

一类偏序关系下集优化问题的标量化与适定性研究^{*}

侯 婷, 陈 洁, 赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:研究了集优化问题广义 $\overline{D}_0$ -适定性与标量化问题广义适定性的充分必要条件。基于 Minkowski 差所定义的偏序关系,引入一类新的非线性标量化函数,通过对该函数的单调性严格推导并结合偏序关系的内在特性,完成了一定条件下集优化问题弱极小解的刻画以及适定性结果的推导,得到了集优化问题弱极小解的标量化等价条件,证明了集优化问题是广义 $\overline{D}_0$ -适定的当且仅当标量化问题是广义适定的。所得结果丰富了集优化问题标量化方法及适定性理论相关成果。

关键词:集优化问题;集合序关系;标量化函数;适定性

中图分类号:O221.6

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2026)03-0012-08

集优化问题的求解方法主要分为 2 类,即集方法与向量方法。Borwein^[1]作为向量优化方法的早期开拓者,于 1991 年在凸向量优化领域提出了超有效性的 Lagrange 乘数定理,将超有效解等价刻画为特定 Lagrange 函数的鞍点形式。然而,这一方法严格依赖于凸性条件的约束,并且计算过程较为复杂,因而在实际问题中缺乏普适性。1997 年,Kuroiwa 等人^[2]提出了集方法,后续研究者围绕该方法开展了大量探索,产出了丰富的研究成果。2015 年,Zhou 等人^[3]针对集优化问题的 E -超有效性展开研究,基于 E -超有效性构建了一定条件下集优化问题的标量化定理,然后推导得到集优化问题在 E -超有效性意义下的 Lagrange 乘子定理。2016 年,Xu 等人^[4]引入有向距离函数推广而来的新非线性标量化函数,并得到新的最优性条件和标量化成果,为后续集优化研究带来了新启发。在集合关系的研究中,Karaman 等人^[5]进一步基于 Minkowski 差定义了一类集合序关系,该类序关系在有界集族上是偏序关系;该研究还通过标量化函数将此类偏序关系的集优化问题转化为标量优化问题;之后 Khushboo 等人^[6]基于上述研究提出的非空有界集族上的偏序关系,为集优化问题的极小解和弱极小解构建了标量化方法。Zhou 等人^[7]在局部凸空间中引入带可变序结构集优化问题的“近似弱有效解”这一新概念,并将它与其他类型解加以比较,且推导出该类带可变序结构集优化问题的一个非线性标量化定理。Gupta 等人^[8]引入新的标量化函数,得到了集优化问题极小解和弱极小解的标量化结果。Xu 等人^[9]引入了涉及 Minkowski 差的集序关系下集优化问题的近似极小解概念,给出了近似极小解与近似弱极小解的若干性质,特别是稠密性和非线性标量化结果。近些年来,集值优化数值算法研究也取得了系列关键进展,Eichfelder 等人^[10]提出了一种向量化方法,通过构造参数化的多目标优化问题族,使得该族的最优解集能够在特定意义下,以任意精度逼近原集优化问题的最优解集。2024 年,Ghosh 等人^[11]提出了一种 Newton 法,推导了相应的迭代序列,证明了该序列具有局部收敛性。同年,Ghosh 等人^[12]进一步提出集值优化拟 Newton 法,借助划分集构造向量优化问题族,通过近似 Hessian 矩阵简化计算,基于下降方向完成迭代更新,在保留局部超线性收敛特性的同时,明显提升了算法对大规模集优化问题的适用性,推动了集值优化算法向高效化、实用化方向发展。

解的适定性是集优化领域的核心研究课题,它对于揭示解的稳定性、收敛性以及算法设计的合理性具有重要意义。Tikhonov^[13]首次针对无约束标量优化问题提出适定性概念,要求极小化序列收敛到优化问题的唯一解,但该定义局限于可行域内。为了突破这一局限,学者们对适定性概念进行了持续推广。Zhang 等人^[14]借助广义 Gerstewitz 函数,得到了 3 种适定性与 3 种标量优化问题适定性之间的等价关系。还推导了集优化问题适

^{*} 收稿日期:2025-11-12 修回日期:2026-03-11 网络出版时间:2026-04-10T14:06

资助项目:国家重点研发计划项目(No. 2023YFA1011302);国家自然科学基金面上项目(No. 12171063);重庆市教育委员会科学技术研究计划青年项目(No. KJQN202500510);重庆市自然科学基金面上项目(No. CSTB2025NSCQ-GPX0994)

第一作者简介:侯婷,女,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:2648013494@qq.com;通信作者简介:赵克全,男,教授,博士生导师,E-mail:kequanz@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20260409.1509.008

