

Cole-Cole 色散介质中 Maxwell 方程无条件稳定的有限元方法*

胡朝飞¹, 李茂军¹, 谢江明²

(1. 电子科技大学 数学科学学院, 成都 611731; 2. 重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067)

摘要:利用有限元方法求解 Cole-Cole 色散介质中的 Maxwell 方程。首先,在处理时间分数阶导数时,利用扩散表示将其转化为无穷积分,通过引入辅助微分方程得到等价的局部模型;构建能量泛函时,在经典能量基础上增加修正项,确保得到严格单调递减的能量泛函。其次,采用 Raviart-Thomas-Nédélec 混合有限元方法离散空间并估计相应的半离散误差。最后,数值求解无穷积分得到近似模型并使用 Crank-Nicolson 格式离散时间得到全离散格式。数值实验表明,对于任意阶时间分数阶导数都具有能量稳定性,并且数值误差与理论误差相吻合。

关键词:Maxwell 方程; Cole-Cole 色散介质; 混合有限元; 误差估计

中图分类号: O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2026)01-0107-08

在电磁学中,色散介质是指不同频率的波在其中以不同速度传播的介质。常见的色散介质包括生物组织、水、土壤、光纤、等离子体等,电磁波在这些介质中的传播过程可以通过时域 Maxwell 方程和极化方程的耦合进行建模,常见的模型包括 Drude 模型、Lorentz 模型、Debye 模型和 Cole-Cole 模型^[1]。

Cole-Cole 模型自提出以来,学者们已使用许多数值方法对它进行求解,包括有限差分法^[2-6]、有限元法^[7-10]、间断 Galerkin 方法^[11-13]等。其中在通过有限差分法求解该模型时主要有 2 大类方法:第 1 类方法采用电场的时间卷积来近似地求解极化场^[14];第 2 类方法则是通过一些数值格式来求解由极化场和电场导出的辅助微分方程。相较于第 1 类方法,第 2 类方法更加简单和直接。在频域中,由电场 \mathbf{E} 诱导的极化场 \mathbf{P} 可表示为:

$$L(\mathbf{P}) = \frac{\epsilon_0(\epsilon_s - \epsilon_\infty)}{1 + (j\omega\tau_0)^\alpha} L(\mathbf{E}),$$

其中: $L(\cdot)$ 表示 Laplace 变换, ω 为频率, ϵ_0 、 ϵ_s 和 ϵ_∞ 分别代表真空中的介电常数、静态介电常数和无限频率下的介电常数,并且 ϵ_s 和 ϵ_∞ 满足 $\epsilon_s > \epsilon_\infty$, τ_0 表示弛豫时间,而 $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位。通过对上述方程进行 Laplace 逆变换并结合 Maxwell 方程,有如下耦合模型:

$$\epsilon_0 \epsilon_\infty \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\tau_0^\alpha \frac{\partial^\alpha \mathbf{P}}{\partial t^\alpha} + \mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_s - \epsilon_\infty) \mathbf{E}, \quad (3)$$

其中: μ_0 表示真空中的磁导率, \mathbf{H} 为磁场, t 表示时间, $0 < \alpha < 1$ 。为求解该问题,考虑理想电导体边界条件:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0, (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (4)$$

其中: \mathbf{n} 为单位外法向量。初始条件:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}), \mathbf{P}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5)$$

* 收稿日期:2025-09-29 修回日期:2025-11-11 网络出版时间:2026-03-03T12:38

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 12271082, No. 62231016, No. 12301550);重庆市自然科学基金面上项目(No. CSTB2024NSCQ-MSX1288);重庆市教育委员会科学技术研究计划青年项目(No. KJQN202300804);重庆工商大学高层次人才启动项目(No. 2356024)

第一作者简介:胡朝飞,女,研究方向为偏微分方程数值解,E-mail:huzhaofei029@163.com;通信作者简介:李茂军,男,教授,E-mail:limj@uestc.edu.cn

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20260302.1710.004

本文研究的是二维横电模型,其中 $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$, $\mathbf{P} = (P_x, P_y)$, $\mathbf{H} = H_z$, 且 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 为有界凸 Lipschitz 区域。针对该模型, Li 等人^[7]首次使用时域有限元方法进行求解,并对其中的分数阶导数使用了 $L1$ 格式离散。同时,他们对能量稳定性进行分析,将能量泛函定义为:

$$E_{\text{Li}}(\mathbf{E}, H_z, \mathbf{P}) = \epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_\infty \|\mathbf{E}\|_0^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \|H_z\|_0^2 \right) + \frac{1}{2} \|\mathbf{P}\|_0^2.$$

虽然后续的研究^[6,13]也进行了能量稳定性的分析,但值得关注的是,他们各自定义的能量泛函都不是严格递减的。直到 Xie 等人^[12]在使用间断 Galerkin 方法对一维的 Cole-Cole 模型进行求解时,才提出了一种严格递减的能量泛函:

$$E(\mathbf{E}, H_z, \mathbf{P}, \Psi) = E_{\text{Li}}(\mathbf{E}, H_z, \mathbf{P}) + \frac{\pi \tau_0^\alpha}{2 \sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} \|\Psi\|_0^2 d\lambda,$$

