

基于重构模型的可行值约束标量化方法^{*}

汪 帅, 唐莉萍

(重庆师范大学 重庆国家应用数学中心, 重庆 401331)

摘要:针对可行值约束标量化方法无法获得非凸多目标优化问题真有效解的这一情况,利用模型重构的思想,提出一种改进的可行值约束标量化方法,并研究该方法在非凸多目标优化问题中的应用。首先,通过对原多目标优化问题进行重构,结合可行值约束标量化方法,构建一种基于重构模型的可行值约束标量化方法;其次,利用该方法分别建立原问题和重构后的多目标优化问题的(弱)有效解的标量化刻画;然后,基于原问题的真有效解与重构后问题的(弱)有效解之间的关系,利用基于重构模型的可行值约束方法,给出原问题真有效解的标量化刻画。最后,数值实验表明,与可行值约束标量化方法相比,所提方法能更有效地逼近帕累托前沿面。

关键词:多目标优化;重构模型;可行值约束标量化方法;真有效解

中图分类号:O221.6

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2026)04-0001-10

随着科学技术的快速发展,多目标优化已成为工业选址、资源配置等复杂决策的重要技术。Lee 等人^[1]通过同时最大化运货量与最小化物流总成本,构建了兼顾正向与逆向配送的多目标优化模型,并采用模糊目标规划方法进行求解,为闭环物流运营提供了决策依据。Boonmee 等人^[2]针对救援物流仓库选址问题,综合权衡预算限制、响应时效、数据不确定性等实际因素,运用多目标优化方法完成了救援仓库布局、库存规模与设施利用率的整体规划,并通过泰国实际案例验证了该方法的实用性。在体育团队管理场景中,Budak 等人^[3]同样利用多目标优化方法,兼顾球队整体和谐与球员竞技表现双重诉求,为教练制定球员阵容提供可行的决策方案。

多目标优化问题(multi-objective optimization problem, MOP)一般可建模为如下形式:

$$(\text{MOP}) \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}))^T,$$

其中: $X \subset \mathbf{R}^n$ 是可行域,各目标函数 $f_i(\mathbf{x}) (i=1, 2, \dots, p)$ 均连续可微。标量化方法是求解 MOP 的重要途径,主要思想是将 MOP 转化为与之对应的单目标优化问题,通过求解转化后的一系列单目标优化问题,进而获得原 MOP 的(弱、真)有效解。常见的标量化方法包括线性加权标量化方法^[4-8]、 ϵ -约束标量化方法^[9-11]、Tchebycheff 标量化方法^[12-14]、加权约束标量化方法^[15-16]、目标约束标量化方法^[17-18]、Pascoletti-Serafini 标量化方法及改进标量化方法^[19-23]等。

针对现有标量化方法难以有效处理非连通帕累托前沿面或非连通可行域的 MOP, Burachik 等人^[24]于 2017 年提出了一种可行值约束标量化方法:

$$\begin{aligned} & (\text{P}_{\hat{\mathbf{x}}}^k) \min_{\mathbf{x} \in X} f_k(\mathbf{x}); \\ & \text{s. t. } \omega_i f_i(\mathbf{x}) \leq \omega_k f_k(\hat{\mathbf{x}}), i \neq k. \end{aligned}$$

其中: $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 为参考点, k 为选定的参考目标指标且 $\omega_i := [1/f_i(\hat{\mathbf{x}})] / [\sum_{j=1}^p 1/f_j(\hat{\mathbf{x}})]$ 。基于所构造的标量化模型, Burachik 等人^[24]建立了 MOP(弱)有效解的标量化刻画。数值实验表明,与加权约束标量化方法^[15]和 Pascoletti-Serafini 标量化方法^[19]相比,该方法在处理非连通帕累托前沿面或非连通可行域的 MOP 上,更能有效逼近帕累托前沿面。然而,可行值约束标量化方法无法刻画 MOP 的真有效解,这在一定程度上限制了该方法

