非凸优化与数值算法专题

DOI:10.11721/cqnuj20260209

基于 co-radiant 集的集优化问题广义 Gerstewitz 函数标量化研究*

胡一嫚，陈　洁，赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:为探究基于 co-radiant 集的广义 Gerstewitz 函数性质及集优化问题的标量化方法,本文借助 co-radiant 集的定义与性质,结合广义 Gerstewitz 函数理论展开研究。通过研究广义 Gerstewitz 函数的连续、递减等性质,本文探究了集优化问题与相应标量化问题解之间的关系,得到了相应的标量化结果。研究结果为集优化问题的求解提供了新的理论依据,丰富了 co-radiant 集与 Gerstewitz 函数相关领域的理论研究。

关键词:集优化;广义 Gerstewitz 函数;co-radiant 集;标量化

中图分类号:O221.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2026)02-0108-08

近些年来,作为优化理论重要分支之一的集值优化因在经济学、微分包含、最优控制等领域的广泛应用而受到学术界密切关注[1-4]。在有关集值优化问题的研究中,该类问题解的定义主要遵循 2 种准则:向量准则与集合准则。向量准则的核心目标是在集值目标映射所有取值的并集中寻找向量意义下的有效元,相关应用可参见文献[5-8]。集合准则由 Kuroiwa[9]提出,该准则基于集合间的序关系构建判定标准,它的核心在于在集值目标映射下可行域的像集族中寻找极小元。当考虑集合层面的“偏好”时,相较于仅关注个体元素有效性的向量准则,集合准则更具自然性与合理性,因而拥有更高的研究价值。目前基于集合准则的研究已取得了丰富成果[10-12],而基于该准则定义解的集值优化问题通常被称为集优化问题。

标量化方法是研究集优化问题的有效方法之一。通过线性或非线性标量化可将集优化问题转化为更易分析的标量优化问题。对该领域的研究主要围绕各类标量化函数的构建、推广及应用来开展,其中非线性标量化函数因对非凸、非预序等复杂结构的适配性更强,因而成为了研究焦点并积累了丰富成果。定向距离函数作为一类应用广泛的非线性标量化函数,它的性质及在优化问题中的应用参见文献[13-15]。Gerstewitz[16]在向量优化领域提出的 Gerstewitz 函数是另一类关键非线性标量化函数,该函数的相关性质研究见文献[17-19];Hamel 等人[20]在此基础上进一步推广了向量优化中的 Gerstewitz 函数,首次将标量化方法成功应用到集优化问题中。之后,不少学者继续对该函数展开研究,逐步完善了 Gerstewitz 函数在集优化领域的应用体系[21-23]。

值得注意的是,集值优化中传统的集合间序关系依赖凸锥诱导的预序结构。但在实际应用中,尤其是经济学领域,大量问题需处理“非预序”的序关系[24]。这推动了众多学者将非预序关系引入集值优化最优解的研究中[25-26]。而 Gutiérrez 等人[27]提出的 co-radiant 集作为一类具有特殊扩张性质的集合,在刻画集合序关系、诱导优化问题解概念方面有重要作用[28-29]。

受文献[13-29]研究工作的启发,本文旨在构建一类基于 co-radiant 集的序关系下的广义 Gerstewitz 函数。本文通过 co-radiant 集的定义与性质,首先系统分析了广义 Gerstewitz 函数的基本性质,然后建立了集优化问题的相应标量化结果,进而得到了标量化后问题与原问题之间解的等价关系。

1　预备知识

设 X 为度量空间,Y 为实赋范向量空间,$P_0(Y)$表示 Y 的所有非空子集构成的集族。对于集合 $A\subseteq Y$,分别

* **收稿日期**:2025-10-31　**修回日期**:2025-12-24　**网络出版时间**:2026-04-10T13:59
资助项目:国家重点研发计划项目(No. 2023YFA1011302);国家自然科学基金面上项目(No. 12171063);重庆市教育委员会科学技术研究计划青年项目(No. KJQN202500510);重庆市自然科学基金面上项目(No. CSTB2025NSCQ-GPX0994)
第一作者简介:胡一嫚,女,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:2536800685@qq.com;**通信作者简介**:赵克全,男,教授,博士生导师,E-mail:kequanz@163.com
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20260409.1438.004

用 cl A、int A 和 ∂A 表示 A 的拓扑闭包、拓扑内部和拓扑边界。点 $\boldsymbol{y}\in A$ 到集合 A 的距离定义为 $d(\boldsymbol{y},A)=\inf_{\boldsymbol{a}\in A}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\|$（约定 $d(\boldsymbol{y},\varnothing)=+\infty$），其中 $\|\boldsymbol{y}\|$ 表示 $\boldsymbol{y}$ 的范数；$U_r(\boldsymbol{y})$（$\overline{U}_r(\boldsymbol{y})$）表示以 $\boldsymbol{y}$ 为中心，$r>0$ 为半径的开（闭）邻域。

定义 1[17]　设 $C\subseteq Y$，若对任意 $\boldsymbol{c}\in C$ 与任意 $\alpha>1$，都有 $\alpha\boldsymbol{c}\in C$，则称 C 为 co-radiant 集。

对于 co-radiant 集 C，对任意的 $\varepsilon>0$，记 $C(\varepsilon)=\varepsilon C$，$C(\boldsymbol{0})=\bigcup_{\varepsilon>0}C(\varepsilon)\cup\{\boldsymbol{0}\}$。显然 $C(\boldsymbol{0})$ 是一个锥。若 $A+C$ 是闭集，则称 A 为 C-闭集；若 $A+C\neq Y$，则称 A 为 C-真集；若对 Y 中 0_Y 的任意邻域 U，都存在正数 t 使得 $A\subseteq tU+C$，则称 A 为 C-有界集。用 $P_{0(C)}(Y)$ 表示 Y 中所有 C-真集构成的族。对于 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'\in Y$，若 $\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}\in C$，记为 $\boldsymbol{y}\leqslant_C\boldsymbol{y}'$；若 $\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}\in\operatorname{int}C$，记为 $\boldsymbol{y}<_C\boldsymbol{y}'$。

引理 1[17]　设 C 为凸 co-radiant 集，则：1）对任意 $\varepsilon,\delta>0$，有 $C(\varepsilon)+C(\delta)\subseteq C(\varepsilon)$；2）对任意 $\varepsilon>0$，有 $C(\varepsilon)+C(\boldsymbol{0})=C(\varepsilon)$。

引理 2[20]　设 C 为凸 co-radiant 集，则：1）$C+C(\boldsymbol{0})=C$；2）$C+C\subseteq C$。

注 1　对于凸 co-radiant 集 C，若 $\boldsymbol{0}\in C$，则 C 是满足 $C=C(\boldsymbol{0})$ 的凸锥；若 $\boldsymbol{0}\notin C$，则 C 是关于凸锥 $C(\boldsymbol{0})$ 的改进集。

本文考虑如下集合：

$$\Omega=\{C\in P_{0(C)}(Y)\mid C\text{ 是一个尖的凸 co-radiant 集，满足 }\boldsymbol{0}\in C\text{ 且 }C+C(\boldsymbol{0})=C\}。$$