定性的充要条件。Sach^[15]引入了不同于 Gerstewitz 函数的新型非线性标量化函数,讨论了这些函数的一些性质,并将它们用于证明带移动锥的广义向量拟平衡问题解的存在性以及参数向量拟平衡问题解映射的下半连续性的新结果。卢婧琦等人^[16]指出,集值优化 l - B_Z 适定性理论可直接应用于不确定性向量博弈的鲁棒 Nash 均衡分析,通过保证博弈均衡点的最小化序列收敛性,为策略扰动下的决策稳定性提供充分条件。谢林燕^[17]将集值优化 LP 适定性应用于电子商务决策优化,为电商领域的决策问题提供了理论支撑。Long 等人^[18]提出 3 种点态适定性,借助广义非线性标量化函数建立了 3 种点态适定性 with 集优化问题适定性的等价关系。基于 Karaman 等人^[5]定义的集序关系,Preechasilp 等人^[19]研究了一些点态和全局适定性概念并运用非线性标量化函数建立了集优化问题的这 3 种点态适定性 with 标量优化问题适定性之间的关联。2019 年,Gupta 等人^[20]进一步定义了集优化问题的 3 种适定性,明确了它们之间的充要条件;此外,他们基于广义定向距离^[4]提出了 2 种不同的标量化优化问题。Vui 等人^[21]引入了集优化问题的多种 LP 适定性概念,并探讨了它们之间的关系并给出了基准问题具有 LP 适定性的充分必要条件。2021 年,Gupta 等人^[22]引入了 LP 适定性,并通过 Hausdorff 上半连续性对 LP 适定性进行刻画。Som 等人^[23]对集方法下集优化问题点态适定性的多种定义展开了比较研究,对一些现有结果提出了修正建议,并引入一种新的点态适定性,探讨了它的性质以及该适定性与其他点态适定性的联系。Zhou 等人^[24]提出了集优化问题的适定性和广义适定性,推导了相应的充分必要条件,并通过非线性标量化函数深入研究了集优化问题适定性 with 广义适定性的充分必要条件。Li 等人^[25]建立了 3 种不同类型适定性之间的联系,并探究集优化问题的适定性 with 标量优化问题的适定性之间存在的关系。受文献[8,24]的启发,本文聚焦于 Minkowski 差定义的弱集序关系,在已有文献基础上,探究集优化问题广义 $\overline{D}_0$ -适定性 with 标量优化问题广义适定性的关系。

1 预备知识

在集优化问题的研究中,本文采用以下规范化符号体系与数学设定。设 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ 与 $Y \subseteq \mathbf{R}^p$ 分别为 n 维、 p 维欧式空间,其中 $n, p \in \mathbf{Z}^+, \mathbf{Z}^+$ 为正整数集。本文记零元为 $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^\top$, $\mathcal{P}(Y)$ 为 Y 的全体非空子集构成的集合, $\mathcal{B}(Y)$ 为 Y 的全体非空有界子集构成的集合。令 $\mathbf{R}_+ := \{r \in \mathbf{R}; r \geq 0\}$, $\mathbf{R}_- := \{r \in \mathbf{R}; r \leq 0\}$, $\mathbf{R}_{++} := \{r \in \mathbf{R}; r > 0\}$ 。对于任何集合 $A \in \mathcal{P}(Y)$, $\text{cl } A$, $\text{int } A$ 和 ∂A 分别表示 A 的拓扑闭包、拓扑内部和拓扑边界。 $\forall \mathbf{x} \in X$, $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+$, 记 $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ 是以 $\mathbf{x}$ 为圆心、 ε 为半径的开球, $\overline{D}_0$ 是原点处的单位闭球。设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ 且 $\mathcal{U} \neq \emptyset$ 。 $\forall A, B \in \mathcal{U}$, 记 $A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b}; \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$, $A - B = \{\mathbf{a} - \mathbf{b}; \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$ 。基于 Minkowski 差的定义,本文记 $A \ominus B := \{\mathbf{y} \in Y; \mathbf{y} + B \subseteq A\}$ 。设 $C \subseteq Y$ 是一个凸尖锥,即 C 满足: $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}\}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \in C, \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C, \forall \lambda \in [0, 1]; \lambda \mathbf{c} \in C, \forall \mathbf{c} \in C, \forall \lambda \geq 0$ 。

文献[5]基于 Minkowski 差,且 $\forall A, B \in \mathcal{P}(Y)$ 提出了一种新的序关系,定义如下:

$$A \leq_c^m B \Leftrightarrow (B \ominus A) \cap C \neq \emptyset, A <_c^m B \Leftrightarrow (B \ominus A) \cap \text{int } C \neq \emptyset.$$

设集值映射 $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ 值非空,令 S 是 X 的 1 个非空子集, $\forall \mathbf{x} \in X, \forall F(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}(Y)$ 都有 $F(X) := \bigcup_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x})$ 。本文主要考虑如下集优化问题(SOP):

$$\begin{aligned} & \min F(\mathbf{x}), \\ & \text{s. t. } \mathbf{x} \in S. \end{aligned}$$

Gupta 等人^[8]提出了关于集优化问题(SOP)在序关系 $\leq_c^m$ 与 $<_c^m$ 下的极小解和弱极小解的概念。

定义 1^[8] 点 $\mathbf{x}_0 \in S$ 被称为集优化问题(SOP)的 $\leq_c^m$ -极小解,如果不存在 $\mathbf{x} \in S$,使得 $F(\mathbf{x}) \leq_c^m F(\mathbf{x}_0)$ 且 $F(\mathbf{x}) \neq F(\mathbf{x}_0)$;点 $\mathbf{x}_0 \in S$ 被称为集优化问题(SOP)的弱 $<_c^m$ -极小解,如果不存在 $\mathbf{x} \in S$,使得 $F(\mathbf{x}) <_c^m F(\mathbf{x}_0)$ 。