其中: $\Psi(t; \lambda) = \frac{\sin(\pi \alpha)}{\pi} \lambda^{\alpha-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)\lambda} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \tau} d\tau$, 且满足 $\frac{\partial^\alpha \mathbf{P}}{\partial t^\alpha} = \int_0^\infty \Psi(t; \lambda) d\lambda$ 。利用这一无穷积分对分数阶导数的表示,他们成功地将非局部问题转化为了局部问题,解决了因时间依赖所带来的计算负担。最近, Xiao 等人^[10]也提出了一种严格递减的能量泛函,并使用了一种平均 $L1$ 格式近似分数阶导数。不过,从文献[12]的计算结果可以观察到,他们的分数阶导数近似计算方法的 CPU 耗时明显低于使用 $L1$ 格式的近似计算。

本文将基于文献[12]提出的分数阶导数近似计算方法和能量泛函的定义,给出一种新的求解 Cole-Cole 模型的有限元方法。其中,分数阶导数近似计算方法的核心思想就是通过引入辅助函数将分数阶导数转化为辅助函数的无穷积分,再通过求积公式对无穷积分进行近似计算。与文献[12]在空间离散上采用的间断 Galerkin 方法及时间离散上采用的二阶向后差分格式不同,针对引入辅助函数后的模型,本文将采用 Raviart-Thomas-Nédélec 混合有限元对空间进行离散,后续在数值计算时将采用 Crank-Nicolson 格式对时间进行离散。最后,证明了该数值格式无条件能量稳定性和 L_2 范数下 $O(h^m)$ 的误差收敛阶,其中 m 表示多项式次数。也就是说,对于最低阶的 Raviart-Thomas-Nédélec 混合有限元,收敛阶为 $O(h)$ 。

1 预备符号和弱形式

本节首先引入所需的符号及相关定义,继而给出分数阶导数 $\frac{\partial^\alpha \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^\alpha}$ 的非局部表示,并在此基础上推导模型(1)~(5)的弱形式。

令 $(H^\alpha(\Omega))^2$ 为标准 Sobolev 空间,范数表示为 $\|\cdot\|_{\alpha, \Omega}$ 。当 $\alpha=0$ 时, $\|\cdot\|_{\alpha, \Omega}$ 表示 $(L^2(\Omega))^2$ 范数。为了表达方便,用向量符号

$$\mathbf{H}^\alpha(\Omega) = (H^\alpha(\Omega))^2, \mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^2$$

进行表示。定义一些常用符号^[15]:

$$\mathbf{H}(\text{curl}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \nabla \times \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\},$$

$$\mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{curl}; \Omega); \mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}\},$$

以及 Caputo 分数阶导数:

$$\frac{\partial^\alpha \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\tau, 0 < \alpha < 1.$$

而 Caputo 分数阶导数可表示为^[12]:

$$\frac{\partial^\alpha \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^\alpha} = \int_0^\infty \Psi(\mathbf{x}, t; \lambda) d\lambda, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\lambda \Psi + \frac{\sin(\pi \alpha)}{\pi} \lambda^{\alpha-1} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\Psi(\mathbf{x}, 0; \lambda) = 0, \quad (8)$$

其中: Ψ 是一个新引入的函数。针对引入 Ψ 后的模型,使用能量泛函:

$$E_{\text{Li}}(\mathbf{E}, H_z, \mathbf{P}) = \epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_\infty \|\mathbf{E}\|_0^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \|H_z\|_0^2 \right) + \frac{1}{2} \|\mathbf{P}\|_0^2,$$

$$E(\mathbf{E}, H_z, \mathbf{P}, \Psi) = E_{\text{Li}}(\mathbf{E}, H_z, \mathbf{P}) + \frac{\pi \tau_0^\alpha}{2 \sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} \|\Psi\|_0^2 d\lambda.$$

最后, 结合改写后的分数阶导数式(6)~(8), 模型(1)~(5)的弱形式便可表示如下。

求 $\mathbf{E} \in C(0, T; \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega)) \cap C^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, $\mathbf{P}, \Psi \in C^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, $H_z \in C^1(0, T; L^2(\Omega))$ 满足:

$$\epsilon_0 \epsilon_\infty \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \mathbf{v}_1 \right) - (H_z, \nabla \times \mathbf{v}_1) + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \mathbf{v}_1 \right) = 0, \forall \mathbf{v}_1 \in \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega), \quad (9)$$

$$\mu_0 \left(\frac{\partial H_z}{\partial t}, v_2 \right) + (\nabla \times \mathbf{E}, v_2) = 0, \forall v_2 \in L^2(\Omega), \quad (10)$$

$$\tau_0^\alpha \left(\int_0^\infty \Psi(\mathbf{x}, t; \lambda) d\lambda, \mathbf{v}_3 \right) + (\mathbf{P}, \mathbf{v}_3) - \epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_\infty) (\mathbf{E}, \mathbf{v}_3) = 0, \forall \mathbf{v}_3 \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \mathbf{v}_4 \right) + \lambda (\Psi, \mathbf{v}_4) - \frac{\sin(\pi \alpha)}{\pi} \lambda^{\alpha-1} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \mathbf{v}_4 \right) = 0, \forall \mathbf{v}_4 \in \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (12)$$