定义 2[20]　对于任意 $A,B\in P_0(Y)$，通过 co-radiant 集 $C\in\Omega$ 定义相应的二元关系为 $A\preceq_C^l B\Leftrightarrow B\subseteq A+C$。定义 $P_0(Y)$ 上关于 co-radiant 集 C 的等价关系 $\sim_C^l$ 为 $A\sim_C^l B\Leftrightarrow A\preceq_C^l B$ 且 $B\preceq_C^l A$。

用 $[\cdot]_C^l$ 表示 $P_0(Y)$ 中序关系 $\preceq_C^l$ 的等价关系类，显然有 $A\in[B]_C^l\Leftrightarrow A+C=B+C$。

本文考虑以下集合优化问题（$\preceq_C^l$-SOP）：

$$\min F(\boldsymbol{x}),$$
$$\text{s.t. }\boldsymbol{x}\in X。$$

其中：$F:X\to P_0(Y)$ 为一个集值映射，且对于每个 $\boldsymbol{x}\in X$，都有 $F(\boldsymbol{x})\neq\varnothing$。

定义 3[20]　设 $F:X\to P_0(Y)$ 为一个集值映射，$C\in\Omega$。有：

1）若 $\boldsymbol{x}\in X$ 且 $F(\boldsymbol{x})\preceq_C^l F(\overline{\boldsymbol{x}})\Rightarrow F(\overline{\boldsymbol{x}})\preceq_C^l F(\boldsymbol{x})$，则称 $\overline{\boldsymbol{x}}\in X$ 为（$\preceq_C^l$-SOP）的 C-l-极小解；

2）若 $\boldsymbol{x}\in X$ 且 $F(\overline{\boldsymbol{x}})\preceq_C^l F(\boldsymbol{x})\Rightarrow F(\boldsymbol{x})\preceq_C^l F(\overline{\boldsymbol{x}})$，则称 $\overline{\boldsymbol{x}}\in X$ 为（$\preceq_C^l$-SOP）的 C-l-极大解。

显然，如果 $\overline{\boldsymbol{x}}\in X$ 是（$\preceq_C^l$-SOP）的 C-l-极小解，且 $\boldsymbol{x}\in X$ 满足 $F(\boldsymbol{x})\in[F(\overline{\boldsymbol{x}})]_C^l$，那么 $\boldsymbol{x}\in X$ 也是（$\preceq_C^l$-SOP）的 C-l-极小解。C-l-极大解同理。

定义 4[11]　设 $S\subseteq P_0(Y)$，给定函数 $T:P_0(Y)\to\mathbf{R}$。

1）若对任意 $A,B\in S$，$A\preceq_C^l B\Rightarrow T(B)\leqslant T(A)$（或 $T(A)\leqslant T(B)$），则称该函数在 S 上是 l-递减的（或 l-递增的）。特别地，若 $A\in[B]_C^l$，则 $T(A)=T(B)$。

2）若对任意 $A,B\in S$，$A\prec_C^l B\Rightarrow T(B)<T(A)$（或 $T(A)<T(B)$），则称该函数在 S 上是严格 l-递减的（或严格 l-递增的）。

2　Gerstewitz 函数的相关性质

取定 $\boldsymbol{e}\in-\operatorname{int}C$。根据文献[11]，本文定义基于 co-radiant 集 C 的 Gerstewitz 函数如下：

定义 5　设 $\boldsymbol{a}\in Y$，对于任意 $\boldsymbol{y}\in Y$，定义函数 $\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C:Y\to\mathbf{R}$：$\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y})=\min\{t\in\mathbf{R}:\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C\}$，且称函数 $\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C$ 为基于 co-radiant 集 C 的 Gerstewitz 函数。

定理 1　函数 $\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C$ 在 Y 上是连续、递减且严格递减的。

证明　递减性。设 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'\in Y$ 且 $\boldsymbol{y}\leqslant_C\boldsymbol{y}'$，则有 $\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}\in C$，即：

$$\boldsymbol{y}'\in\boldsymbol{y}+C。\tag{1}$$

设 $\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y})=t_0$，则由函数定义有 $\boldsymbol{y}\in t_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C$。将该式代入式(1)可得 $\boldsymbol{y}'\in t_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C+C\subseteq t_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C$。因此 $\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y}')\leqslant t_0=\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y})$，递减性成立。

严格递减性。设 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'\in Y$ 且 $\boldsymbol{y}<_C\boldsymbol{y}'$，记 $\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}\in\operatorname{int}C$。设 $\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y})=t_0$，则 $\boldsymbol{y}\in t_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C$，从而存在 $c\in C$ 使得 $\boldsymbol{y}=t_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，且有 $\boldsymbol{y}'=t_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}'$。因为 $\boldsymbol{c}'\in\operatorname{int}C$，则存在 $\eta>0$ 使得 $\boldsymbol{c}'+\eta U\subseteq C$。又因为 $\boldsymbol{e}\in$

$-\mathrm{int}\ C$,则存在 $\delta>0$ 使得 $\delta(-\boldsymbol{e})\in\eta U\subseteq C-\boldsymbol{c}'$,故 $\boldsymbol{c}'+\delta(-\boldsymbol{e})\in C$,从而 $\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{c}'-\delta\boldsymbol{e})=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}'-\delta\boldsymbol{e}\in C+C\subseteq C$。因此有 $\boldsymbol{y}'=(t_0-\delta)\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}'-\delta\boldsymbol{e}\in(t_0-\delta)\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C$。故 $\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y}')\leqslant t_0-\delta<t_0=\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y})$,严格递减性成立。

连续性。令 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{e}\in\mathrm{int}\ C$,则存在 $\eta>0$,使得 $\boldsymbol{u}+\eta B_Y\subseteq C$,其中 B_Y 表示 Y 中的单位开球。任取 $\boldsymbol{h}\in Y$,当 $\boldsymbol{h}\neq 0$ 时,记 $\lambda=\dfrac{2\|\boldsymbol{h}\|}{\eta}$,则有 $\left\|\dfrac{\boldsymbol{h}}{\lambda}\right\|=\dfrac{\eta}{2}<\eta$,从而可得 $\boldsymbol{u}+\dfrac{\boldsymbol{h}}{\lambda}\in C$,$\boldsymbol{u}-\dfrac{\boldsymbol{h}}{\lambda}\in C$。由 $C(\boldsymbol{0})$的定义及它作为锥的性质可得 $-\lambda\boldsymbol{e}+\boldsymbol{h}=\lambda\left(\boldsymbol{u}+\dfrac{\boldsymbol{h}}{\lambda}\right)\in C(\boldsymbol{0})$,$-\lambda\boldsymbol{e}-\boldsymbol{h}=\lambda\left(\boldsymbol{u}-\dfrac{\boldsymbol{h}}{\lambda}\right)\in C(\boldsymbol{0})$。亦即 $\boldsymbol{h}\in\lambda\boldsymbol{e}+C(\boldsymbol{0})$,$-\boldsymbol{h}\in\lambda\boldsymbol{e}+C(\boldsymbol{0})$。现设 $\boldsymbol{y}\in Y$ 且 $t\in\mathbf{R}$ 满足 $\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C$。由 $\boldsymbol{h}\in\lambda\boldsymbol{e}+C(\boldsymbol{0})$及引理 2 中的 1)可得 $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h}\in(t+\lambda)\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C+C(\boldsymbol{0})\subseteq(t+\lambda)\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C$。因此,$\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h})\leqslant\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y})+\lambda$。另一方面,由 $-\boldsymbol{h}\in\lambda\boldsymbol{e}+C(\boldsymbol{0})$可得 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h}+(-\boldsymbol{h})\in(t+\lambda)\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C$,对任意满足 $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h}\in t\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C$ 的 t 都成立,从而有 $\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y})\leqslant\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h})+\lambda$。