记 $m\text{-Min}(F, S)$ 为全体 $\leq_c^m$ -极小解的集合, $m\text{-WMin}(F, S)$ 为全体弱 $<_c^m$ -极小解的集合。在本文中,假设 $m\text{-WMin}(F, S)$ 非空。

定义 2^[8] 函数 $T: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 被称作:

- 1) 在 $\mathcal{U}$ 上是 $\leq_c^m$ -递增的,如果 $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{U}, A_1 \leq_c^m A_2$, 有 $T(A_1) \leq T(A_2)$ 成立。
- 2) 在 $\mathcal{U}$ 上是严格 $<_c^m$ -递增的,如果 $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{U}, A_1 \leq_c^m A_2$, 有 $T(A_1) < T(A_2)$ 成立。

Gupta 等人^[8]还引入了如下集优化问题标量化函数,并研究了相关性质。

定义 3^[8] 设 A 和 B 是 $\mathcal{P}(Y)$ 中的任意非空集合,定义标量函数 $I_m(\cdot, \cdot): \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathbf{R}_+$ 为:

$$I_m(A, B) = \inf\{r \in \mathbf{R}_+ : A \leq_c^m r\bar{D}_0 + B\}.$$

对于上述标量化函数,引入如下引理。

引理 1^[8] 设 $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ 且 $r \in \mathbf{R}_{++}$, 那么 $I_m(A, B) < r$ 当且仅当 $A <_c^m r\bar{D}_0 + B$ 。

引理 2^[8] 设 $B \in \mathcal{P}(Y)$ 为紧集, 则函数 $I_m(\cdot, B)$ 在 $\mathcal{P}(Y)$ 是严格 $<_c^m$ -递增的。

引理 3^[8] 对于任意 $A \in \mathcal{P}(Y)$, 有 $I_m(A, A) = 0$ 。

引理 4^[8] 对于任意 $A, B \in \mathcal{P}(Y)$, 有 $I_m(A, B) \geq 0$ 。

2 标量化结果

本节主要建立集优化问题(SOP)的标量化结果。假设 $F: S \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ 是紧值函数, 即 $\forall x \in S$, 函数值 $h(F(x))$ 都是 $\mathcal{P}(Y)$ 中的紧集, 记 $\mathcal{F}(S) := \{F(x) : x \in S\}$ 。本文定义如下的标量化函数:

$$h(F(x)) := \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x), F(z)).$$

现考虑如下的标量化问题(P):

$$\begin{aligned} & \min h(F(x)), \\ & \text{s. t. } x \in S. \end{aligned}$$

记标量化问题(P)的最优解集为:

$$\arg \min(S, h) = \{x \in S : h(F(x)) \leq h(F(y)), \forall y \in S\}.$$

下面给出一个具体算例以说明上述标量化函数, 并与文献[24]中的标量化函数作比较。本算例参考了文献[8], 但采用了不同的参数。

例 1 设 $X = \mathbf{R}, Y = \mathbf{R}^2, S = \{1, 2\}$, 序锥 $C = \mathbf{R}_+^2$, 定义集值映射 $F: S \rightarrow 2^Y$,

$$F(x) = \begin{cases} \bar{D}((0, 0), 1), & x = 1; \\ \bar{D}((-1, -1), 1), & x = 2. \end{cases}$$

其中: $\bar{D}(c, r)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中以 c 为圆心、 r 为半径的闭圆盘。定义如下集优化问题:

$$\begin{aligned} & \min F(x), \\ & \text{s. t. } x \in S. \end{aligned} \quad (1)$$

经分析, 弱 $<_c^m$ -极小解集 $m\text{-WMin}(F, S) = \{2\}$, $<_c^m$ -极小解集 $m\text{-Min}(F, S) = \{2\}$ 。下面分别使用本文标量化函数与 Gerstewitz 标量化函对该问题进行分析与计算。本文构造的标量化函数为:

$$h(F(x)) := \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x), F(z)).$$

当 $x = 1$ 时,

$$h(F(1)) = I_m(F(1), F(2)) = \inf\{r \in \mathbf{R}_+ : F(1) \leq_c^m r\bar{D}_0 + F(2)\} =$$

$$\inf\{r \in \mathbf{R}_+ : (r\bar{D}_0 + F(2) \ominus F(1)) \cap C \neq \emptyset\} = \inf\{r \in \mathbf{R}_+ : (\bar{D}((-1, -1), r) \cap C \neq \emptyset)\} = \sqrt{2}.$$

当 $x = 2$ 时, $h(F(2)) = I_m(F(2), F(2)) = 0$ 。

下面引入文献[24]中的标量化函数:

$$h(F(x)) := \inf_{z \in m\text{-Min}(F, S)} I_m(F(x), F(z)),$$

其中: $I_m(F(x), F(z)) = \inf\{r \in \mathbf{R}_+ : F(x) \leq_c^m r\mathbf{k}_0 + F(z)\}, \mathbf{k}_0 \in \text{int } C$ 。