^{*} 收稿日期:2026-04-14 修回日期:2026-04-28 网络出版时间:2026-06-01T11:41

资助项目:国家自然科学基金——重点项目(No. 12431010),面上项目(No. 12171060);重庆市自然科学基金创新发展联合基金重点项目(No. CSTB2024NSCQ-LZX0140);重庆市教育委员会科学技术研究计划重大项目(No. KJZD-M202300504);重庆市巴渝学者计划;重庆师范大学博望学者青年拔尖人才项目;重庆师范大学启动基金项目(No. 22XLB006)

第一作者简介:汪帅,男,研究方向为多目标优化, E-mail: 1442892142@qq.com;通信作者:唐莉萍,女,教授,博士, E-mail: tanglipings@163.com

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20260530.1449.002>

在多目标优化中的应用。

注意到, Khaledian 等人^[20]针对 Pascoletti-Serafini 标量化方法^[19]无法获得 MOP 的真有效解的不足, 通过对原 MOP 进行模型重构, 提出了一种改进的 Pascoletti-Serafini 标量化方法, 建立了 MOP 的(弱、真)有效解的刻画。

受文献[20]的启发, 本文借助模型重构的思想, 基于可行值约束标量化方法, 提出一种改进的可行值约束标量化方法, 进而研究 MOP 的(弱、真)有效解的刻画, 并通过数值实验验证该方法的有效性。

1 预备知识

令 $\mathbf{R}^p$ 为 p 维欧氏空间。给定向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^p$, 序关系的定义如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{v} &\Leftrightarrow u_i = v_i, \forall i \in \{1, \dots, p\}; \mathbf{u} \leq \mathbf{v} \Leftrightarrow u_i \leq v_i, \forall i \in \{1, \dots, p\}; \\ \mathbf{u} < \mathbf{v} &\Leftrightarrow \mathbf{u} \leq \mathbf{v} \text{ 且 } \mathbf{u} \neq \mathbf{v}; \mathbf{u} < \mathbf{v} \Leftrightarrow u_i < v_i, \forall i \in \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

不失一般性, 假设 MOP 的目标函数满足 $\min_{i=1, \dots, p} \{\inf_{\mathbf{x} \in X} f_i(\mathbf{x})\} > 0$ 。当不满足该条件时, 可通过指数变换对目标函数进行转化, 使之满足上述假设条件。

下面给出 MOP 的弱有效解、有效解以及 Geoffrion-真有效解的定义。

定义 1^[24] 设 $\bar{\mathbf{x}} \in X$, 有以下定义:

- 1) 如果不存在 $\mathbf{x} \in X$, 使得 $f(\mathbf{x}) < f(\bar{\mathbf{x}})$, 则称 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的弱帕累托最优解(弱有效解);
- 2) 如果不存在 $\mathbf{x} \in X$, 使得 $f(\mathbf{x}) \leq f(\bar{\mathbf{x}})$, 则称 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的帕累托最优解(有效解)。记全体有效解构成的集合为 P 。将有效解集在目标空间中对应的目标函数值向量的集合 $P_F = \{f(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^p : \mathbf{x} \in P\}$ 称为多目标优化问题(MOP)的帕累托前沿面。

定义 2^[24] 1) 设 $y_i^I = \min_{\mathbf{x} \in X} f_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, p$ 。则称 $\mathbf{y}^I = (y_1^I, \dots, y_p^I)^T \in \mathbf{R}^p$ 为 MOP 的理想点。

2) 设 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)^T > 0$, 且 $\mathbf{y}^I = (y_1^I, y_2^I, \dots, y_p^I)^T$ 为 MOP 的理想点。令 $\mathbf{u} := (y_1^I - \varepsilon_1, \dots, y_p^I - \varepsilon_p)^T \in \mathbf{R}^p$, 则称 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)^T$ 为 MOP 的乌托邦点。