综上所述,有 $|\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h})-\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y})|\leqslant\lambda=\dfrac{2}{\eta}\|\boldsymbol{h}\|$,故函数 $\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C$ 在 Y 上是连续的。 证毕

现在将向量 $\boldsymbol{a}$ 替换为集合 $A\in P_0(Y)$,得到函数 $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C:Y\to R\cup\{-\infty\}:\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})=\inf\{t\in\mathbf{R}:\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{e}+A+C\}$,对任意 $\boldsymbol{y}\in Y$。该函数也保持连续、递减且严格递减的特性,且对任意 $\boldsymbol{y}\in Y$,有 $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})=\inf_{\boldsymbol{a}\in A}\{\varphi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{a}}^C(\boldsymbol{y})\}$。

定理 2 设 $A\in P_0(Y)$,$C\in\Omega$,则 A 为 C-真集当且仅当对每个 $\boldsymbol{y}\in Y$,都有 $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})>-\infty$。

证明 必要性。假设存在 $\boldsymbol{y}_0\in Y$ 使得 $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})=-\infty$,则对任意 $t\in\mathbf{R}$ 都有 $\boldsymbol{y}_0\in t\boldsymbol{e}+A+C$,即存在 $\boldsymbol{a}_t\in A$,$\boldsymbol{c}_t\in C$,满足 $\boldsymbol{y}_0=t\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{c}_t$,从而有:

$$\boldsymbol{a}_t=\boldsymbol{y}_0-t\boldsymbol{e}-\boldsymbol{c}_t。\tag{2}$$

又因 $-\boldsymbol{e}\in\mathrm{int}\ C\subseteq C(\boldsymbol{0})$,则当 $t\to-\infty$时,$t\boldsymbol{e}=|t|(-\boldsymbol{e})\in C(\boldsymbol{0})$。结合式(2)可得:

$$\boldsymbol{y}_0-t\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{c}_t\in A+C。\tag{3}$$

另外,对任意 $\boldsymbol{y}\in Y$,存在 $\boldsymbol{c}'\in C$ 使得 $\boldsymbol{y}=(y_0-t\boldsymbol{e})+\boldsymbol{c}'$,将该式代入式(3)可得 $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{c}_t)+\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{a}_t+(\boldsymbol{c}_t+\boldsymbol{c}')\in A+C$。从而对任意 $\boldsymbol{y}\in Y$,都有 $\boldsymbol{y}\in A+C=Y$,这与 A 为 C-真集矛盾,故假设不成立,所以 $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})>-\infty$。

充分性。假设 A 不是 C-真集,那么对任意 $\boldsymbol{y}\in Y$,存在 $\boldsymbol{a}\in A$,$\boldsymbol{c}\in C$,满足 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$。又由 $-\boldsymbol{e}\in\mathrm{int}\ C\subseteq C(\boldsymbol{0})$,且对任意 $t<0$,$t\boldsymbol{e}=|t|(-\boldsymbol{e})\in C(\boldsymbol{0})$,结合引理 2 可得 $A+C=A+(C+C(\boldsymbol{0}))\subseteq|t|(-\boldsymbol{e})+A+C=t\boldsymbol{e}+A+C$。又因 $A+C=Y$,故对任意 $\boldsymbol{y}\in Y$,$\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{e}+A+C$ 对任意 t 都成立。结合定义 5 中 Gerstewitz 函数的定义,可得 $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})=-\infty$,这与 $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})>-\infty$矛盾,故假设不成立,所以 A 为 C-真集。 证毕

注 2 显然,若 $A\in P_{0(C)}(Y)$,由定理 2 知 $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\cdot)$是实函数。

定理 3 设 $A\in P_{0(C)}(Y)$,$r\in\mathbf{R}$ 且 $C\in\Omega$,则对任意 $y\in Y$ 有:1) $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})<r\Leftrightarrow\boldsymbol{y}\in r\boldsymbol{e}+A+\mathrm{int}\ C$;2) $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})\leqslant r\Leftrightarrow\boldsymbol{y}\in r\boldsymbol{e}+\mathrm{cl}(A+C)$;3) $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})\geqslant r\Leftrightarrow\boldsymbol{y}\notin r\boldsymbol{e}+A+\mathrm{int}\ C$;4) $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})=r\Leftrightarrow\boldsymbol{y}\in r\boldsymbol{e}+\partial(A+C)$;5) $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})>r\Leftrightarrow\boldsymbol{y}\notin r\boldsymbol{e}+\mathrm{cl}(A+C)$。

证明 1)的必要性。因为 $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})<r$,则存在 $t_0<r$,$\boldsymbol{a}_0\in A$ 及 $\boldsymbol{k}_0\in C$ 使得 $\boldsymbol{y}=t_0\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{k}_0=r\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}_0+(\boldsymbol{k}_0+(t_0-r)\boldsymbol{e})$。由 $\boldsymbol{e}\in-\mathrm{int}\ C$ 可知,存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $U_{\varepsilon_0}(\boldsymbol{e})\subseteq-\mathrm{int}\ C$。任取 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$且满足 $\varepsilon<r-t_0$。令 $t=r-\varepsilon$,则有 $t>t_0$。从而存在 $\boldsymbol{a}\in A$ 和 $\boldsymbol{k}\in C$ 使得 $\boldsymbol{y}=t\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k}=r\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{k}+(t-r)\boldsymbol{e})$。因为$(t-r)\boldsymbol{e}\in U_{\varepsilon_0}(-\boldsymbol{e})\subseteq\mathrm{int}\ C$,故$(t-r)\boldsymbol{e}\in\mathrm{int}\ C$。又因 $\boldsymbol{k}\in C\subseteq C(\boldsymbol{0})$,则结合定理 1 有 $\boldsymbol{k}+(t-r)\boldsymbol{e}\subseteq C(\boldsymbol{0})+\mathrm{int}\ C=\mathrm{int}\ C$。从而$\boldsymbol{y}\in r\boldsymbol{e}+A+\mathrm{int}\ C$。