如果取方向向量 $\mathbf{k}_0 = (1, 1)^T$, 则有:

$$h(F(1)) = I_m(F(1), F(2)) = \inf\{r \in \mathbf{R}_+ : F(1) \leq_c^m r\mathbf{k}_0 + F(2)\} =$$

$$\inf\{r \in \mathbf{R}_+ : (r\mathbf{k}_0 + F(2) \ominus F(1)) \cap C \neq \emptyset\} = \inf\{r \in \mathbf{R}_+ : (r-1, r-1)^T \cap C \neq \emptyset\} = 1,$$

$$h(F(2)) = I_m(F(2), F(2)) = 0.$$

如果取方向向量 $\mathbf{k}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$, 则有:

$$h(F(1)) = I_m(F(1), F(2)) = \inf\{r \in \mathbf{R}_+ : F(1) \leq_c^m r\mathbf{k}_0 + F(2)\} =$$

$$\inf\{r \in \mathbf{R}_+ : (r\mathbf{k}_0 + F(2) \ominus F(1)) \cap C \neq \emptyset\} = \inf\left\{r \in \mathbf{R}_+ : \left(r - \frac{1}{2}, r - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T \cap C \neq \emptyset\right\} = 2,$$

$$h(F(2)) = I_m(F(2), F(2)) = 0.$$

对比2种标量化函数可知,本文提出的标量化函数值不依赖方向向量 k_0 的选取,从而能够避免对该向量的选取而得到不同结果。

定理1 假设弱 $<_c^m$ -极小解集 $m\text{-WMin}(F, S)$ 有限, $\bar{x}$ 是集优化问题(SOP)的弱 $<_c^m$ -极小解,当且仅当标量化函数 $h(F(x))$ 是严格 $<_c^m$ -递增函数且 $h(F(\bar{x})) = 0$ 。

证明 必要性。由引理2得 $\forall z \in m\text{-WMin}(F, S)$, $I_m(\cdot, F(z))$ 在 $\mathcal{P}(Y)$ 上是严格 $<_c^m$ -递增的。从而 $\forall x_1, x_2 \in S$ 满足 $F(x_1) <_c^m F(x_2)$, 有: $I_m(F(x_1), F(z)) < I_m(F(x_2), F(z))$, $\forall z \in m\text{-WMin}(F, S)$ 。由于弱极小解集有限,所以 $I_m(\cdot, F(z))$ 有限,且有限集合的下确界等于它的最小值。故 $\forall z \in m\text{-WMin}(F, S)$, 有:

$$\begin{aligned} h(F(x_1)) &= \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x_1), F(z)) = \min_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x_1), F(z)) < \\ &\min_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x_2), F(z)) = \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x_2), F(z)) = h(F(x_2)), \end{aligned}$$

即 $h(F(x))$ 是严格 $<_c^m$ -递增函数。又由引理3可知 $I_m(F(\bar{x}), F(\bar{x})) = 0$, 故有:

$$h(F(\bar{x})) = \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(\bar{x}), F(z)) \leq I_m(F(\bar{x}), F(\bar{x})) = 0.$$

因为 $\forall z \in m\text{-WMin}(F, S)$, 有 $I_m(F(\bar{x}), F(z)) \geq 0$, 故由保号性可得 $\inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(\bar{x}), F(z)) \geq 0$, 综上可知

$$\inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(\bar{x}), F(z)) = 0.$$

充分性。反设 $\bar{x}$ 不是集优化问题(SOP)的弱 $<_c^m$ -极小解,则存在 $x \in S$ 使得 $F(x) <_c^m F(\bar{x})$ 。而由函数 $h(F(x))$ 是严格 $<_c^m$ -递增的可知:

$$h(F(x)) < h(F(\bar{x})) = 0, \quad (2)$$

又因为 $h(F(x)) \geq 0$, $\forall x \in S$, 与式(2)严格小于0矛盾。故原假设不成立, $\bar{x}$ 是集优化问题的弱 $<_c^m$ -极小解。

证毕

注1 上述定理刻画了集优化问题(SOP)弱极小解集和标量化函数 $h(F(x))$ 之间的关系,建立了集优化到标量化的桥梁。同文献[8]相比,本文定义的标量化函数以整个弱极小解集 $m\text{-WMin}(F, S)$ 作为参照而非某个弱极小解作为参照,避免了参考点选择对结果的影响,具有更强的普适性。

例2 设 $X = \mathbf{R}, Y = \mathbf{R}^2, S = [1, +\infty]$, 序锥 $C = \mathbf{R}_+^2$, 定义集值映射 $F: X \rightarrow 2^Y$,

$$F(x) = \begin{cases} [0, 2] \times [0, 2], & x = 1; \\ [0, 4] \times [0, 4], & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