定义 3^[5] 可行解 $\bar{\mathbf{x}} \in X$ 称为 MOP 的 Geoffrion-真有效解, 若 $\bar{\mathbf{x}} \in X$ 是有效解, 且存在常数 $M > 0$, 使得对任意满足 $f_i(\mathbf{x}) < f_i(\bar{\mathbf{x}})$ 的指标 i 和可行解 $\mathbf{x} \in X$, 都存在某个满足 $f_j(\mathbf{x}) > f_j(\bar{\mathbf{x}})$ 的指标 j , 使得 $\frac{f_i(\bar{\mathbf{x}}) - f_i(\mathbf{x})}{f_j(\mathbf{x}) - f_j(\bar{\mathbf{x}})} \leq M$ 。

定义 4^[25] 设 $h: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$, 且 $X \subset \mathbf{R}^p$ 为非空凸集, 有以下定义:

- 1) 若对任意 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \lambda \in (0, 1)$, 有 $h(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda h(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)h(\mathbf{x}_2)$, 则称 h 为在 X 上的凸函数。
- 2) 若对任意 2 个不同的 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \lambda \in (0, 1)$, 有 $h(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) < \lambda h(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)h(\mathbf{x}_2)$, 则称 h 为在 X 上的严格凸函数。

2 基于重构模型的可行值约束标量化方法

受文献[20]的启发, 将 MOP 重构为如下形式:

$$\begin{aligned} (\text{MOP1}) \quad & \min (f_1(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x}))^T; \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

其中: $\lambda \geq 0$ 。在此基础上, 将重构后的 MOP1 与可行值约束标量化方法^[24]相结合, 提出一种基于重构模型的可行值约束标量化方法:

$$\begin{aligned} (\text{RP}_{\hat{\mathbf{x}}}^k) \quad & \min f_k(\mathbf{x}); \\ \text{s. t.} \quad & \omega_i (f_i(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x})) \leq \omega_k f_k(\hat{\mathbf{x}}), i \neq k; \\ & \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

其中: $\lambda \geq 0, \hat{\mathbf{x}} \in X$ 为参考点, k 为选定的参考目标指标, 且 $\omega_i := [1/f_i(\hat{\mathbf{x}})] / [\sum_{j=1}^p 1/f_j(\hat{\mathbf{x}})]$ 。

下面利用所提出的基于重构模型的可行值约束标量化方法,针对重构后的 MOP1,建立弱有效解的充分条件以及有效解的充分条件和必要条件。

定理 1 设 $\hat{x} \in X$ 且 $\lambda \geq 0$ 。若对于任意的 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{x}$ 是问题 $(RP_{\hat{x}}^k)$ 的最优解,则 $\bar{x}$ 是 MOP1 的有效解。

证明 反证法。假设 $\bar{x}$ 不是 MOP1 的有效解,则存在 $x_0 \in X$ 使得:

$$f_{k_0}(x_0) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(x_0) < f_{k_0}(\bar{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{x}), \exists k_0 \in \{1, \dots, p\}; \quad (1)$$

$$f_i(x_0) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(x_0) \leq f_i(\bar{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{x}), \forall i \in \{1, \dots, p\}. \quad (2)$$

由式(2)可知,必存在某个指标 $m \in \{1, \dots, p\}$,使得:

$$f_m(x_0) < f_m(\bar{x}). \quad (3)$$

否则:

$$f_i(x_0) \geq f_i(\bar{x}), \forall i \in \{1, \dots, p\}. \quad (4)$$

对式(4)进行整理,可得 $f_i(x_0) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(x_0) \geq f_i(\bar{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{x})$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$,这与式(1)矛盾。故存在某个 $m \in \{1, \dots, p\}$,使得式(3)成立。

因为对于任意的 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{x}$ 是问题 $(RP_{\hat{x}}^k)$ 的最优解,所以 $\bar{x}$ 是问题 $(RP_{\hat{x}}^m)$ 的可行解,即 $\bar{x} \in X$ 且满足:

$$\omega_i(f_i(\bar{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{x})) \leq \omega_m f_m(\hat{x}), \forall i \neq m. \quad (5)$$