1)的充分性。假设 $\boldsymbol{y}=r\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$,其中 $\boldsymbol{a}\in A$,$\boldsymbol{h}\in\mathrm{int}\ C$。那么存在 $\boldsymbol{h}$ 的一个领域 V 使得 $\boldsymbol{h}+V\subseteq\mathrm{int}\ C$。令 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{e}\in\mathrm{int}\ C$,则当 $\lambda\to0$ 时有 $\lambda\boldsymbol{u}\to0$。于是存在足够小的 $\lambda>0$ 使得$-\lambda\boldsymbol{u}\in V$。从而有 $\boldsymbol{h}-\lambda\boldsymbol{u}\in\mathrm{int}\ C\subseteq C$,于是得到 $\boldsymbol{y}=r\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}=(r-\lambda)\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{h}-\lambda\boldsymbol{u})\in(r-\lambda)\boldsymbol{e}+A+C$。因此,存在 $t=r-\lambda<r$ 使得 $\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{e}+A+C$。即 $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})\leqslant t<r$。

2)的必要性。若 $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})<r$,则由式(1)可知 $\boldsymbol{y}\in r\boldsymbol{e}+A+\mathrm{int}\ C\subseteq r\boldsymbol{e}+\mathrm{cl}(A+C)$。现在假设 $\varphi_{\boldsymbol{e},A}^C(\boldsymbol{y})=r$,则由下确界定义得,存在序列 $t_n<r$ 且 $t_n\to r$ 与相应的$\boldsymbol{a}_n\in A$ 及 $\boldsymbol{k}_n\in C$ 使得对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都有:$\boldsymbol{y}=t_n\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{k}_n$。上式与 $\boldsymbol{y}-r\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{k}_n)+(t_n-r)\boldsymbol{e}$ 等价。又因 $t_n\to r$,则$(t_n-r)\boldsymbol{e}\to0$,故而有 $\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{k}_n=(\boldsymbol{y}-r\boldsymbol{e})-(t_n-r)\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{y}-r\boldsymbol{e}$。因此,当 $n\to\infty$时有 $\boldsymbol{y}-r\boldsymbol{e}\in\mathrm{cl}(A+C)$,从而 $\boldsymbol{y}\in r\boldsymbol{e}+\mathrm{cl}(A+C)$。

2)的充分性。由 $\boldsymbol{y}\in r\boldsymbol{e}+\mathrm{cl}(A+C)$得 $y-r\boldsymbol{e}\in\mathrm{cl}(A+C)$。由闭包的性质知存在序列 $\boldsymbol{b}_n=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{k}_n\in A+C$,

使得 $n\to\infty$ 时，$\boldsymbol{b}_n\to\boldsymbol{y}-r\boldsymbol{e}$ 成立，其中：$\boldsymbol{a}_n\in A$，$\boldsymbol{k}_n\in C$，$n\in\mathbf{N}$。对于任意 $n\in\mathbf{N}$，有 $\boldsymbol{y}-\left(r+\frac{1}{n}\right)\boldsymbol{e}=y-\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}-\frac{1}{n}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{k}_n-\frac{1}{n}\boldsymbol{e}$。又因 $-\boldsymbol{e}\in\operatorname{int}C$，则 $-\frac{1}{n}\boldsymbol{e}\in C(\mathbf{0})$，再结合引理 1 有 $\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{k}_n-\frac{1}{n}\boldsymbol{e}\subseteq A+C+C(\mathbf{0})=A+C$，故对任意 $n\in\mathbf{N}$ 有 $\boldsymbol{y}\in\left(r+\frac{1}{n}\right)\boldsymbol{e}+A+C$，从而 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})\leqslant r$。

由 1)可知 3)显然成立。

4)的必要性。由 2)有 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})\leqslant r\Leftrightarrow\boldsymbol{y}\in r\boldsymbol{e}+\operatorname{cl}(A+C)$。由 3)有 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})\geqslant r\Leftrightarrow\boldsymbol{y}\notin r\boldsymbol{e}+A+\operatorname{int}C$。又因对于任意集合 A，$\partial A=\operatorname{cl}A\backslash\operatorname{int}A$ 成立，则显然有 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})=r\Rightarrow\boldsymbol{y}\in r\boldsymbol{e}+\partial(A+C)$。

4)的充分性。由 $\boldsymbol{y}\in r\boldsymbol{e}+\partial(A+C)\subseteq r\boldsymbol{e}+\operatorname{cl}(A+C)$，结合 2)得 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})\leqslant r$。又因 $\partial(A+C)\cap\operatorname{int}(A+C)=\varnothing$，所以 $\boldsymbol{y}\notin r\boldsymbol{e}+A+\operatorname{int}C$。结合 3)得 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})\geqslant r$。故 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})=r$。

由 2)可知 5)显然成立。　　证毕

定理 4　设 $A,B\in P_{0(C)}(Y)$ 且 $\boldsymbol{y}\in Y$，则以下结论成立：1) 若 A 是 C-闭集，则 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})=\min_{\boldsymbol{a}\in A}\{\varphi_{e,\boldsymbol{a}}^{C}(\boldsymbol{y})\}$；2) 若 $A\preceq_C^l B$，则 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})\leqslant\varphi_{e,B}^{C}(\boldsymbol{y})$，特别地，若 $A\in[B]_C^l$，则 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})=\varphi_{e,B}^{C}(\boldsymbol{y})$；3) 若 $A\prec_C^l B$ 且 B 是 C-闭集，则 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})<\varphi_{e,B}^{C}(\boldsymbol{y})$。

证明　结论 1)的证明。因为对任意的 $\boldsymbol{a}\in A$ 有 $t\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C\subseteq t\boldsymbol{e}+A+C$，故而有 $\{t\mid\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C\}\subseteq\{t\mid\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{e}+A+C\}$。又由于对所有 $\boldsymbol{a}\in A$ 满足 $\varphi_{e,\boldsymbol{a}}^{C}(\boldsymbol{y})\geqslant\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})$，因此 $\min_{\boldsymbol{a}\in A}\{\varphi_{e,\boldsymbol{a}}^{C}(\boldsymbol{y})\}\geqslant\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})$。另一方面，由 C-闭集的定义有 $\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{e}+A+C\Leftrightarrow\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{e}+A$，即存在 $\boldsymbol{a}\in A$ 使得 $\boldsymbol{y}=t\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}$。又因 $\mathbf{0}\in C$，故而 $\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}+C$，即 $\varphi_{e,\boldsymbol{a}}^{C}(\boldsymbol{y})\leqslant t$。取 $t=\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})$，则有 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})\geqslant\varphi_{e,\boldsymbol{a}}^{C}(\boldsymbol{y})$ 对某 $\boldsymbol{a}\in A$ 成立。综合上述，$\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})=\min_{\boldsymbol{a}\in A}\{\varphi_{e,\boldsymbol{a}}^{C}(\boldsymbol{y})\}$。

结论 2)的证明。由于 $A\preceq_C^l B$，即 $B\subseteq A+C$，则对任意 t 有 $t\boldsymbol{e}+A+C\subseteq t\boldsymbol{e}+B+C$，故有 $\{t\mid\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{e}+A+C\}\subseteq\{t\mid\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{e}+B+C\}$。因此，$\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})\leqslant\varphi_{e,B}^{C}(\boldsymbol{y})$。若 $A\in[B]_C^l$，则 $A+C=B+C=A$，从而 $t\boldsymbol{e}+A+C=t\boldsymbol{e}+B+C$，故 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})=\varphi_{e,B}^{C}(\boldsymbol{y})$。