经分析,弱 $<_c^m$ -极小解集 $m\text{-WMin}(F, S) = \{1\}$, 则有 $h(F(x)) = I_m(F(x), F(1))$ 。当 $x \in m\text{-WMin}(F, S) = \{1\}$ 时,有 $h(F(1)) = \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(1), F(z)) = I_m(F(1), F(1))$ 。由引理3得 $I_m(F(1), F(1)) = 0$, 则有 $h(F(1)) = 0$ 。当 $x > 1$ 时, $I_m(F(x), F(1)) = \inf\{r \in \mathbf{R}_+ : F(x) \leq_r^m \bar{r}\bar{D}_0 + F(1)\}$, 即:

$$I_m(F(x), F(1)) = \inf\{r \in \mathbf{R}_+ : ((r\bar{D}_0 + F(1)) \ominus F(x)) \cap C \neq \emptyset\}.$$

由于 $((r\bar{D}_0 + F(1)) \ominus F(x)) \cap C \neq \emptyset$ 等价于 $y + F(x) \subseteq r\bar{D}_0 + F(1)$, 其中 $y \in C$ 。又因 $0 \in C$, 即求解 $I_m(F(x), F(1)) = \inf\{r \in \mathbf{R}_+ : F(x) \subseteq r\bar{D}_0 + F(1)\}$, 其中:

$$r\bar{D}_0 + F(1) = \{(rd_1 + a, rd_2 + b) : (a, b) \in [0, 2] \times [0, 2], d_1^2 + d_2^2 \leq 1, d_1 \in \mathbf{R}, d_2 \in \mathbf{R}\}.$$

要使 $F(x) = [0, 4] \times [0, 4]$ 刚好完全被 $r\bar{D}_0 + F(1)$ 覆盖, 即点 $(4, 4)^T$ 必须被它覆盖, 则此时有: $r = \sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$, 即 $h(F(x)) = I_m(F(x), F(1)) = 2\sqrt{2}$, 则该问题的最优解为 $x = 1$ 。

3 广义 $\bar{D}_0$ -适定

在本节中,引入集优化问题(SOP)的广义 $\bar{D}_0$ -适定性定义。利用非线性标量化函数 $h(x)$, 建立集优化问题(SOP)的广义 $\bar{D}_0$ -适定性与标量优化问题(P)的适定性之间的等价关系。首先定义标量优化问题(P)的广义适定性。

定义4^[24] 设 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq S$, 若对于标量优化问题(P)满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} h(F(x_n)) = \inf\{h(F(x)) : x \in S\}$, 则称 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 为极小化序列。

定义5^[24] 若 $\arg \min(S, h) \neq \emptyset$, 且对于每个极小化序列 $\{x_n\}$, 都存在一个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $\arg \min(S, h)$

中的某一点,则称标量优化问题(P)为广义适定性问题。

受文献[24]的启发,本文给出集优化问题(SOP)的广义 $\overline{D}_0$ -适定性定义如下。

定义 6 称 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq S$ 是广义 $\overline{D}_0$ -渐近极小化序列,如果存在序列 $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathbf{R}_+$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ 以及序列 $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq m\text{-WMin}(F, S)$ 使得 $F(x_n) <_C^m F(z_n) + \epsilon_n \overline{D}_0$ 。

注 2 现有的集值优化数值算法可以生成可计算的极小化序列,例如采用 Ghosh 等人^[12]建立的拟 Newton 法。该方法借助划分集构造向量优化问题族,基于下降方向生成收敛的迭代序列。

下面给出具体算例阐释广义 $\overline{D}_0$ -渐近极小化序列的概念。

例 3 设 $X = \mathbf{R}, Y = \mathbf{R}^2, S = [0, 3]$, 序锥 $C = \mathbf{R}_+^2$, 定义集值映射 $F: X \rightarrow 2^Y$,

$$F(x) = \begin{cases} \{(0, 0)^T\}, & x = 0; \\ [0, 1] \times [0, 1], & 0 < x \leq 1; \\ [-2, 0] \times [-1, 0], & 1 < x \leq 2; \\ \{(-3, -3)^T\}, & x > 2. \end{cases}$$

经分析,该问题弱 $<_C^m$ -极小解集为 $m\text{-WMin}(F, S) = [0, 1]$ 。任取序列 $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^+$ 。

下面证明此序列是广义 $\overline{D}_0$ -渐近极小化序列。首先 $x_n \in [0, 1] \subseteq m\text{-WMin}(F, S), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 。取 $z_n = x_n$, 令 $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$, 下面验证 $F(x_n) <_C^m F(z_n) + \epsilon_n \overline{D}_0$ 。令 $q = \left(-\frac{1}{2n}, -\frac{1}{2n}\right)^T \in \text{int } C$ 。

下证 $q \in (F(z_n) + \epsilon_n \overline{D}_0)^T \ominus F(x_n)$, 即证 $q + F(x_n) \subseteq F(z_n) + \epsilon_n \overline{D}_0$ 。

考虑 $\forall y \in F(x_n)$, 不妨设 $y = (y_1, y_2)^T \in [0, 1] \times [0, 1]$, 则有: $q + y = \left(y_1 - \frac{1}{2n}, y_2 - \frac{1}{2n}\right)^T, \forall y_1 \in [0, 1], y_2 \in [0, 1]$ 。又因

$$F(z_n) + \epsilon_n \overline{D}_0 = \{(z_1 + \epsilon_n d_1, z_2 + \epsilon_n d_2)^T : (z_1, z_2)^T \in [0, 1] \times [0, 1], d_1^2 + d_2^2 \leq 1, d_1 \in \mathbf{R}, d_2 \in \mathbf{R}\},$$