由式(2)、(5)可得 $\omega_i(f_i(x_0) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(x_0)) \leq \omega_m f_m(\hat{x})$, $\forall i \neq m$ 。从而 x_0 是问题 $(RP_{\hat{x}}^m)$ 的可行解。再结合式(3)知,问题 $(RP_{\hat{x}}^m)$ 在可行解 $x_0 \in X$ 处的目标函数值满足 $f_m(x_0) < f_m(\bar{x})$ 。这与 $\bar{x}$ 是问题 $(RP_{\hat{x}}^m)$ 的最优解矛盾。故 $\bar{x}$ 是 MOP1 的有效解。证毕

推论 1 设 $\hat{x} \in X$ 且 $\lambda \geq 0$ 。若对任意 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{x}$ 是问题 $(RP_{\hat{x}}^k)$ 的最优解,则 $\bar{x}$ 是 MOP1 的弱有效解。

证明 由定理 1 可知, $\bar{x}$ 是 MOP1 的有效解,从而 $\bar{x}$ 是 MOP1 的弱有效解。证毕

定理 2 设 $\bar{x} \in X$ 。若存在 $\lambda \geq 0$,使得 $\bar{x}$ 是 MOP1 的有效解,则对于任意的 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{x}$ 是问题 $(RP_{\bar{x}}^k)$ 的最优解。

证明 反证法。假设对于某个 $k_0 \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{x}$ 不是问题 $(RP_{\bar{x}}^{k_0})$ 的最优解,则存在 $(RP_{\bar{x}}^{k_0})$ 的可行解 $x \in X$,使得:

$$f_{k_0}(x) < f_{k_0}(\bar{x}); \quad (6)$$

$$\omega_i(f_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(x)) \leq \omega_{k_0} f_{k_0}(\bar{x}), \forall i \neq k_0. \quad (7)$$

由于 $\omega_{k_0} f_{k_0}(\bar{x}) = \omega_i f_i(\bar{x})$, $\forall i \neq k_0$ 且 $\omega_i = \frac{1}{f_i(\bar{x})} > 0$, 因此式(7)可以变形为:

$$f_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(x) \leq f_i(\bar{x}), \forall i \neq k_0. \quad (8)$$

由于 $\lambda \geq 0$ 且 $\min_{i=1, \dots, p} \{\inf_{x \in X} f_i(x)\} > 0$, 故有 $\lambda \sum_{j=1}^p f_j(x) \geq 0$ 且 $\lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{x}) \geq 0$, 结合式(8)可得:

$$f_i(x) \leq f_i(\bar{x}), \forall i \neq k_0; \quad (9)$$

$$f_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(x) \leq f_i(\bar{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{x}), \forall i \neq k_0. \quad (10)$$

由式(6)、(9)可得:

$$f_{k_0}(x) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(x) < f_{k_0}(\bar{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{x}), \exists k_0 \in \{1, \dots, p\}. \quad (11)$$

结合式(10)、(11)知, MOP1 在可行解 $x \in X$ 处的目标函数值满足:

$$(f_1(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x})) \leq (f_1(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{\mathbf{x}}), \dots, f_p(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{\mathbf{x}})),$$

这与 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP1 的有效解矛盾。故对于任意的 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的最优解。证毕

接下来,利用改进的可行值约束标量化方法,建立 MOP 弱有效解的充分条件以及有效解的充分条件和必要条件。

定理 3 设 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 且 $\lambda \geq 0$ 。若对于某个 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的最优解,则 $\bar{\mathbf{x}}$ 是多目标优化问题 (MOP) 的弱有效解。

证明 反证法。假设 $\bar{\mathbf{x}}$ 不是 MOP 的弱有效解,则存在 $\mathbf{x} \in X$ 使得:

$$f_i(\mathbf{x}) < f_i(\bar{\mathbf{x}}), \forall i \in \{1, \dots, p\}. \quad (12)$$

由式(12)可得:

$$f_i(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x}) < f_i(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{\mathbf{x}}), \forall i \in \{1, \dots, p\}. \quad (13)$$

又因为 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的可行解,所以:

$$\omega_i(f_i(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{\mathbf{x}})) \leq \omega_k f_k(\hat{\mathbf{x}}), \forall i \neq k. \quad (14)$$