结合以上得证的结论 1)、C-闭集及函数 $\varphi_{e,\boldsymbol{a}}^{C}$ 的严格递减性，结论 3)显然成立。　　证毕

定义 6　定义函数 $G_e(\cdot,\cdot):P_{0(C)}(Y)^2\to\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ 为 $G_e(A,B)=\sup_{\boldsymbol{b}\in B}\{\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b})\}$，对任意的 $(A,B)\in P_{0(C)}(Y)^2$。特别地，如果 A 是 C-闭集且 $r\in\mathbf{R}$，则由定理 3 中的 2)有：

$$G_e(A,B)\leqslant r\Leftrightarrow B\subseteq r\boldsymbol{e}+A+C。$$

定理 5　设 $B\in P_{0(C)}(Y)$ 且 $C\in\Omega$，则 B 是 C-有界的当且仅当 $G_e(C,B)<\infty$。

证明　必要性。因为 $\boldsymbol{e}\in-\operatorname{int}C$，所以 $-\boldsymbol{e}\in\operatorname{int}C\subseteq\operatorname{int}C(\mathbf{0})$。取 0_X 的邻域 U，其中 U 满足：

$$U=\boldsymbol{e}+\operatorname{int}C(\mathbf{0})。\tag{4}$$

因为 B 是 C-有界的，那么对邻域 U，存在 $\alpha>0$ 使得：

$$B\subseteq\alpha U+C。\tag{5}$$

将式(4)代入式(5)得 $B\subseteq\alpha(\boldsymbol{e}+\operatorname{int}C(\mathbf{0}))+C=\alpha\boldsymbol{e}+\alpha\operatorname{int}C(\mathbf{0})+C\subseteq\alpha\boldsymbol{e}+C(\mathbf{0})+C\subseteq\alpha\boldsymbol{e}+C$。从而对任意 $\boldsymbol{b}\in B$，存在 $\boldsymbol{c}\in C$ 使得 $\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{e}+c$，即 $\boldsymbol{b}\in\alpha\boldsymbol{e}+C$，则 $\varphi_{e,C}^{C}(\boldsymbol{b})\leqslant\alpha<\infty$。

充分性。假设 $G_e(C,B)<\infty$，那么存在 $r\in\mathbf{R}$ 使得 $G_e(C,B)<r$。即对任意 $\boldsymbol{b}\in B$，有 $\varphi_{e,C}^{C}(\boldsymbol{b})<r$。由定理 3 中的 1)可知，上述不等式可表示为 $\boldsymbol{b}\in r\boldsymbol{e}+\operatorname{int}C$，即：

$$B\subseteq r\boldsymbol{e}+\operatorname{int}C。\tag{6}$$

设 U' 是 0_X 的任意邻域，考虑 $\lambda>0$ 使得 $\lambda\boldsymbol{e}\in\lambda U'$，结合式(6)得 $B\subseteq rU'+\operatorname{int}C\subseteq rU'+C$。因此 B 是 C-有界的。　　证毕

定理 6　设 $A\in P_{0(C)}(Y)$ 是 C-闭集且 $B\in P_{0(C)}(Y)$，若 $G_e(A,B)<\infty$，则：

$$G_e(A,B)=\min\{t\in\mathbf{R}:B\subseteq t\boldsymbol{e}+A+C\}。$$

证明　令集合 $T=\{t\in\mathbf{R}\mid G_e(A,B)\leqslant t\}$，则由 $G_e(A,B)<\infty$ 与式(4)得 $\min\{T\}=G_e(A,B)$。　　证毕

定理 7　设 $A\in P_{0(C)}(Y)$ 是 C-闭集且 $B\in P_{0(C)}(Y)$ 为 C-紧集，若 $G_e(A,B)<\infty$，则：

$$G_e(A,B)=\max_{\boldsymbol{b}\in B}\{\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b})\}。$$

证明　设 $G_e(A,B)=\sup_{\boldsymbol{b}\in B}\{\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b})\}=m$，但对任意 $b\in B$ 均有 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b})<m$，因此存在 $\lambda_b>0$ 使得 $\boldsymbol{b}\in$

$(m-\lambda_b)\boldsymbol{e}+A+C$。考虑 A 的一个邻域 U_b,它满足

$$U_b=A+\frac{\lambda_b}{2}\boldsymbol{e}+\operatorname{int} C, \tag{7}$$

则可得 $B\subseteq\bigcup_{\lambda_b}(m-\lambda_b)\boldsymbol{e}+U_b+C$。因为 B 为 C-紧集,取有限子覆盖并结合式(7)可得 $B\subseteq\bigcup_{i=1}^{r}\left(m-\frac{\lambda_i}{2}\right)\boldsymbol{e}+A+\operatorname{int} C$。设最大系数 $m'=m-\frac{\lambda_1}{2}<m$,这与定理 6 矛盾,故前面的假设不成立,从而存在 $\boldsymbol{b}\in B$ 使得 $G_e(A,B)=\max_{\boldsymbol{b}\in B}\{\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b})\}$成立。 证毕

定理 8 设 A 是 C-有界的,$B\in P_{0(C)}(Y)$,则 B 是 C-有界的当且仅当 $G_e(A,B)<\infty$。

证明 必要性。假设 B 是 C-有界的,结合函数 $\varphi_{e,A}^{C}(\cdot)$的定义可得 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b})=\inf_{\boldsymbol{a}\in A}\{\varphi_{e,C}^{C}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\}$。固定任意 $\boldsymbol{a}_0\in A$,可得对所有 $\boldsymbol{b}\in B$ 有 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b})\leqslant\varphi_{e,C}^{C}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}_0)$,因此有:

$$G_e(A,B)=\sup_{\boldsymbol{b}\in B}\{\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b})\}\leqslant\sup_{\boldsymbol{b}\in B}\{\varphi_{e,C}^{C}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}_0)\}=G_e(C,B-\boldsymbol{a}_0)。$$

又因 B 是 C-有界的,结合定理 5 可得 $G_e(C,B-\boldsymbol{a}_0)<\infty$,故 $G_e(A,B)<\infty$。

充分性。设 $G_e(A,B)=r$,则对所有 $\boldsymbol{b}\in B$ 都有 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b})\leqslant r$。任取 $\alpha>0$,那么 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b})<r+\alpha$。结合定理 3 中的 1)可得 $\boldsymbol{b}\in(r+\alpha)\boldsymbol{e}+A+C$,即 $B\subseteq(r+\alpha)\boldsymbol{e}+A+C$。任取 0_X 的邻域 U,由 A 是 C-有界的知存在 $\lambda>0$ 使得 $B\subseteq(r+\alpha)\boldsymbol{e}+A\subseteq\lambda U+C$,故 B 是 C-有界的。 证毕