2 空间半离散格式

本节将给出模型(9)~(12)的半离散有限元格式, 同时对该格式的能量稳定性和收敛性进行证明。

假设 Ω 被一系列规则长方形 Γ^h 剖分, 其中 h 表示网格最大尺度。考虑使用 Raviart-Thomas-Nédélec 混合有限元空间^[16]:

$$\begin{aligned} U_h &= \{ \psi_h \in L^2(\Omega) : \psi_h|_e \in Q_{m-1, m-1}, \forall e \in \Gamma^h \}, \\ \mathbf{V}_h &= \{ \boldsymbol{\varphi}_h \in \mathbf{H}(\text{curl}; \Omega) : \boldsymbol{\varphi}_h|_e \in Q_{m-1, m} \times Q_{m, m-1}, \forall e \in \Gamma^h \}, \\ \mathbf{V}_h^0 &= \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : \mathbf{n} \times \mathbf{v}_h = 0, \text{在} \partial\Omega \text{上} \}, \end{aligned}$$

其中: $Q_{i,j}$ 表示次数在 x, y 方向上分别小于或等于 i, j 的多项式空间。相应地, 半离散格式可表示为如下形式。

求 $\mathbf{E}_h, H_{z,h}, \mathbf{P}_h, \Psi_h \in \mathbf{V}_h^0 \times U_h \times \mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h$ 满足:

$$\epsilon_0 \epsilon_\infty \left(\frac{\partial \mathbf{E}_h}{\partial t}, \mathbf{v}_{1,h} \right) - (H_{z,h}, \nabla \times \mathbf{v}_{1,h}) + \left(\frac{\partial \mathbf{P}_h}{\partial t}, \mathbf{v}_{1,h} \right) = 0, \forall \mathbf{v}_{1,h} \in \mathbf{V}_h^0, \quad (13)$$

$$\mu_0 \left(\frac{\partial H_{z,h}}{\partial t}, v_{2,h} \right) + (\nabla \times \mathbf{E}_h, v_{2,h}) = 0, \forall v_{2,h} \in U_h, \quad (14)$$

$$\tau_0^\alpha \left(\int_0^\infty \Psi_h d\lambda, \mathbf{v}_{3,h} \right) + (\mathbf{P}_h, \mathbf{v}_{3,h}) - \epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_\infty) (\mathbf{E}_h, \mathbf{v}_{3,h}) = 0, \forall \mathbf{v}_{3,h} \in \mathbf{V}_h, \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi_h}{\partial t}, \mathbf{v}_{4,h} \right) + \lambda (\Psi_h, \mathbf{v}_{4,h}) - \frac{\sin(\pi \alpha)}{\pi} \lambda^{\alpha-1} \left(\frac{\partial \mathbf{P}_h}{\partial t}, \mathbf{v}_{4,h} \right) = 0, \forall \mathbf{v}_{4,h} \in \mathbf{V}_h. \quad (16)$$

2.1 能量稳定性

定理 1 令 $\mathbf{E}_h, H_{z,h}, \mathbf{P}_h, \Psi_h$ 为式(13)~(16)的解, 则满足如下能量稳定性:

$$\frac{dE(\mathbf{E}_h, H_{z,h}, \mathbf{P}_h, \Psi_h)}{dt} = - \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{2-\alpha} \|\Psi_h\|_0^2 d\lambda \leq 0.$$

证明 为证明半离散能量稳定性, 令式(13)中的 $\mathbf{v}_{1,h} = \mathbf{E}_h$, 式(14)中的 $v_{2,h} = H_{z,h}$, 然后相加得到:

$$\epsilon_0 \epsilon_\infty \frac{1}{2} \frac{d\|\mathbf{E}_h\|_0^2}{dt} + \mu_0 \frac{1}{2} \frac{d\|H_{z,h}\|_0^2}{dt} = -(\partial_t \mathbf{P}_h, \mathbf{E}_h). \quad (17)$$

为消去式(17)的右端项, 对该式两端同时乘以 $\epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_\infty)$, 同时令式(15)中的 $\mathbf{v}_{3,h} = \partial_t \mathbf{P}_h$, 两式相加则有:

$$E_{\text{Li}}(\mathbf{E}, H_z, \mathbf{P}) = -\tau_0^\alpha \left(\int_0^\infty \Psi_h d\lambda, \partial_t \mathbf{P}_h \right). \quad (18)$$

令式(16)中 $\mathbf{v}_{4,h} = \Psi_h$, 并对方程两边关于 λ 积分:

$$\frac{\pi \tau_0^\alpha}{2 \sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} \partial_t \|\Psi_h\|_0^2 d\lambda + \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{2-\alpha} \|\Psi_h\|_0^2 d\lambda = \tau_0^\alpha \left(\int_0^\infty \Psi_h d\lambda, \partial_t \mathbf{P}_h \right). \quad (19)$$

综合式(18)和式(19)可知:

$$\frac{dE(\mathbf{E}_h, H_{z,h}, \mathbf{P}_h, \Psi_h)}{dt} = - \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{2-\alpha} \|\Psi_h\|_0^2 d\lambda \leq 0.$$

由上式可知,能量泛函 $E(\mathbf{E}_h, H_{z,h}, \mathbf{P}_h, \boldsymbol{\Psi}_h)$ 随时间递减,故半离散格式的能量稳定性得证。