故有 $q + F(x_n) \subseteq F(z_n) + \epsilon_n \overline{D}_0$, 即 $F(x_n) <_C^m F(z_n) + \epsilon_n \overline{D}_0$ 。

因此, $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbf{N}^+}$ 是广义 $\overline{D}_0$ -渐近极小化序列, 满足定义 6。

定义 7 集优化问题(SOP)被称为是广义 $\overline{D}_0$ -适定的, 如果对于每个广义 $\overline{D}_0$ -渐近极小化序列 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 都存在子序列 $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}} \subseteq \{x_n\}, x_0 \in m\text{-WMin}(F, S)$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$ 成立。

定理 2 设 $S \subseteq X$, 假设以下条件成立:

- 1) C 是一个闭的凸尖锥;
- 2) $m\text{-WMin}(F, S)$ 是 S 的有限子集;
- 3) 对于任意 $x \in S$ 有 $F(x) \in \mathcal{B}(Y)$ 。

那么, 集优化问题(SOP)是广义 $\overline{D}_0$ -适定的当且仅当标量化问题(P)是广义适定的。

证明 必要性。假设集优化问题(SOP)是广义 $\overline{D}_0$ -适定的, 下面证明标量化问题(P)是广义适定的。

首先证明 $\arg \min(S, h) \neq \emptyset$ 。任取 $x_0 \in m\text{-WMin}(F, S)$, 则 $h(F(x_0)) = 0$ 。由引理 4 有:

$$I_m(F(x), F(z)) \geq 0, \forall z \in m\text{-WMin}(F, S)。$$

由保号性 $h(F(x)) = \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x), F(z)) \geq 0, \forall x \in S$ 进一步得到 $h(F(x)) \geq h(F(x_0)), \forall x \in S$, 即 $x_0 \in \arg \min(S, h) \neq \emptyset$ 。

其次证明每个极小化序列 $\{x_n\}$, 都存在一个子序列收敛于 $\arg \min(S, h)$ 中的某一点。假设序列 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq S$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} h(F(x_n)) = \inf\{h(F(x)): x \in S\}$, 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x_n), F(z)) = \inf_{x \in S} \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x), F(z)), \quad (3)$$

又有:

$$\lim_{x \in S} \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x), F(z)) = 0. \quad (4)$$

联立式(3)和式(4)可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x_n), F(z)) = 0.$$

令 $\delta_n := \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x_n), F(z))$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ 且 $\delta_n \geq 0$, 由于 $\inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x_n), F(z)) < \delta_n + \frac{1}{n}$,

$\forall n \in \mathbf{N}$, 因此存在序列 $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq m\text{-WMin}(F, S)$ 使得 $I_m(F(x_n), F(z_n)) < \delta_n + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbf{N}$. 由引理 1 有:

$$F(x_n) <_C^m F(z_n) + \left(\delta_n + \frac{1}{n}\right) \bar{D}_0, \forall n \in \mathbf{N}.$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\delta_n + \frac{1}{n}\right) = 0$, 故 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 是广义 $\bar{D}_0$ -渐近极小化序列。

再由集优化问题(SOP)是广义 $\bar{D}_0$ -适定的, 故存在 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 的子序列收敛到某点 $v \in m\text{-WMin}(F, S)$, 因此标量化问题(P)是广义适定的。

充分性. 设 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 是广义 $\bar{D}_0$ -渐近极小化序列, 故存在 $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathbf{R}_+$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$, 存在序列 $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq m\text{-WMin}(F, S)$ 满足 $F(x_n) <_C^m F(z_n) + \epsilon_n \bar{D}_0$. 由引理 2 有:

$$I_m(F(x_n), F(z_n)) < I_m(F(z_n) + \epsilon_n \bar{D}_0, F(z_n)), \forall n \in \mathbf{N}. \quad (5)$$

首先证明 $I_m(F(z_n) + \epsilon_n \bar{D}_0, F(z_n)) \leq \epsilon_n$. 由于 $0 \in ((F(z_n) + \epsilon_n \bar{D}_0) \ominus (F(z_n) + \epsilon_n \bar{D}_0)), \forall n \in \mathbf{N}$, 又因为 $0 \in C$, 故有:

$$((F(z_n) + \epsilon_n \bar{D}_0) \ominus (F(z_n) + \epsilon_n \bar{D}_0)) \cap C \neq \emptyset, \forall n \in \mathbf{N},$$

即 $F(z_n) + \epsilon_n \bar{D}_0 \leq_C^m F(z_n) + \epsilon_n \bar{D}_0, \forall n \in \mathbf{N}$.

