式(10)有:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(v, v) = & \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla v \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} b v v \, d\Omega + \int_{\Gamma_R} \sigma v v \, d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_D} (\alpha h^{-1} v v - v \mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n} - \mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n} v) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{SR}^{(k)}} \gamma v v \, d\Gamma, \end{aligned} \tag{26}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式有:

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Gamma_D} v (\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma \geq & -2 \|v\|_{L^2(\Gamma_D)} \|\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_D)} \geq \\ & -C_3 h^{-1} \|v\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 - \frac{1}{C_3} h \|\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_D)}^2, \end{aligned} \tag{27}$$

根据式(2)、(24)和(27),对式(26)有如下估计:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(v, v) \geq & a_* \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_* \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma_* \|\nabla v\|_{L^2(\Gamma_R)}^2 + \alpha h^{-1} \|v\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 - \\ & C_3 h^{-1} \|v\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 - \frac{1}{C_3} h \|\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 + \gamma \|\nabla v\|_{L^2(\Gamma_{SR}^{(k)})}^2 \geq \\ & \left(a_* - \frac{1}{C_3} \delta \|\mathbf{A}\|_{\infty}\right) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + (\alpha - C_3) h^{-1} \|v\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 + \sigma_* \|\nabla v\|_{L^2(\Gamma_R)}^2 + \gamma \|\nabla v\|_{L^2(\Gamma_{SR}^{(k)})}^2. \end{aligned} \tag{28}$$

令 $C_3 = \frac{2\delta \|\mathbf{A}\|_{\infty}}{a_*}$, 则:

$$a_* - \frac{1}{C_3} \delta \|\mathbf{A}\|_{\infty} = \frac{a_*}{2}, \alpha - C_3 \geq \frac{\alpha}{2}.$$

则根据式(28)有:

$$\mathcal{B}(v, v) \geq \frac{a_*}{2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} h^{-1} \|v\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 + \sigma_* \|\nabla v\|_{L^2(\Gamma_R)}^2 + \gamma \|\nabla v\|_{L^2(\Gamma_{SR}^{(k)})}^2 \geq C_2 \|v\|_a^2,$$

其中 $C_2 = \min\left\{\frac{a_*}{2}, \frac{\alpha}{2}, 1\right\}$ 。

从而,根据引理 1 和 Lax-Milgram 定理知,变分问题(9)存在唯一解 $u^{(k)}(\mathbf{x})$, 且 $u^{(k)}(\mathbf{x}) \in H^2(\Omega)$ 。 证毕

引理 2^[14] 存在与 h 无关的常数 $\delta, \forall v \in V_h(\Omega)$ 有:

$$h \|\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 \leq \delta \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla v \cdot \nabla v \, d\Omega. \tag{29}$$

引理 3^[8] 设 $u \in H^{\hat{m}+1}(\Omega)$, $\mathcal{M}u$ 为 u 的 MLSA, 则:

$$\|\boldsymbol{\omega} - \mathcal{M}\boldsymbol{\omega}\|_{H^k(\Omega)} \leq Ch^{\hat{m}+1-k} \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^{\hat{m}+1}(\Omega)}, \quad k \geq 0,$$

其中: $0 \leq k \leq \hat{m} + 1, \hat{m}$ 为 MLSA 中基函数的最大次数。

引理 4 设 u 为 Signorini 问题(1)的解, $u^{(k)}$ 是问题(5)的解, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)} = u$ 。

根据上述引理,可以得到如下定理。

定理 1 设 $\alpha > \frac{4\delta \|\mathbf{A}\|_{\infty}}{a_*}$, 其中 δ 与引理 2 中一致。则对任意的 $\boldsymbol{\omega}, v \in V_h(\Omega)$ 有:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\boldsymbol{\omega}, v) & \leq C_1(1 + \alpha) \|\boldsymbol{\omega}\|_a \|v\|_a, \\ \mathcal{B}(v, v) & \geq C_2 \|v\|_a^2. \end{aligned}$$