证毕

2.2 误差估计

为进行误差估计,需引入标准 L^2 投影算子 Q_h ,该算子定义为:对于任意的 $H_z \in L^2(\Omega)$, $Q_h H_z \in U_h$ 满足:

$$(Q_h H_z - H_z, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in U_h.$$

同时,引入 Nédélec 插值算子 Π_h ,详细定义见文献[16],该算子具有如下性质。

引理 1^[17] 对于任意网格单元 e ,它的最大网格尺度为 h ,那么对任意的 $\mathbf{E} \in \mathbf{H}^m(e)$, $\Pi_h \mathbf{E}|_e \in \mathbf{V}_h|_e$,则有:

$$1) \int_e (\mathbf{E} - \Pi_h \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\phi} \, dx \, dy = O(h^m) \|\mathbf{E}\|_{m,e} \|\boldsymbol{\phi}\|_{0,e}, \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{V}_h|_e;$$

2) $\forall \mathbf{E} \in \mathbf{H}^{m+1}(e)$ 满足:

$$\int_e \nabla \times (\mathbf{E} - \Pi_h \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx \, dy = O(h^m) \|\mathbf{E}\|_{m+1,e} \|\boldsymbol{\psi}\|_{0,e}, \forall \boldsymbol{\psi} \in U_h|_e.$$

为分析半离散格式收敛性,引入符号: $\boldsymbol{\xi}_h = \Pi_h \mathbf{E} - \mathbf{E}_h$, $\eta_h = Q_h H_z - H_{z,h}$, $\boldsymbol{\zeta}_h = \Pi_h \mathbf{P} - \mathbf{P}_h$, $\ell_h = \Pi_h \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}_h$ 。在恰当的正则性假设和初始误差条件下,有如下误差估计。

定理 2 令 $\mathbf{E}, H_z, \mathbf{P}, \boldsymbol{\Psi}$ 和 $\mathbf{E}_h, H_{z,h}, \mathbf{P}_h, \boldsymbol{\Psi}_h$ 分别为弱形式式(9)~(12)和半离散格式式(13)~(16)的解。假设:

$$\mathbf{P}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathbf{H}^m(\Omega); \mathbf{E} \in \mathbf{H}^{m+1}(\Omega); H_z \in L^2(\Omega); \mathbf{P}_t, \boldsymbol{\Psi}_t, \mathbf{E}_t \in \mathbf{H}^m(\Omega).$$

若初始时刻的近似满足:

$$\mathbf{E}_h(0) = \Pi_h \mathbf{E}(0), \mathbf{P}_h(0) = \Pi_h \mathbf{P}(0), H_{z,h}(0) = Q_h H_z(0), \boldsymbol{\Psi}_h(0) = \Pi_h \boldsymbol{\Psi}(0).$$

那么半离散格式式(13)~(16)有如下的误差估计:

$$\overline{E}(\boldsymbol{\xi}(t)_h, \eta(t)_h, \boldsymbol{\zeta}(t)_h, \ell(t)_h) \leq Ch^{2m},$$

其中 C 是与网格尺度 h 无关的常数,并且:

$$\begin{aligned} \overline{E}(\boldsymbol{\xi}(t)_h, \eta(t)_h, \boldsymbol{\zeta}(t)_h, \ell(t)_h) &= \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \left(\varepsilon_0 \varepsilon_\infty \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\xi}(t)_h\|_0^2 + \mu_0 \frac{1}{2} \|\eta(t)_h\|_0^2 \right) + \\ &\frac{1}{4} \|\boldsymbol{\zeta}(t)_h\|_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} \|\ell(t)_h\|_0^2 \, d\lambda. \end{aligned}$$

证明 令式(9)~(12)中的测试函数分别为 $\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h}, \mathbf{v}_{3,h}, \mathbf{v}_{4,h}$,再分别减去式(13)~(16)得到:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_0 \varepsilon_\infty (\partial_t \boldsymbol{\xi}_h, \mathbf{v}_{1,h}) - (\eta_h, \nabla \times \mathbf{v}_{1,h}) + (\partial_t \boldsymbol{\zeta}_h, \mathbf{v}_{1,h}) = \\ &\varepsilon_0 \varepsilon_\infty (\partial_t (\Pi_h \mathbf{E} - \mathbf{E}), \mathbf{v}_{1,h}) - (Q_h H_z - H_z, \nabla \times \mathbf{v}_{1,h}) + (\partial_t (\Pi_h \mathbf{P} - \mathbf{P}), \mathbf{v}_{1,h}), \\ &\mu_0 (\partial_t \eta_h, \mathbf{v}_{2,h}) + (\nabla \times \boldsymbol{\xi}_h, \mathbf{v}_{2,h}) = \mu_0 (\partial_t (Q_h H_z - H_z), \mathbf{v}_{2,h}) + (\nabla \times (\Pi_h \mathbf{E} - \mathbf{E}), \mathbf{v}_{2,h}), \\ &\tau_0^\alpha \left(\int_0^\infty \ell_h(\lambda) \, d\lambda, \mathbf{v}_{3,h} \right) + (\boldsymbol{\zeta}_h, \mathbf{v}_{3,h}) - \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (\boldsymbol{\xi}_h, \mathbf{v}_{3,h}) = \\ &\tau_0^\alpha \left(\int_0^\infty (\Pi_h \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}) \, d\lambda, \mathbf{v}_{3,h} \right) + (\Pi_h \mathbf{P} - \mathbf{P}, \mathbf{v}_{3,h}) - \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (\Pi_h \mathbf{E} - \mathbf{E}, \mathbf{v}_{3,h}), \\ &(\partial_t \ell_h, \mathbf{v}_{4,h}) + \lambda (\ell_h, \mathbf{v}_{4,h}) - \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \lambda^{\alpha-1} (\partial_t \boldsymbol{\zeta}_h, \mathbf{v}_{4,h}) = \\ &(\partial_t (\Pi_h \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}), \mathbf{v}_{4,h}) + \lambda (\Pi_h \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}, \mathbf{v}_{4,h}) - \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \lambda^{\alpha-1} (\partial_t (\Pi_h \mathbf{P} - \mathbf{P}), \mathbf{v}_{4,h}). \end{aligned}$$