结合式(13)和(14),可得:

$$\omega_i(f_i(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x})) \leq \omega_k f_k(\hat{\mathbf{x}}), \forall i \neq k. \quad (15)$$

注意到 $\mathbf{x} \in X$, 由式(15)知, $\mathbf{x}$ 是问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的可行解。结合式(12)知,问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 在可行解 $\mathbf{x}$ 处的目标函数值满足 $f_k(\mathbf{x}) < f_k(\bar{\mathbf{x}})$, 这与 $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的最优解矛盾。因此, $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的弱有效解。证毕

定理 4 设 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 且 $\lambda \geq 0$ 。若对于某个 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{\mathbf{x}} \in X$ 是问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的唯一最优解,则 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的有效解。

证明 反证法。假设 $\bar{\mathbf{x}}$ 不是 MOP 的有效解,则存在 $\mathbf{x} \in X$ 使得:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\bar{\mathbf{x}}). \quad (16)$$

根据式(16)可得:

$$f_i(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x}) \leq f_i(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{\mathbf{x}}), \forall i \in \{1, \dots, p\}. \quad (17)$$

由于 $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的可行解,则有:

$$\omega_i(f_i(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{\mathbf{x}})) \leq \omega_k f_k(\hat{\mathbf{x}}), \forall i \neq k. \quad (18)$$

结合式(17)、(18)可得:

$$\omega_i(f_i(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x})) \leq \omega_k f_k(\hat{\mathbf{x}}), \forall i \neq k. \quad (19)$$

式(19)表明 $\mathbf{x} \in X$ 是问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的可行解,再结合式(16)可得,对于每个 $k \in \{1, \dots, p\}$, 问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 在可行解 $\mathbf{x}$ 处的目标函数值满足 $f_k(\mathbf{x}) < f_k(\bar{\mathbf{x}})$, 这与 $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的唯一最优解矛盾。故 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的有效解。证毕

定理 5 设 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 且 $\lambda \geq 0$ 。若对于某个 $k \in \{1, \dots, p\}$, $f_k(\mathbf{x})$ 是严格凸函数,且 $\bar{\mathbf{x}} \in X$ 是问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的最优解,则 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的有效解。

证明 由于 $f_k(\mathbf{x})$ 是严格凸函数且 $\bar{\mathbf{x}} \in X$ 是问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的最优解,则 $\bar{\mathbf{x}} \in X$ 是问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的唯一解。根据定理 4 可得, $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的有效解。证毕

定理 6 设 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 且 $\lambda > 0$ 。若对于任意的 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{\mathbf{x}} \in X$ 是问题 $(RP_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的最优解,则 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的有效解。

证明 反证法。假设 $\bar{\mathbf{x}}$ 不是 MOP 的有效解,则存在 MOP 的可行解 $\mathbf{x} \in X$, 使得:

$$f_{k_0}(\mathbf{x}) < f_{k_0}(\bar{\mathbf{x}}), \exists k_0 \in \{1, \dots, p\}; \quad (20)$$

$$f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\bar{\mathbf{x}}), \forall i \in \{1, \dots, p\}. \quad (21)$$

结合式(20)、(21)可得:

$$f_i(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x}) < f_i(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{\mathbf{x}}), \forall i \in \{1, \dots, p\}. \quad (22)$$

因为 $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k) (\forall k \in \{1, \dots, p\})$ 的最优解, 所以 $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k) (\forall k \in \{1, \dots, p\})$ 的可行解。从而, 对于任意的 $k \in \{1, \dots, p\}$, 有:

$$\omega_i (f_i(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\bar{\mathbf{x}})) \leq \omega_k f_k(\hat{\mathbf{x}}), \forall i \neq k. \quad (23)$$