定理 9 设 $A,B,D\in P_{0(C)}(Y)$,$C\in\Omega$,则以下结论成立:1) 若 $B\in[A]_C^l$,则 $G_e(A,\cdot)=G_e(B,\cdot)$;2) $G_e(\cdot,A)$在 $P_{0(C)}(Y)$上是 l-递增的;3) $G_e(A,\cdot)$在 $P_{0(C)}(Y)$上是 l-递减的;4) 若 $B\in[D]_C^l$,则 $G_e(\cdot,B)=G_e(\cdot,D)$;5) 若 $B\in[A]_C^l$,则 $G_e(A,B)=G_e(B,A)$。

证明 结论 1)的证明。由定理 4 的结论 2)有 $\varphi_{e,B}^{C}(\boldsymbol{y})=\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})$,故 $\sup_{\boldsymbol{y}\in A}\{\varphi_{e,B}^{C}(\boldsymbol{y})\}=\sup_{\boldsymbol{y}\in B}\{\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{y})\}$,即 $G_e(A,\cdot)=G_e(B,\cdot)$。

结论 2)的证明。设 $B\preceq_C^l D$,然后证 $G_e(B,A)\leqslant G_e(D,A)$。由定理 4 的结论 2)有 $\varphi_{e,B}^{C}(\boldsymbol{y})\leqslant\varphi_{e,D}^{C}(\boldsymbol{y})$。取 $\boldsymbol{a}\in A$,则由 $B\preceq_C^l D$ 可得 $\varphi_{e,B}^{C}(\boldsymbol{a})\leqslant\varphi_{e,D}^{C}(\boldsymbol{a})$,故 $\sup_{\boldsymbol{a}\in A}\{\varphi_{e,B}^{C}(\boldsymbol{a})\}=\sup_{\boldsymbol{a}\in A}\{\varphi_{e,D}^{C}(\boldsymbol{a})\}$,即 $G_e(B,A)\leqslant G_e(D,A)$。故,$G_e(\cdot,A)$在 $P_{0(C)}(Y)$上是 l-递增的。

结论 3)的证明。由 $\varphi_{e,A}^{C}(\cdot)$是一个递减的函数可知若有 $B\preceq_C^l D$,即 $D\subseteq B+C$,那么对任意 $\boldsymbol{d}'\in D$,都存在 $\boldsymbol{b}'\in B$ 及 $\boldsymbol{c}'\in C$ 使得 $\boldsymbol{d}'=\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}'$。从而 $\boldsymbol{d}'-\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{c}'\in C$,即 $\boldsymbol{b}'\leqslant\boldsymbol{d}'$,因此 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{d}')\leqslant\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b}')$,$\sup_{\boldsymbol{d}'\in D}\{\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{d}')\}\leqslant\sup_{\boldsymbol{b}'\in B}\{\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b}')\}$,即 $G_e(A,D)\leqslant G_e(A,B)$。因此 $G_e(A,\cdot)$在 $P_{0(C)}(Y)$上是 l-递减的。

结论 4)的证明。由以上得证的结论 3)知,对于任意 $A\in P_{0(C)}(Y)$,$G_e(A,\cdot)$在 $P_{0(C)}(Y)$上是 l-递减的,即当 $B\preceq_C^l D$ 且 $D\preceq_C^l B$ 时,有:$G_e(A,D)\leqslant G_e(A,B)$,$G_e(A,B)\leqslant G_e(A,D)$。从而 $G_e(A,B)=G_e(A,D)$。由 A 的任意性得 $G_e(\cdot,B)=G_e(\cdot,D)$。

结论 5)的证明。因为 $B\in[A]_C^l$,由以上得证的结论 1)可得 $G_e(A,\cdot)=G_e(B,\cdot)$。对任意集合 $X\in P_{0(C)}(Y)$有 $G_e(A,X)=G_e(B,X)$。取 $X=B$,有 $G_e(A,B)=G_e(B,B)$;又由以上得证的结论 4)得 $G_e(\cdot,B)=G_e(\cdot,A)$。对任意集合 $X\in P_{0(C)}(Y)$有 $G_e(X,B)=G_e(X,A)$。取 $X=B$,有 $G_e(B,B)=G_e(B,A)$。综合上述,$G_e(A,B)=G_e(B,A)$。 证毕

定理 10 设 A 为 C-紧集,则:1) $G_e(A,\cdot)$在 C-紧集上是严格 l-递减的;2) $G_e(\cdot,A)$在 C-紧集上是严格 l-递增的。

证明 首先证明 1)。设 B,D 是 C-紧集且 $B\prec_C^l D$,则由定理 8 和定理 7 可知,存在 $\boldsymbol{d}'\in D$ 使得 $G_e(A,D)=\max_{\boldsymbol{d}\in D}\{\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{d})\}=\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{d}')$。又因 $D\subseteq B+\operatorname{int} C$,从而存在 $\boldsymbol{b}'\in B$ 和 $\boldsymbol{c}\in\operatorname{int} C$ 满足 $\boldsymbol{d}'=\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}'$。由 $\varphi_{e,A}^{C}(\cdot)$的严格递减性可得 $\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{d}')<\varphi_{e,A}^{C}(\boldsymbol{b}')$,从而有 $G_e(A,D)<G_e(A,B)$,故 $G_e(A,\cdot)$在 C-紧集上是严格 l-递减的。

接着证明 2)。设 B,D 是 C-紧集且 $B\prec_C^l D$,则由定理 4 的结论 3)知对任意 $\boldsymbol{a}\in A$ 有 $\varphi_{e,B}^{C}(\boldsymbol{a})<\varphi_{e,D}^{C}(\boldsymbol{a})$,从而 $\sup_{\boldsymbol{a}\in A}\{\varphi_{e,B}^{C}(\boldsymbol{a})\}<\sup_{\boldsymbol{a}\in A}\{\varphi_{e,D}^{C}(\boldsymbol{a})\}$,即 $G_e(B,A)<G_e(D,A)$,故 $G_e(\cdot,A)$在 C-紧集上是严格 l-递增的。 证毕

定理 11 设 $A\in P_{0(C)}(Y)$是 C-闭集,则以下结论成立:1) $G_e(A,A)=0$;2) 若 $A\in[B]_C^l$,则 $G_e(A,B)=G_e(B,A)=0$;3) $A\preceq_C^l B$ 当且仅当 $G_e(A,B)\leqslant 0$。

证明　结论 1)的证明。对任意 $A\in P_{0(C)}(Y)$，有 $A+C\subseteq A+C$，从而 $A\preceq_C^l A+C$；又因 $A\subseteq A+C\subseteq A+C+C$，从而 $A+C\preceq_C^l A$；因此 $A\in[A+C]_C^l$。又由定理 9 的结论 1)和结论 4)有 $G_e(A,A)=G_e(A,A+C)$，因此只需证 $G_e(A,A+C)=0$ 即可。因为 A 为 C-闭集且 C-真集，所以 $\partial(A+C)\neq\varnothing$，从而由定理 3 的 4)可知，存在 $\boldsymbol{y}\in\partial(A+C)$ 使得 $\varphi_{e,A}^C(\boldsymbol{y})=0$，故 $G_e(A,A+C)=0$。所以 $G_e(A,A)=0$。