令测试函数 $\mathbf{v}_{1,h} = \boldsymbol{\xi}_h$, $\mathbf{v}_{2,h} = \eta_h$, $\mathbf{v}_{3,h} = \boldsymbol{\zeta}_h$, $\mathbf{v}_{4,h} = \ell_h$,与能量稳定性证明中的处理方法相似,可以得到:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \left(\varepsilon_0 \varepsilon_\infty \frac{1}{2} \frac{d \|\boldsymbol{\xi}_h\|^2}{dt} + \mu_0 \frac{1}{2} \frac{d \|\eta_h\|^2}{dt} \right) + \\ &\frac{1}{2} \frac{d \|\boldsymbol{\zeta}_h\|^2}{dt} + \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} \frac{1}{2} \partial_t \|\ell_h\|^2 \, d\lambda = \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \varepsilon_0 \varepsilon_\infty (\partial_t (\Pi_h \mathbf{E} - \mathbf{E}), \boldsymbol{\xi}_h) + \\ &\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (\partial_t (\Pi_h \mathbf{P} - \mathbf{P}), \boldsymbol{\xi}_h) - \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (Q_h H - H, \nabla \times \boldsymbol{\xi}_h) + \\ &\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \mu_0 (\partial_t (Q_h H - H), \eta_h) + \\ &\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (\nabla \times (\Pi_h \mathbf{E} - \mathbf{E}), \eta_h) + \tau_0^\alpha \int_0^\infty (\Pi_h \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}, \partial_t \boldsymbol{\zeta}_h) \, d\lambda + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\Pi_h \mathbf{P} - \mathbf{P}, \partial_t \tilde{\boldsymbol{\xi}}_h) - \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (\Pi_h \mathbf{E} - \mathbf{E}, \partial_t \boldsymbol{\ell}_h) - \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{2-\alpha} \|\boldsymbol{\ell}_h\|^2 d\lambda + \\
& \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} (\partial_t (\Pi_h \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}), \boldsymbol{\ell}_h) d\lambda + \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{2-\alpha} (\Pi_h \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\ell}_h) d\lambda - \\
& \tau_0^\alpha \int_0^\infty (\partial_t (\Pi_h \mathbf{P} - \mathbf{P}), \boldsymbol{\ell}_h) d\lambda = \sum_{i=1}^{12} B_i. \tag{20}
\end{aligned}$$

下面将对上式中的每一项进行估计。由引理 1 的结论 1) 和 Young 不等式可知:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \varepsilon_0 \varepsilon_\infty (\partial_t (\Pi_h \mathbf{E} - \mathbf{E}), \boldsymbol{\xi}_h) \leq \\
& \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \varepsilon_0 \varepsilon_\infty Ch^m \|\mathbf{E}_t\|_m \|\boldsymbol{\xi}_h\|_0 \leq Ch^{2m} + \frac{1}{4} \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \|\boldsymbol{\xi}_h\|_0^2.
\end{aligned}$$

类似地, 有:

$$\begin{aligned}
B_2 + B_{10} + B_{11} + B_{12} &= \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (\partial_t (\Pi_h \mathbf{P} - \mathbf{P}), \boldsymbol{\xi}_h) + \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} (\partial_t (\Pi_h \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}), \boldsymbol{\ell}_h) d\lambda + \\
& \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{2-\alpha} (\Pi_h \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\ell}_h) d\lambda - \tau_0^\alpha \int_0^\infty (\partial_t (\Pi_h \mathbf{P} - \mathbf{P}), \boldsymbol{\ell}_h) d\lambda \leq \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) Ch^m \|\mathbf{P}_t\|_m \|\boldsymbol{\xi}_h\|_0 + \\
& \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi \alpha)} Ch^m \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} \|\boldsymbol{\Psi}_t\|_m \|\boldsymbol{\ell}_h\|_0 d\lambda + \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi \alpha)} Ch^m \int_0^\infty \lambda^{2-\alpha} \|\boldsymbol{\Psi}\|_m \|\boldsymbol{\ell}_h\|_0 d\lambda + \tau_0^\alpha Ch^m \int_0^\infty \|\mathbf{P}_t\|_m \|\boldsymbol{\ell}_h\|_0 d\lambda \leq \\
& Ch^{2m} + \frac{1}{4} \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \|\boldsymbol{\xi}_h\|_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi \tau_0^\alpha}{\sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} \|\boldsymbol{\ell}_h\|_0^2 d\lambda.
\end{aligned}$$

因为 $\nabla \times \boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \in U_h$, 由投影算子 Q_h 的定义则有:

$$B_3 + B_4 = -\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \mu_0 (Q_h H_z - H_z, \nabla \times \boldsymbol{\xi}_h) - \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (\partial_t (Q_h H_z - H_z), \boldsymbol{\eta}_h) = 0.$$