证明 类似引理 1 的证明,根据假设 1,式(29)即可证得。

证毕

定理 2 设 $u^{(k)}$ 为问题(5)的解, $u_h^{(k)}$ 为问题(12)的解, 则有:

$$\|u^{(k)} - u_h^{(k)}\|_{H^1(\Omega)} \leq C(1 + \alpha) h^{\hat{m}}. \tag{30}$$

证明 由于 $\mathcal{M}u^{(k)} \in V_h(\Omega)$, 根据引理 3 和迹不等式有:

$$\|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 \leq C_1 \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)} \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 h^{2\hat{m}+1} \|u^{(k)}\|_{H^{\hat{m}+1}}^2, \tag{31}$$

$$\|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{L^2(\Gamma_R)}^2 \leq C_3 \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)} \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 h^{2\hat{m}+1} \|u^{(k)}\|_{H^{\hat{m}+1}}^2, \quad (32)$$

$$\|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{L^2(\Gamma_{SR})}^2 \leq C_5 \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)} \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_6 h^{2\hat{m}+1} \|u^{(k)}\|_{H^{\hat{m}+1}}^2, \quad (33)$$

$$\|\nabla(u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 \leq C_7 \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{H^1(\Omega)} \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{H^2(\Omega)} \leq C_8 h^{2\hat{m}-1} \|u^{(k)}\|_{H^{\hat{m}+1}}^2. \quad (34)$$

根据式(31)~(34)有:

$$\begin{aligned} \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{\alpha}^2 &= \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{H^1(\Omega)}^2 + h \|\mathbf{A} \nabla(u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 + h^{-1} \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 + \\ &\quad \sigma_* \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{L^2(\Gamma_R)}^2 + \gamma \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{L^2(\Gamma_{SR})}^2 \leq C_9 h^{2\hat{m}} (1 + \|\mathbf{A}\|_{\infty}) \|u^{(k)}\|_{H^{\hat{m}+1}}^2. \end{aligned}$$

最后根据 Céa 引理^[15]有:

$$\|u^{(k)} - u_h^{(k)}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u^{(k)} - u_h^{(k)}\|_{\alpha} \leq C_{10} (1 + \alpha) \|u^{(k)} - \mathcal{M}u^{(k)}\|_{\alpha} \leq C (1 + \alpha) h^{\hat{m}} \|u^{(k)}\|_{H^{\hat{m}+1}}.$$

因此, 式(30)成立。

证毕

定理 3 设 u 为问题(12)的解, $u_h^{(k)}$ 为问题的解, 则有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty, h \rightarrow 0} u_h^{(k)} = u. \quad (35)$$

证明 由于 $\|u - u_h^{(k)}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - u^{(k)}\|_{H^1(\Omega)} + \|u^{(k)} - u_h^{(k)}\|_{H^1(\Omega)}$, 则根据引理 4 和定理 2 即可以得到式(35)。

证毕

4 数值算例

本节将给出几个算例, 验证 EFG 方法用于求解 Signorini 方程的有效性。为了实现算法, 本节将相对误差限设为 $\epsilon = 10^{-6}$ 。

4.1 算例 1

考虑如下已知解析解的 Signorini 问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = \pi^2 \sin(0.5\pi x_1) \cos(0.5\pi x_2), (x_1, x_2) \in \Omega = \{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}; \\ u = 0, (x_1, x_2) \in \Gamma_D = \{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 1\} \cup \{0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 1\}; \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, (x_1, x_2) \in \Gamma_R = \{x_1 = 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}; \\ u \geq 0, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \geq 0, u \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, (x_1, x_2) \in \Gamma_S = \{0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 0\}. \end{cases}$$

问题的解析解为 $u(\mathbf{x}) = 2\sin(0.5\pi x_1) \cos(0.5\pi x_2)$ 。

图 1 给出采用 Nitsche 方法的 EFG 方法得到的误差, 可以发现这一方法取得了较好的效果。图 2 给出了 EFG 方法与 FVE 方法^[4]的 H^1 误差, 可以发现 EFG 方法的收敛阶和误差均优于 FVE 方法, EFG 方法的收敛阶大约为 2, 与理论分析结果一致。