再由式(22)、(23)可得, 对于任意的 $k \in \{1, \dots, p\}$, 有 $\omega_i (f_i(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x})) \leq \omega_k f_k(\hat{\mathbf{x}}), \forall i \neq k$ 。从而 $\mathbf{x} \in X$ 是问题 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k) (\forall k \in \{1, \dots, p\})$ 的可行解。根据式(20)可知, 对于某个 $k_0 \in \{1, \dots, p\}$, 问题 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^{k_0})$ 在可行解 $\mathbf{x} \in X$ 处的目标函数值满足 $f_{k_0}(\mathbf{x}) < f_{k_0}(\bar{\mathbf{x}})$, 这与 $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k) (\forall k \in \{1, \dots, p\})$ 的最优解矛盾。故 $\bar{\mathbf{x}}$ 不是 MOP 的有效解。证毕

定理 7 设 $\bar{\mathbf{x}} \in X$ 。若 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的有效解, 则对任意 $\lambda \geq 0$, 任意 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的最优解。

证明 反证法。假设存在对 $\lambda_0 \geq 0$, 存在某个 $k_0 \in \{1, \dots, p\}$, 使得 $\bar{\mathbf{x}} \in X$ 不是问题 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^{k_0})$ 的最优解, 则存在 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^{k_0})$ 的可行解 $\mathbf{x} \in X$, 使得:

$$\omega_i (f_i(\mathbf{x}) + \lambda_0 \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x})) < \omega_{k_0} f_{k_0}(\bar{\mathbf{x}}), \forall i \neq k_0; \quad (24)$$

$$f_{k_0}(\mathbf{x}) < f_{k_0}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (25)$$

由于 $\omega_{k_0} f_{k_0}(\bar{\mathbf{x}}) = \omega_i f_i(\bar{\mathbf{x}}), \forall i \neq k_0$ 且 $\omega_i > 0$, 根据式(24)可得:

$$f_i(\mathbf{x}) + \lambda_0 \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x}) \leq f_i(\bar{\mathbf{x}}), \forall i \neq k_0. \quad (26)$$

因为 $\lambda_0 \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x}) \geq 0$, 由式(26), 则有:

$$f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\bar{\mathbf{x}}), \forall i \neq k_0. \quad (27)$$

结合式(25)、(27), MOP 在 $\mathbf{x} \in X$ 处的目标函数值满足 $f(\mathbf{x}) \leq f(\bar{\mathbf{x}})$, 这与 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的有效解矛盾。因此, 对任意 $\lambda \geq 0$, 任意 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的最优解。证毕

最后, 根据推论 1 与文献[20]中的定理 4.3, 定理 2 与文献[20]中的定理 4.5, 利用改进的可行值约束标量化方法建立了 MOP 真有效解的标量化结果。

定理 8 设 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 且 $\lambda \geq 0$ 。若对任意 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的最优解, 则 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的真有效解。

证明 由于 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 且 $\lambda \geq 0$, 且对于任意的 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的最优解, 根据推论 1 可知, $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP1 的弱有效解。进一步, 由文献[20]中的定理 4.3 (取 $\epsilon = 0$), 若 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP1 的弱有效解, 则 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的真有效解。证毕

定理 9 设 $\bar{\mathbf{x}} \in X$ 。若 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的真有效解, 且 $\lambda_i \in \left(0, \frac{1}{M(p-1)}\right] (M > 0)$, 则对于任意的 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的最优解。

证明 由文献[20]中的定理 4.5 (取 $\epsilon = 0$) 可知, 若 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP 的真有效解, 且 $\lambda_i \in \left(0, \frac{1}{M(p-1)}\right] (M > 0)$, 则 $\bar{\mathbf{x}}$ 是 MOP1 的有效解。再根据定理 2, 对任意的 $k \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{\mathbf{x}}$ 是问题 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 的最优解。证毕

3 数值实验

本文利用 MATLAB 2023a 进行数值实验, 比较基于模型重构的可行值约束标量化方法 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 与可行值约束标量化方法 $(P_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 这 2 种标量化方法的性能。在求解 $(P_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 和 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 时, 使用了 Matlab 优化求解器 fmincon 中的 SQP 方法作为优化算法。