由引理 1 的结论 2) 可得:

$$B_5 = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (\nabla \times (\Pi_h \mathbf{E} - \mathbf{E}), \boldsymbol{\eta}_h) \leq \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) Ch^m \|\mathbf{E}\|_{m+1} \|\boldsymbol{\eta}_h\|_0 \leq Ch^{2m} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \mu_0 \|\boldsymbol{\eta}_h\|_0^2.$$

已知分步积分公式:

$$\int_0^t (\Pi_h \mathbf{A} - \mathbf{A}, \partial_t \boldsymbol{\zeta}_h) ds = -\int_0^t (\partial_t (\Pi_h \mathbf{A} - \mathbf{A}), \boldsymbol{\zeta}_h) ds + (\Pi_h \mathbf{A} - \mathbf{A}, \boldsymbol{\zeta}_h) - (\Pi_h \mathbf{A}(0) - \mathbf{A}(0), \boldsymbol{\zeta}_h(0)).$$

其中: \mathbf{A} 代指 $\mathbf{E}, \mathbf{P}, \boldsymbol{\Psi}$ 。根据对初始时刻近似的假设和引理 1 的结论 2) 可知:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (B_6 + B_7 + B_8) ds = \tau_0^\alpha \int_0^t \int_0^\infty (\Pi_h \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}, \partial_t \boldsymbol{\zeta}_h) d\lambda ds + \int_0^t (\Pi_h \mathbf{P} - \mathbf{P}, \partial_t \boldsymbol{\zeta}_h) ds - \\
& \int_0^t \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (\Pi_h \mathbf{E} - \mathbf{E}, \partial_t \boldsymbol{\zeta}_h) ds \leq Ch^m \int_0^t \left(\int_0^\infty \tau_0^\alpha \|\boldsymbol{\Psi}_t\|_m d\lambda + \|\mathbf{P}_t\|_m + \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \|\mathbf{E}_t\|_m \right) \|\boldsymbol{\zeta}_h\|_0 ds + \\
& Ch^m \left(\int_0^\infty \tau_0^\alpha \|\boldsymbol{\Psi}\|_m d\lambda + \|\mathbf{P}\|_m + \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \|\mathbf{E}\|_m \right) \|\boldsymbol{\zeta}_h\|_0 \leq Ch^{2m} + \frac{1}{4} \int_0^t \|\boldsymbol{\zeta}_h\|_0^2 ds + \frac{1}{4} \|\boldsymbol{\zeta}_h\|_0^2.
\end{aligned}$$

显然, $B_9 = -\frac{\pi \alpha}{\sin(\pi \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{2-\alpha} \|\boldsymbol{\ell}_h\|_0^2 d\lambda \leq 0$ 。将所有的 B_i 代入式(20)中再关于时间积分, 则有:

$$\begin{aligned}
E(\boldsymbol{\xi}(t)_h, \boldsymbol{\eta}(t)_h, \boldsymbol{\zeta}(t)_h, \boldsymbol{\ell}(t)_h) &\leq E(\boldsymbol{\xi}(0)_h, \boldsymbol{\eta}(0)_h, \boldsymbol{\zeta}(0)_h, \boldsymbol{\ell}(0)_h) + \\
& \int_0^t \overline{E}(\boldsymbol{\xi}(s)_h, \boldsymbol{\eta}(s)_h, \boldsymbol{\zeta}(s)_h, \boldsymbol{\ell}(s)_h) ds + Ch^{2m}.
\end{aligned}$$

显然, $\overline{E}(\boldsymbol{\xi}(t)_h, \boldsymbol{\eta}(t)_h, \boldsymbol{\zeta}(t)_h, \boldsymbol{\ell}(t)_h) \leq E(\boldsymbol{\xi}(t)_h, \boldsymbol{\eta}(t)_h, \boldsymbol{\zeta}(t)_h, \boldsymbol{\ell}(t)_h)$ 。最后, 根据对初始时刻的假设和 Gronwall 不等式即可结束证明。 证毕

3 数值算例

采用 Crank-Nicolson 格式对半离散格式式(13)~(16)进行时间离散, 并通过数值算例来验证理论分析结果。

为了计算简单, 将模型(1)~(5)中所有物理数都设置为量纲, 即: $\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty), \varepsilon_0 \varepsilon_\infty, \mu_0, \tau_0$ 均为 1。引入二维

旋度算子: $\nabla \times H_z = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y}, -\frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$ 。对应于最低阶 Raviart-Thomas-Nédélec 混合有限元

空间:

$$U_h = \{\psi_h \in L^2(\Omega) : \psi_h|_e \in Q_{0,0}, \forall e \in \Gamma^h\},$$

$$V_h = \{\boldsymbol{\varphi}_h \in \mathbf{H}(\text{curl}; \Omega) : \boldsymbol{\varphi}_h|_e \in Q_{0,1} \times Q_{1,0}, \forall e \in \Gamma^h\}.$$