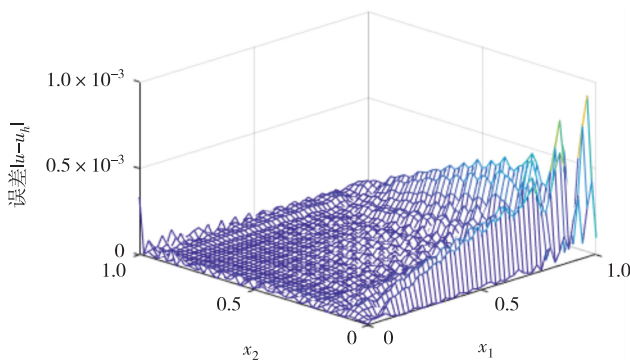


图 1 算例 1 的数值解与解析解之间的误差
Fig. 1 Error between numerical and analytical solutions for Example 1

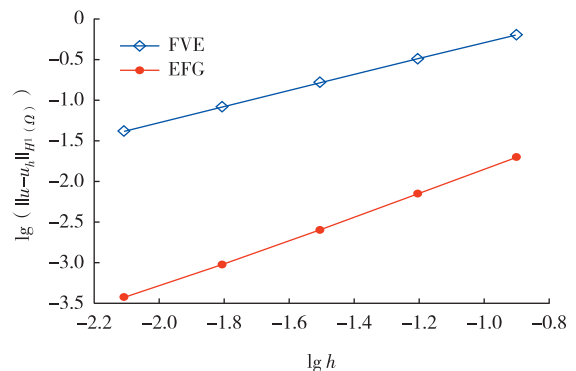


图 2 算例 1 的 EFG 方法与 FVE 方法的误差比较
Fig. 2 Error comparison between EFG and FVE methods in Example 1

4.2 算例 2

考虑如下的非均质 Signorini 问题:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\Lambda \nabla u) = f, (x_1, x_2) \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2; \\ u = 0, (x_1, x_2) \in \Gamma_D = \{0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 0\} \cup \{0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 1\}; \\ \Lambda \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, (x_1, x_2) \in \Gamma_R = \{x_1 = 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}; \\ u \leq 0, \Lambda \nabla u \cdot \mathbf{n} \leq 0, u \cdot \Lambda \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, (x_1, x_2) \in \Gamma_S = \{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 1\}. \end{cases}$$

其中: $\Omega_1 = \{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 0.5\}$, $\Omega_2 = \{0 < x_1 < 1, 0.5 < x_2 < 1\}$ 。

当 $(x_1, x_2) \in \Omega_1$ 时, $\Lambda = 100, f(\mathbf{x}) = 100 \cos(\pi x_1) [6x_2 - 2 - \pi^2 x_2 (x_2 - 0.5)^2]$ 。

当 $(x_1, x_2) \in \Omega_2$ 时, $\Lambda = 1, f(\mathbf{x}) = \pi(1 - x_2)(x_2 - 0.5)^2 [0.5 \cos(\pi x_1) + \sin(\pi x_1)] + x_1(3x_2 - 2)[\cos(\pi x_1) + 1]$ 。

该算例的解析解为:

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\cos(\pi x_1) x_2 (x_2 - 0.5)^2, (x_1, x_2) \in \Omega_1; \\ x_1 \cos(0.5 \pi x_1) (1 - x_2) (x_2 - 0.5)^2, (x_1, x_2) \in \Omega_2. \end{cases}$$

图 3 给出了解析解与 EFG 解的绝对误差, 可以发现 EFG 方法获得了比较精确的结果。图 4 显示了 γ 的取值对误差的影响, 不难看出当 $\gamma \geq 100$ 时, 误差基本不会发生改变, 因此在实际计算过程中可以将 γ 取为 100。图 5 和图 6 分别给出了 EFG 方法和混合模拟混合(hybrid mimetic mixed method, HMM)方法^[16]求解该问题时 u 的相对误差和 ∇u 的相对误差。容易发现 2 种方法都得到了收敛的结果, 并且 EFG 方法的收敛阶大于 HMM 方法的收敛阶。