结论 2)的证明。因为 $A\in[B]_C^l$，由定理 9 的结论 5)可得 $G_e(A,B)=G_e(B,A)$，又由定理 9 的结论 1)可知对任意集合 X 有 $G_e(A,X)=G_e(B,X)$，取 $X=A$，那么 $G_e(A,A)=G_e(B,A)$。再结合以上得证的结论 1)可得 $G_e(A,B)=G_e(B,A)=G_e(A,A)=0$。

由定理 9 的结论 2)、以上得证的结论 1)及定理 6，结论 3)显然成立。　　证毕

推论 1　设 A,B 是 C-紧集，则：1) $G_e(A,B)<0$ 当且仅当 $A\prec_C^l B$；2) $G_e(A,B)\geqslant 0$ 当且仅当 $A\prec_C^l B$ 不成立；3) $G_e(A,B)=0$ 当且仅当 $A\prec_C^l B$ 且 $A\prec_C^l B$ 不成立。

证明　1)的必要性。若 $G_e(A,B)<0$，则对所有的 $\boldsymbol{b}\in B$ 都有 $\varphi_{e,A}^C(\boldsymbol{b})<0$。由定理 3 中的 1)，有 $B\subseteq A+\operatorname{int}C$，所以 $A\prec_C^l B$。

1)的充分性。若 $A\prec_C^l B$，由定理 10 中的 1)和定理 11 的结论 1)有 $G_e(A,B)<G_e(A,A)=0$。

由 1)可知 2)和 3)显然成立。　　证毕

3　($\preceq_C^l$-SOP)的标量化研究

设 $M(P_{0(C)}(Y),\mathbf{R})$ 为从 $P_{0(C)}(Y)$ 到 $\mathbf{R}$ 的所有函数的集合。

定理 12　考虑($\preceq_C^l$-SOP)，假设映射 F 在集合 X 上是 C-闭值且 C-有界的，$\boldsymbol{x}_0\in X$，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是($\preceq_C^l$-SOP)的 C-l-极大解(或 C-l-极小解)当且仅当存在函数 $T\in M(P_{0(C)}(Y),\mathbf{R})$ 在 $P_{0(C)}(Y)$ 上 l-递减的(或 l-递增的)，且满足以下条件：1) 若 $\boldsymbol{x}\in X$ 且 $F(\boldsymbol{x})\in[F(\boldsymbol{x}_0)]_C^l$，则 $T(F(\boldsymbol{x}))=0$；2) 若 $\boldsymbol{x}\in X$ 且 $F(\boldsymbol{x})\notin[F(\boldsymbol{x}_0)]_C^l$，则 $T(F(\boldsymbol{x}))>0$；3) 若 $A\in P_{0(C)}(Y)$ 且 $F(\boldsymbol{x}_0)\preceq_C^l A$(或 $A\preceq_C^l F(\boldsymbol{x}_0)$)，则 $T(A)\leqslant 0$。

证明　此处证明 $\boldsymbol{x}_0$ 是 C-l-极大解的情况，$\boldsymbol{x}_0$ 是 C-l-极小解时同理。

必要性。假设 $\boldsymbol{x}_0$ 是($\preceq_C^l$-SOP)的 C-l-极大解，对于任意 $\boldsymbol{e}\in-\operatorname{int}C$，由定理 9 的结论 3)可以得到 $T(\cdot)=G_e(F(\boldsymbol{x}_0),\cdot)\in M(P_{0(C)}(Y),\mathbf{R})$ 在 $P_{0(C)}(Y)$ 上是 l-递减的，因此只需证明 T 满足条件 1)～3)即可。

由定理 11 的结论 2)可知，若 $\boldsymbol{x}\in X$ 且 $F(\boldsymbol{x})\in[F(\boldsymbol{x}_0)]_C^l$，那么 $T(F(\boldsymbol{x}))=G_e(F(\boldsymbol{x}_0),F(\boldsymbol{x}))=0$，从而条件 1)成立；由定理 11 的结论 3)可知，若 $A\in P_{0(C)}(Y)$ 且 $F(\boldsymbol{x}_0)\preceq_C^l A$，则 $T(A)=G_e(F(\boldsymbol{x}_0),A)\leqslant 0$，从而条件 3)成立；对于条件 2)，因为 $\boldsymbol{x}_0$ 是($\preceq_C^l$-SOP)的 C-l-极大解，那么对每个 $\boldsymbol{x}\in X$ 使得 $F(\boldsymbol{x})\notin[F(\boldsymbol{x}_0)]_C^l$ 都有 $F(\boldsymbol{x}_0)\not\preceq_C^l F(\boldsymbol{x})$，则由定理 11 的结论 3)有 $T(F(\boldsymbol{x}))=G_e(F(\boldsymbol{x}_0),F(\boldsymbol{x}))>0$。

充分性。如果对于某个在 $P_{0(C)}(Y)$ 上具有 l-递减性质的函数 $T\in M(P_{0(C)}(Y),\mathbf{R})$ 而言，条件 1)～3)均成立，那么假设存在 $\boldsymbol{x}'\in X$ 使得 $F(\boldsymbol{x}')\notin[F(\boldsymbol{x}_0)]_C^l$ 且 $F(\boldsymbol{x}_0)\preceq_C^l F(\boldsymbol{x}')$，则由条件 2)有 $T(F(\boldsymbol{x}'))>0$；由条件 3)有 $T(F(\boldsymbol{x}'))\leqslant 0$。这 2 个不等式显然矛盾，故假设不成立，从而 $\boldsymbol{x}_0$ 是($\preceq_C^l$-SOP)的 C-l-极大解。　　证毕

设 $T\in M(P_{0(C)}(Y),\mathbf{R})$，若映射 F 在集合 X 上为 C-真值，则可以建立如下标量优化问题($\mathrm{SP_T}$)：

$$\min\ T(F(\boldsymbol{x})),$$
$$\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{x}\in X。$$

定义 7　若对所有 $\boldsymbol{x}\in X$，均有 $T(F(\boldsymbol{x}_0))\leqslant T(F(\boldsymbol{x}))$，则称 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 为($\mathrm{SP_T}$)的解。

根据定理 12，得到($\preceq_C^l$-SOP)的如下标量化结果。

定理 13　假设映射 F 在集合 X 上是 C-闭值且 C-有界的，则 $x_0\in X$ 是($\preceq_C^l$-SOP)的 C-l-极大解(或 C-l-极小解)当且仅当存在函数 $T\in M(P_{0(C)}(Y),\mathbf{R})$ 在 $P_{0(C)}(Y)$ 上 l-递减的(或 l-递增的)，满足：1) $\boldsymbol{x}_0$ 是($\mathrm{SP_T}$)的解；2) 对任意 $\boldsymbol{x}\in X$，均有 $F(\boldsymbol{x})\in[F(\boldsymbol{x}_0)]_C^l\Leftrightarrow T(F(\boldsymbol{x}))=0$。