显然 $\nabla \times \mathbf{V}_h \in U_h$ 仍然成立。

3.1 误差计算

为计算误差,在式(1)右端添加一个源项 $f(x, y, t)$, 这样便可以得到解析解:

$$H_z(x, y, t) = -\left(\frac{2}{\Gamma(4-\alpha)}t^{3-\alpha} + \frac{1}{3}t^3\right)2\pi\cos(\pi x)\cos(\pi y),$$

$$\mathbf{E}(x, y, t) = \left(\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha} + t^2\right)\boldsymbol{\omega}(x, y),$$

$$\mathbf{P}(x, y, t) = t^2\boldsymbol{\omega}(x, y).$$

其中: $\boldsymbol{\omega}(x, y) = (-\cos(\pi x)\sin(\pi y), \sin(\pi x)\cos(\pi y))'$, 相应的源项表达式为:

$$f(x, y, t) = \partial_t \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{P} - \nabla \times H_z =$$

$$\left(\frac{2}{\Gamma(2-\alpha)}t^{2-\alpha} + 4t + 2\pi^2 + \left(\frac{2}{\Gamma(4-\alpha)}t^{3-\alpha} + \frac{1}{3}t^3\right)\right)\boldsymbol{\omega}(x, y).$$

将求解域设置为 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, 取时间步长为 $\tau = \sqrt{h}$, 计算 $t = 1$ 时刻的误差。对于不同的分数阶 α , 误差计算结果见表 1, 观察可知结果符合理论的 $O(h)$ 收敛。

表 1 令 $\tau = \sqrt{h}, t = 1$ 时刻的误差

Tab. 1 Let $\tau = h$, error at time $T = 1$

α	h	$\ \mathbf{E} - \mathbf{E}_h\ _{L_2}$		$\ H_z - H_{z,h}\ _{L_2}$		$\ \mathbf{P} - \mathbf{P}_h\ _{L_2}$	
		误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
0.3	4^{-1}	4.902 1e-01	—	8.814 2e-01	—	2.192 5e-01	—
	4^{-2}	1.153 3e-01	1.043 8	2.396 5e-01	0.939 5	5.315 8e-02	1.022 1
	4^{-3}	2.789 6e-02	1.023 8	6.134 2e-02	0.983 0	1.299 0e-02	1.016 4
	4^{-4}	6.931 0e-03	1.004 5	1.545 9e-02	0.994 2	3.239 8e-03	1.001 7
0.5	4^{-1}	5.087 7e-01	—	1.008 1e+00	—	2.142 8e-01	—
	4^{-2}	1.173 0e-01	1.058 4	2.714 1e-01	0.946 6	5.201 6e-02	1.021 2
	4^{-3}	2.835 2e-02	1.024 3	6.928 7e-02	0.984 9	1.279 7e-02	1.011 6
	4^{-4}	7.075 6e-03	1.001 3	1.751 1e-02	0.992 2	3.227 6e-03	0.993 6
0.7	4^{-1}	5.180 7e-01	—	1.152 1e+00	—	2.086 4e-01	—
	4^{-2}	1.181 0e-01	1.066 6	3.058 6e-01	0.956 7	5.062 9e-02	1.021 5
	4^{-3}	2.870 5e-02	1.020 3	7.775 6e-02	0.987 9	1.255 1e-02	1.006 1
	4^{-4}	7.185 6e-03	0.999 1	1.972 1e-02	0.989 6	3.214 0e-03	0.982 7

3.2 能量计算

为观察全离散格式的能量变化情况,将求解域 $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$ 分解为 48×48 个单元,时间步长取 $\tau = 0.01$,时间计算区间为 $t \in [0, 2]$,初始条件为:

$$H_{z,0}(x, y) = 4\cos(\pi x)\sin(\pi y), \mathbf{E}_0(x, y) = \mathbf{0}, \mathbf{P}_0(x, y) = \mathbf{0},$$

结果如图 1 和图 2 所示,图 1 是经典能量函数随时间变化的图像,可以观察到存在 $E_{Li}(t_1) < E_{Li}(t_2) (t_1 < t_2)$ 。与之相比,图 2 中的能量函数对于不同的分数阶 α 取 0.3, 0.5, 0.7, 能量始终小于初始时刻的能量,并且随着时