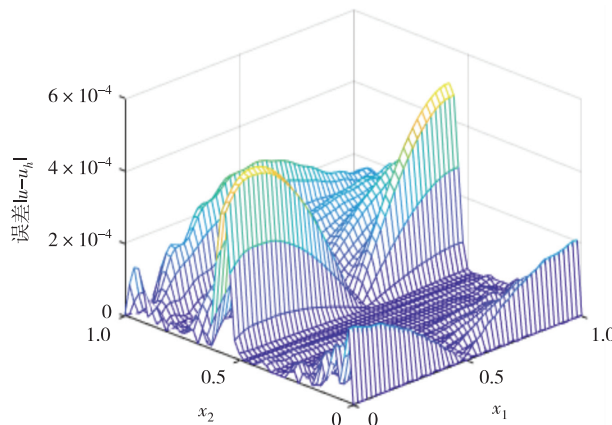


图 3 算例 2 的数值解与解析解之间的误差

Fig. 3 Error between numerical and analytical solutions for Example 2

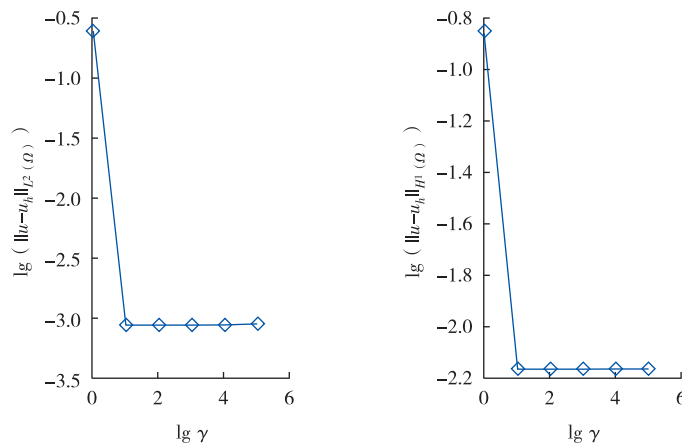
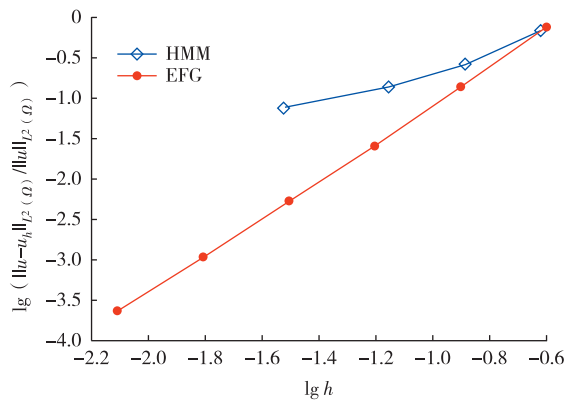
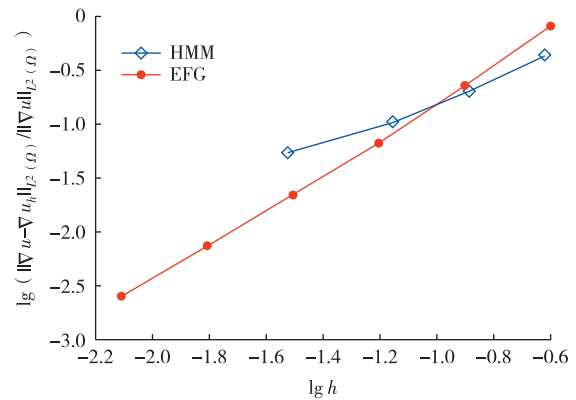


图 4 算例 2 在不同 γ 下的误差

Fig. 4 Error in Example 2 under different γ values

图 5 算例 2 中 u 的相对误差Fig. 5 Relative error of u in Example 2图 6 算例 2 中 ∇u 的相对误差Fig. 6 Relative error of ∇u in Example 2