推论 2　假设映射 F 在集合 X 上是 C-闭值且 C-有界的。设 $\boldsymbol{e}\in-\operatorname{int}C$，则 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 是($\preceq_C^l$-SOP)的 C-l-极大解(或 C-l-极小解)当且仅当 $\boldsymbol{x}_0$ 是标量问题 $\begin{cases}\min G_e(F(\boldsymbol{x}_0),F(\boldsymbol{x}))\\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{x}\in X\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\min G_e(F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{x}_0))\\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{x}\in X\end{cases}$ 的解，并且对任意 $\boldsymbol{x}\in X$ 均有 $G_e(F(x_0),F(x))=0\Leftrightarrow F(\boldsymbol{x})\in[F(\boldsymbol{x}_0)]_C^l$ 或 $G_e(F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{x}_0))=0\Leftrightarrow F(\boldsymbol{x})\in[F(\boldsymbol{x}_0)]_C^l$。

4 结束语

本文结合 co-radiant 集性质与 Gerstewitz 函数理论研究了基于 co-radiant 集的广义 Gerstewitz 函数及集优化标量化方法。研究证实,在凸 co-radiant 集、闭集或紧集等特定结构下,该广义函数具备连续、递减且严格递减特性。在此基础上,本文探究了集优化问题与相应标量化问题解之间的关系,得到了相应的标量化结果。研究结果为集优化问题的求解提供了新的理论依据,丰富了 co-radiant 集与 Gerstewitz 函数相关领域的理论研究。

参考文献:

[1] Aubin J P, Cellina A. Differential inclusions: set-valued maps and viability theory[M]. Heidelberg: Springer, 1984.

[2] Klein E, Thompson A C. Theory of correspondences including applications to mathematical economics[M]. New York: John Wiley, 1984.

[3] Dempe S. Set-valued optimization: an introduction with applications[J]. Optimization, 2016, 65 (4): 905-906.

[4] Chen G Y, Jahn J. Optimality conditions for set-valued optimization problems[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 1998, 48 (2): 187-200.

[5] Miglierina E, Molho E, Rocca M. Well-posedness and scalarization in vector optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2005, 126 (2): 391-409.

[6] Peng Z Y, Peng J W, Long X J, et al. On the stability of solutions for semi-infinite vector optimization problems[J]. Journal of Global Optimization, 2018, 70 (1): 55-69.

[7] Peng Z Y, Wang X F, Yang X M. Connectedness of approximate efficient solutions for generalized semi-infinite vector optimization problems[J]. Set-Valued and Variational Analysis, 2019, 27 (1): 103-118.

[8] Shao C Y, Peng Z Y, Xiao Y B, et al. Connectedness of solution sets for generalized vector equilibrium problems *via* free-disposal sets in complete metric space[J]. Optimization Letters, 2022, 16 (7): 2073-2093.

[9] Kuroiwa D. Some duality theorems of set-valued optimization with natural criteria[C]//Proceedings of the international conference on nonlinear analysis and convex analysis. Singapore: World Scientific, 1999: 221-228.

[10] Alonso M, Rodríguez-Marín L. Set-relations and optimality conditions in set-valued maps[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2005, 63 (8): 1167-1179.

[11] Hernández E, Rodríguez-Marín L. Nonconvex scalarization in set optimization with set-valued maps[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 325 (1): 1-18.

[12] Peng Z Y, Chen X J, Zhao Y B, et al. Painlevé-Kuratowski convergence of minimal solutions for set-valued optimization problems via improvement sets[J]. Journal of Global Optimization, 2023, 87 (2/3/4): 759-781.

[13] Delfour M C, Zolesio J P. Shape analysis via oriented distance functions[J]. Journal of Functional Analysis, 1994, 123 (1): 129-201.

[14] Zaffaroni A. Degrees of efficiency and degrees of minimality[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2003, 42 (3): 1071-1086.

[15] Jiménez B, Novo V, Vílchez A. A set scalarization function based on the oriented distance and relations with other set scalarizations[J]. Optimization, 2018, 67 (12): 2091-2116.

[16] Gerstewitz C. Nichtkonvexe dualität in der vektoroptimierung[J]. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule für Chemie Carl Schorlemmer, Leuna-Merseburg, 1983, 25 (3): 357-364.

[17] Gerth C, Weidner P. Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1990, 67 (2): 297-320.

[18] Tammer C, Zălinescu C. Lipschitz properties of the scalarization function and applications[J]. Optimization, 2010, 59 (2): 305-319.

[19] Weidner P. Gerstewitz functionals on linear spaces and functionals with uniform sublevel sets[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2017, 173 (3): 812-827.

[20] Hamel A, Löhne A. Minimal set theorems[EB/OL]. (2019-04-11) [2025-10-31]. https://www.researchgate.net/publication/228904606_Minimal_set_theorems.

[21] Shimizu A, Nishizawa S, Tanaka T. Optimality conditions in set-valued optimization using nonlinear scalarization methods [C]//Proceedings of the Fourth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis. Yokohama:

Yokohama Publishers, 2007: 565-574.

[22] Araya Y. Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2012, 75 (9): 3821-3835.

[23] Bao T Q, Tammer C. Scalarization functionals with uniform level sets in set optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2019, 182 (1): 310-335.

[24] Flores-Bazán F, Hernández E. Optimality conditions for a unified vector optimization problem with not necessarily preordering relations[J]. Journal of Global Optimization, 2013, 56 (2): 299-315.

[25] Dhingra M, Lalitha C S. Set optimization using improvement sets[J]. Yugoslav Journal of Operations Research, 2017, 27 (2): 153-167.

[26] Zhou Z A, Yang X M, Zhao K Q. E-super efficiency of set-valued optimization problems involving improvement sets[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2016, 12 (3): 1031-1039.

[27] Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. On approximate efficiency in multiobjective programming[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2006, 64 (1): 165-185.

[28] Zeng Y, Peng Z Y, Tammer C, et al. Scalarization and well-posedness for set optimization problems involving general set less relations[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2025, 207 (2): 37.

[29] Yao B, Li S. Scalarization and well-posedness for set optimization using coradiant sets[J]. Filomat, 2019, 33 (11): 3457-3471.

Special Section on Non-Convex Optimization and Numerical Algorithms

Research on the Generalized Gerstewitz Function Scalarization of Set Optimization Problems Based on Co-Radiant Sets

HU Yiman, CHEN Jie, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: To explore the properties of the generalized Gerstewitz function based on co-radiant sets and the scalarization methods for set optimization problems, this paper conducts research by leveraging the definition and properties of co-radiant sets and combining the theory of generalized Gerstewitz functions. Through the study of the continuous and decreasing properties of the generalized Gerstewitz function, this paper investigates the relationship between the solutions of set optimization problems and the corresponding scalarized problems, and obtains the corresponding scalarization results. The research results provide a new theoretical basis for solving set optimization problems and enrich the theoretical research in the fields of co-radiant sets and Gerstewitz functions.

Keywords: set optimization; generalized Gerstewitz function; co-radiant set; scalarization

(责任编辑 方 兴)