间的变化严格递减,符合理论推导。

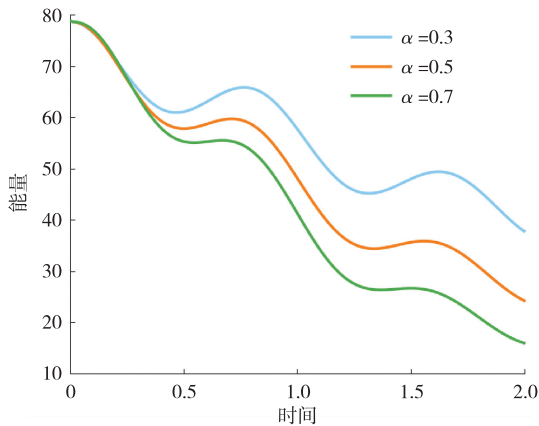


图 1 E_{Li} 能量曲线图

Fig. 1 The graph of E_{Li} energy

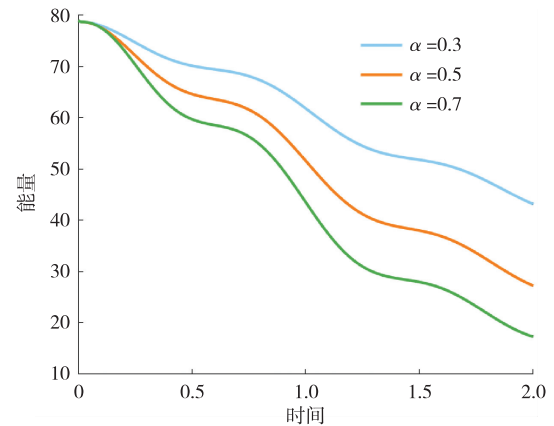


图 2 E 能量曲线图

Fig. 2 The graph of E energy

4 结束语

本文讨论了一种新的带有分数阶导数的 Maxwell 方程的有限元方法。将分数阶导数转化为辅助函数的无穷积分,然后使用求积公式对它进行近似地求解,使时间的全域问题转化为了局部问题。同时对经典能量泛函进行修正,使之具有了无条件能量稳定性。最后,针对该有限元方法的半离散格式,进行了严格的稳定性分析和误差估计,并利用数值结果对理论分析进行了验证。

参考文献:

- [1] COLE K S, COLE R H. Dispersion and absorption in dielectrics I, alternating current characteristics[J]. The Journal of Chemical Physics, 1941, 9(4): 341-351.
- [2] TORRES F, VAUDON P, JECKO B. Application of fractional derivatives to the FDTD modeling of pulse propagation in a Cole-Cole dispersive medium[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 1996, 13(5): 300-304.
- [3] REKANOS I T. FDTD schemes for wave propagation in Davidson-Cole dispersive media using auxiliary differential equations [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(3): 1467-1478.
- [4] REKANOS I T, PAPADOPOULOS T G. An auxiliary differential equation method for FDTD modeling of wave propagation in Cole-Cole dispersive media[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2010, 58(11): 3666-3674.
- [5] BAI X X, WANG S, RUI H X. Numerical analysis of finite-difference time-domain method for 2D/3D Maxwell's equations in a Cole-Cole dispersive medium[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2021, 93: 230-252.
- [6] BAI X X, RUI H X. A second-order space-time accurate scheme for Maxwell's equations in a Cole-Cole dispersive medium[J]. Engineering with Computers, 2022, 38(6): 5153-5172.
- [7] LI J C, HUANG Y Q, LIN Y P. Developing finite element methods for Maxwell's equations in a Cole-Cole dispersive medium [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2011, 33(6): 3153-3174.
- [8] CAI H Z, HU X Y, XIONG B, et al. Finite-element time-domain modeling of electromagnetic data in general dispersive medium using adaptive Padé series[J]. Computers & Geosciences, 2017, 109: 194-205.
- [9] LIU N D, CHEN Y P, HUANG Y Q. Two-grid methods for Maxwell's equations in a Cole-Cole dispersive medium[J]. East Asian Journal on Applied Mathematics, 2025, 14(2): 371-396.
- [10] XIAO J J, KONG D S. An unconditionally stable second-order scheme for Maxwell's equations in the Cole-Cole dispersive medium[J]. Applied Numerical Mathematics, 2025, 211: 211-227.
- [11] WANG J X, ZHANG J W, ZHANG Z M. A CG-DG method for Maxwell's equations in Cole-Cole dispersive media[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2021, 393: 113480.

- [12] XIE J M, LI M J, OU M Y. An efficient and energy decaying discontinuous Galerkin method for Maxwell's equations for the Cole-Cole dispersive medium[EB/OL]. (2022-08-23)[2025-09-29]. <https://arXiv.org/abs/2208.11157>.
- [13] HUANG C, WANG L L. An accurate spectral method for the transverse magnetic mode of Maxwell equations in Cole-Cole dispersive media[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2019, 45(2): 707-734.
- [14] CAUSLEY M F, PETROPOULOS P G, JIANG S D. Incorporating the Havriliak-Negami dielectric model in the FD-TD method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(10): 3884-3899.
- [15] MONK P. *Finite element methods for Maxwell's equations*[M]. Oxford: Clarendon Press, 2003.
- [16] NEDELEC J C. Mixed finite elements in \mathbf{R}^3 [J]. *Numerische Mathematik*, 1980, 35(3): 315-341.
- [17] LI J, HUANG Y. *Time-domain finite element methods for Maxwell's equations in metamaterials*[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2012.

An Unconditionally Stable Finite Element Method for Maxwell's Equations in Cole-Cole Dispersive Medium

HU Zhaofei¹, LI Maojun¹, XIE Jiangming²

(1. School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology, Chengdu 611731;

2. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Finite element method is employed to solve the Maxwell's equations in Cole-Cole dispersive media. First, the time-fractional derivative is transformed into an improper integral via a diffusive representation, and an equivalent local model is obtained by introducing auxiliary differential equations; in constructing the energy functional, correction terms are added to the classical energy to ensure a strictly monotonically decreasing energy functional. Second, the Raviart-Thomas-Nédélec mixed finite element method is adopted for spatial discretization, and the corresponding semi-discrete error is estimated. Finally, the improper integral is numerically approximated to yield a practical model, and a fully discrete scheme is derived by applying the Crank-Nicolson method for temporal discretization. Numerical experiments demonstrate that the proposed method exhibits energy stability for time-fractional derivatives of arbitrary order, and the numerical errors are in good agreement with the theoretical predictions.

Keywords: Maxwell equation; Cole-Cole dispersive medium; mixed finite element; error estimation

(责任编辑 黄 颖)