从而有:

$$I_m(F(z_n) + \epsilon_n \bar{D}_0, F(z_n)) = \inf\{r \in \mathbf{R}_+ : F(z_n) + \epsilon_n \bar{D}_0 \leq_C^m F(z_n) + r \bar{D}_0\} \leq \epsilon_n.$$

结合式(5)有 $0 \leq I_m(F(x_n), F(z_n)) < \epsilon_n, \forall n \in \mathbf{N}$. 因此 $\forall n \in \mathbf{N}$, 有:

$$0 = \inf_{x \in S} \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x), F(z)) \leq \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x_n), F(z)) \leq I_m(F(x_n), F(z_n)) < \epsilon_n,$$

又因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x_n), F(z)) = \inf_{x \in S} \inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(x), F(z)) = 0,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} h(F(x_n)) = \inf\{h(F(x)) : x \in S\} = 0$. 由于标量化问题(P)是广义适定的, 于是 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 有收敛到点 $w \in \arg \min(S, h)$ 的子列, 故 $\inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(w), F(z)) = 0$.

下证 $w \in m\text{-WMin}(F, S)$. 反设 $w \notin m\text{-WMin}(F, S)$, 由引理 4 可知:

$$I_m(F(x), F(z)) \geq 0, \forall z \in m\text{-WMin}(F, S), \forall x \in S.$$

由 $w \notin m\text{-WMin}(F, S)$ 知存在 $x^* \in S$, 使得 $F(x^*) <_C^m F(w)$. 又由引理 2 可知函数 $I_m(\cdot, F(z))$ 在 $\mathcal{P}(Y)$ 是严格 $<_C^m$ -递增的, 因此 $0 \leq I_m(F(x^*), F(z)) < I_m(F(w), F(z)), \forall z \in m\text{-WMin}(F, S)$, 则有:

$$I_m(F(w), F(z)) > 0, \forall z \in m\text{-WMin}(F, S).$$

又由于 $m\text{-WMin}(F, S)$ 是一个有限子集, 因此:

$$\inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(w), F(z)) = \min_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(w), F(z)) > 0.$$

这与 $\inf_{z \in m\text{-WMin}(F, S)} I_m(F(w), F(z)) = 0$ 矛盾, 故上述的假设不成立, 即 $w \in m\text{-WMin}(F, S)$. 因此, 集优化问题(SOP)是广义 $\bar{D}_0$ -适定的. 证毕

注 3 本文在文献[8]的基础上提出了广义 $\bar{D}_0$ -适定性, 引入了 $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq m\text{-WMin}(F, S)$ 来刻画逼近过程, 考虑到了全局所有弱极小解而非某一个固定的弱极小解, 对解的适定性的刻画具有理论意义。

注 4 对于标量化问题(P), 它的广义适定性可以通过最优解集的紧性以及相应点处的上半连续性判断, 具体见文献[26]。

下面给出具体算例以说明定理 2, 其中数据与例 1 一致。

例 4 令 $X = \mathbf{R}, Y = \mathbf{R}^2$, 可行集 $S = \{1, 2\}$ 为紧集, 序锥 $C = \mathbf{R}_+^2$ 是闭凸锥, 弱 $<_C^m$ -极小解集 $m\text{-WMin}(F, S) = \{2\}$ 为有限集, 且集值映射 F 的像集有界, 即该问题满足定理 2 的全部条件. 下面验证问题(1)的唯一渐近序列

$\{x_n\} \equiv 2$ 为广义 $\overline{D}_0$ -渐近极小化序列。令 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $\{z_n\} \equiv 2 \in m\text{-WMin}(F, S)$, 则有 $F(x_n) \prec_C^m F(z_n) + \varepsilon_n \overline{D}_0$, 即 $\{x_n\} \equiv 2$ 为式(1)的唯一广义 $\overline{D}_0$ -渐近极小化序列。又因 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = 2$ 恒成立, 故式(1)为广义 $\overline{D}_0$ -适定的。

给出式(1)的标量化问题如下:

$$\begin{aligned} & \min h(F(x)), \\ & \text{s. t. } x \in S. \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $h(F(x)) = I_m(F(x), F(2))$ 。

由例 1 可知 $h(F(1)) = \sqrt{2}$, $h(F(2)) = 0$, 故式(6)的极小解集 $\arg \min(S, h) = \{2\}$ 。易验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} h(F(x_n)) = \inf\{h(F(x)): x \in S\}$ 成立, 故 $\{x_n\} \equiv 2$ 为式(6)的唯一极小化序列。又因 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = 2$ 恒成立, 故式(6)为广义适定性问题。

4 结束语

本文基于既有成果, 提出一种新的非线性标量化函数, 得到相应标量化结果, 通过引入集优化问题的广义 $\overline{D}_0$ -适定性定义, 建立了集优化问题的广义 $\overline{D}_0$ -适定性与对应的标量优化问题的适定性之间的等价关系。

参考文献:

- [1] Borwein J M, Zhuang D M. Super efficiency in convex vector optimization[J]. *Methods and Models of Operations Research*, 1991, 35 (3): 175-184.
- [2] Kuroiwa D, Tanaka T, Ha T X D. On cone convexity of set-valued maps[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1997, 30 (3): 1487-1496.
- [3] Zhou Z A, Yang X M, Zhao K Q. E-super efficiency of set-valued optimization problems involving improvement sets[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2016, 12 (3): 1031-1039.
- [4] Xu Y D, Li S J. A new nonlinear scalarization function and applications[J]. *Optimization*, 2016, 65 (1): 207-231.
- [5] Karaman E, Soyertem M, Atasever Güvenç İ, et al. Partial order relations on family of sets and scalarizations for set optimization[J]. *Positivity*, 2018, 22 (3): 783-802.
- [6] Khushboo, Lalitha C S. Scalarizations for a set optimization problem using generalized oriented distance function[J]. *Positivity*, 2019, 23 (5): 1195-1213.
- [7] Zhou Z A, Wei W B, Huang F, et al. Approximate weak efficiency of the set-valued optimization problem with variable ordering structures[J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2024, 48 (3): 27.
- [8] Gupta S, Gupta R, Srivastava M. On scalarization and well-posedness in set optimization with a partial set order relation[J]. *Positivity*, 2024, 28 (1): 1.
- [9] Xu Y D, Zhou C L, Peng Z Y. Painlevé-Kuratowski convergence and extended well-posedness for set optimization problems[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2024, 20 (12): 3764-3791.
- [10] Eichfelder G, Quintana E, Rocktäschel S. A vectorization scheme for nonconvex set optimization problems[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2022, 32 (2): 1184-1209.
- [11] Ghosh D, Anshika, Ansari Q H. Newton method for set optimization problems with set-valued mapping of finitely many vector-valued functions[PP/OL]. V1. (2024-09-29) [2025-11-12]. <https://arxiv.org/abs/2409.19636>.
- [12] Ghosh D, Anshika, Yao J C, et al. Quasi-Newton method for set optimization problems with set-valued mapping given by finitely many vector-valued functions[J]. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2025, 46 (7): 562-602.
- [13] Tikhonov A N. On the stability of the functional optimization problem[J]. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, 6 (4): 28-33.
- [14] Zhang W Y, Li S J, Teo K L. Well-posedness for set optimization problems[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, 71 (9): 3769-3778.
- [15] Sach P H. New nonlinear scalarization functions and applications[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2012, 75 (4): 2281-2292.
- [16] 卢婧琦, 洪世煌, 江俊. 一类集值优化最小解的存在性与适定性及应用[J]. *系统科学与数学*, 2022, 42 (4): 1011-1022.
Lu Jingqi, Hong Shihuang, Jiang Jun. The existence and well-posedness of minimum solutions for a class of set-valued

- optimization problems with applications[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2022, 42 (4): 1011-1022.
- [17] 谢林燕. 电子商务视角下集合优化问题的 Levitin-Polyak 良定性[J]. 电子商务评论, 2024 (3): 7660-7668.
Xie Linyan. Levitin-polyak well-posedness of set optimization problems from the perspective of E-commerce [J]. E-Commerce Letters, 2024 (3): 7660-7668.
- [18] Long X J, Peng J W, Peng Z Y. Scalarization and pointwise well-posedness for set optimization problems[J]. Journal of Global Optimization, 2015, 62 (4): 763-773.
- [19] Preechasilp P, Wangkeeree R. Pointwise well-posedness and scalarization for set optimization problems with a partial order relation[J]. Thai Journal of Mathematics, 2020, 18 (3): 1623-1638.
- [20] Gupta M, Srivastava M. Well-posedness and scalarization in set optimization involving ordering cones with possibly empty interior[J]. Journal of Global Optimization, 2019, 73 (2): 447-463.
- [21] Vui P T, Anh L Q, Wangkeeree R. Levitin-Polyak well-posedness for set optimization problems involving set order relations[J]. Positivity, 2019, 23 (3): 599-616.
- [22] Gupta M, Srivastava M. On Levitin-Polyak well-posedness and stability in set optimization [J]. Positivity, 2021, 25 (5): 1903-1921.
- [23] Som K, Vetrivel V. A note on pointwise well-posedness of set-valued optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2022, 192 (2): 628-647.
- [24] Zhou Z A, Feng K H, Ansari Q H. Well-posedness of set optimization problems with set order defined by Minkowski difference[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2025, 204 (2): 31.
- [25] Li T Y, Xu G H. Scalarization and well-posedness for set optimization problems using generalized oriented distance function[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2025, 21 (2): 1584-1599.
- [26] Dontchev A L, Zolezzi T. Well-posed optimization problems[M]. Heidelberg: Springer, 1993.

Operations Research and Cybernetics

Research on Scalarization and Well-Posedness of Set Optimization Problems Under a Class of Partial Order Relations

HOU Ting, CHEN Jie, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper investigates the necessary and sufficient conditions for the generalized $\overline{D}_0$ -well-posedness of set optimization problems and the generalized well-posedness of scalar optimization problems. Based on the partial order relation defined by the Minkowski difference, a new class of nonlinear scalarization functions is introduced. Through strict derivation of the monotonicity of this function and in combination with the intrinsic characteristics of the partial order relation, the characterization of weakly minimal solutions of set optimization problems under certain conditions and the derivation of well-posedness results are accomplished. The scalarization equivalent conditions for weakly minimal solutions of set optimization problems are obtained, and it is proved that a set optimization problem is generalized $\overline{D}_0$ -well-posed if and only if the scalarization problem is generalized well-posed. The results of this paper enrich the related achievements of scalarization methods and well-posedness theory for set optimization problems.

Keywords: set optimization problem; set order relation; scalarization function; well-posedness

(责任编辑 方 兴)