5 总结

本文通过使用 EFG 方法对 Signorini 边界问题进行了求解。投影迭代方法被用于处理 Signorini 边界,将问题从一个非线性边界问题转化为一个线性边界问题。通过 Nitsche 方法施加 Dirichlet 边界条件后运用 EFG 方法建立了问题的离散格式和离散代数系统。给出了方法解的唯一性与误差的详细分析过程。最后用一些数值算例验证了 EFG 方法的有效性,并且通过与使用 FVE 方法、HMM 方法的结果对比说明了本文提出的 EFG 方法在求解 Signorini 问题时具有一定的优势。

参考文献:

- [1] 曾俊,李星,凌晓鸣,等. 渗流分析中基于 Signorini 变分不等式结合杆单元法的排水孔模拟[J]. 中国农村水利水电,2019(10): 169-174.
ZENG J, LI X, LING X M, et al. Rod elements method based on variational inequality approach of signorini type for simulating drainage holes in seepage analysis[J]. China Rural Water and Hydropower, 2019(10): 169-174.
- [2] 邓庆平. 一类非线性 Signorini 问题的有限元逼近[J]. 高校应用数学 A 辑(中文版), 1990(4): 484-491.
DENG Q P. Finite element approximation for a nonlinear Signorini problem[J]. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities(Ser. A), 1990(4): 484-491.
- [3] ZHANG T, LI Z. An Analysis of Finite Volume Element Method for Solving the Signorini Problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 270: 830-841.
- [4] ABIDE S, MANSOURI W, CHERKAoui S, et al. High-order compact scheme finite difference discretization for Signorini's problem[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2021, 98: 580-591.
- [5] ZHANG S G. Projection and self-adaptive projection methods for the Signorini problem with the BEM[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2017, 74: 1262-1273.
- [6] ZHENG H Y, LI X L. Application of the method of fundamental solutions to 2D and 3D Signorini problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015, 58: 48-57.
- [7] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods [J]. International Journal for Numerical Methods Engineering, 1994, 37: 229-256.
- [8] LI X L. Error estimates for the moving least-square approximation and the element-free galerkin method in n -dimensional spaces [J]. Applied Numerical Mathematics, 2016, 99: 77-97.
- [9] LI X L, ZHU J L. A Galerkin boundary node method and its convergence analysis[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 230: 314-328.
- [10] KAWOHL B. On a mixed signorini problem[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 1979, 1: 633-645.
- [11] LUO P, LIANG G P. Error analysis and global superconvergences for the Signorini problem with Lagrange multiplier methods [J]. Journal of Computational Mathematics, 2002(1): 79-88.

- [12] BABUŠKA I, UDAY B, JOHN E O. Survey of meshless and generalized finite element methods; a unified approach[J]. *Acta Numerica*, 2003, 12: 1-125.
- [13] LI X L, DONG H Y. Analysis of the element-free Galerkin method for Signorini problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 346: 41-56.
- [14] LI X L, LI S L. Effect of an efficient numerical integration technique on the element-free Galerkin method[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2023, 193: 204-225.
- [15] BRENNER S C, SCOTT L R. *The mathematical theory of finite element methods*[M]. New York: Springer, 2008.
- [16] ALNASHRI Y, DRONIOU J. Gradient schemes for the Signorini and the obstacle problems, and application to hybrid mimetic mixed methods[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2016, 72: 2788-2807.

Element-Free Galerkin Method for the Signorini Problem

SUN Dengyue, LI Xiaolin

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: For the Signorini problem, an efficient element-free Galerkin method is proposed to solve this problem. First, the projection iterative method is employed to handle the Signorini boundary. Then, the element-free Galerkin method is used to discretize the problem, and the convergence of the method is analyzed. Finally, the effectiveness and convergence order of the method are demonstrated through numerical examples. Combining the advantages of meshless method and the projection iterative method, this method provides a reliable numerical approach for solving the Signorini problem.

Keywords: Signorini problem; element-free Galerkin method; Nitsche method; projected iteration

(责任编辑 陈 乔)