求解例 1 和例 2 时, 使用文献[16]中的算法 1, 该算法实现了文献[16]提出的可行值约束标量化方法 $(P_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$ 。此外, 对于基于模型重构的可行值约束标量化方法 $(\text{RP}_{\bar{\mathbf{x}}}^k)$, 执行与文献[16]中算法 1 基本相同的步骤, 区别在于将文献[16]中算法 1 求解的辅助问题替换为:

$$\begin{aligned}
& (\text{P}_{\text{aux}}) \min_{\mathbf{x} \in X} \omega_k(f_k(\mathbf{x}) - u_k); \\
& \text{s. t. } \omega_i(f_i(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x}) - u_i) = \omega_k(f_k(\mathbf{x}) - u_k).
\end{aligned}$$

其中: $i=1, 2, i \neq k, \forall k \in \{1, 2\}, u_i$ 是对应问题的乌托邦点; 且将文献[16]中算法 1 对问题 $(\text{P}_{\mathbf{x}}^k)$ 的求解替换为对问题 $(\text{RP}_{\mathbf{x}}^k)$ 的求解。

求解例 3 时, 使用文献[24]中的算法 1, 该算法实现了该文献中提出的可行值约束标量化方法 $(\text{P}_{\mathbf{x}}^k)$ 。此外, 对于基于模型重构的可行值约束标量化方法 $(\text{RP}_{\mathbf{x}}^k)$, 执行与文献[24]中算法 1 基本相同的步骤, 区别在于将文献[24]中算法 1 求解的辅助问题替换为:

$$\begin{aligned}
& (\text{P}_{\text{aux}}) \min_{\mathbf{x} \in X} \omega_k(f_k(\mathbf{x}) - u_k); \\
& \text{s. t. } \omega_i(f_i(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^p f_j(\mathbf{x}) - u_i) = \omega_k(f_k(\mathbf{x}) - u_k).
\end{aligned}$$

其中: $i=1, 2, 3, i \neq k, \forall k \in \{1, 2, 3\}, u_i$ 是对应问题的乌托邦点; 且文献[24]中算法 1 对问题 $(\text{P}_{\mathbf{x}}^k)$ 的求解替换为对问题 $(\text{RP}_{\mathbf{x}}^k)$ 的求解。

此外, 本文利用基于模型重构的可行值约束标量化方法 $(\text{RP}_{\mathbf{x}}^k)$, 求解了一个多目标火箭喷射器设计问题。求解过程中, 采用文献[24]中的算法 9, 区别仅在于将算法 9 中对问题 $(\text{P}_{\mathbf{x}}^k)$ 的求解替换为对问题 $(\text{RP}_{\mathbf{x}}^k)$ 的求解。

3.1 测试问题

例 1 考虑如下非凸双目标优化问题^[21];

$$\begin{aligned}
& \min (x_1, x_2)^T \\
& \text{s. t. } (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0, \\
& \quad (1 - x_2^2)^2 - (2x_1 - 2x_2)^2 - 0.1 \leq 0, \\
& \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

该问题的帕累托前沿具有非凸性与不连通性。

该测试问题使用文献[16]中的算法 1, 设置相关参数如下: 权重网格的分区点数量 $N=50$, 乌托邦点 $\mathbf{u} = (-1.5, -1)^T$, 以及非负权重系数 $\lambda=0.014$ 。图 1 对比了可行值约束标量化方法 $(\text{P}_{\mathbf{x}}^k)$ 与改进的可行值约束标量化方法 $(\text{RP}_{\mathbf{x}}^k)$ 生成的近似帕累托前沿面效果。实验结果表明, 可行值约束标量化方法 $(\text{P}_{\mathbf{x}}^k)$ 与基于模型重构的可行值约束标量化方法 $(\text{RP}_{\mathbf{x}}^k)$ 生成了数量相当的有效解点, 分别为 15 个有效解点和 16 个有效解点; 但从分布性来看, 本文提出的基于模型重构的可行值约束标量化方法 $(\text{RP}_{\mathbf{x}}^k)$ 生成的有效解在整个帕累托曲面上更加均匀。

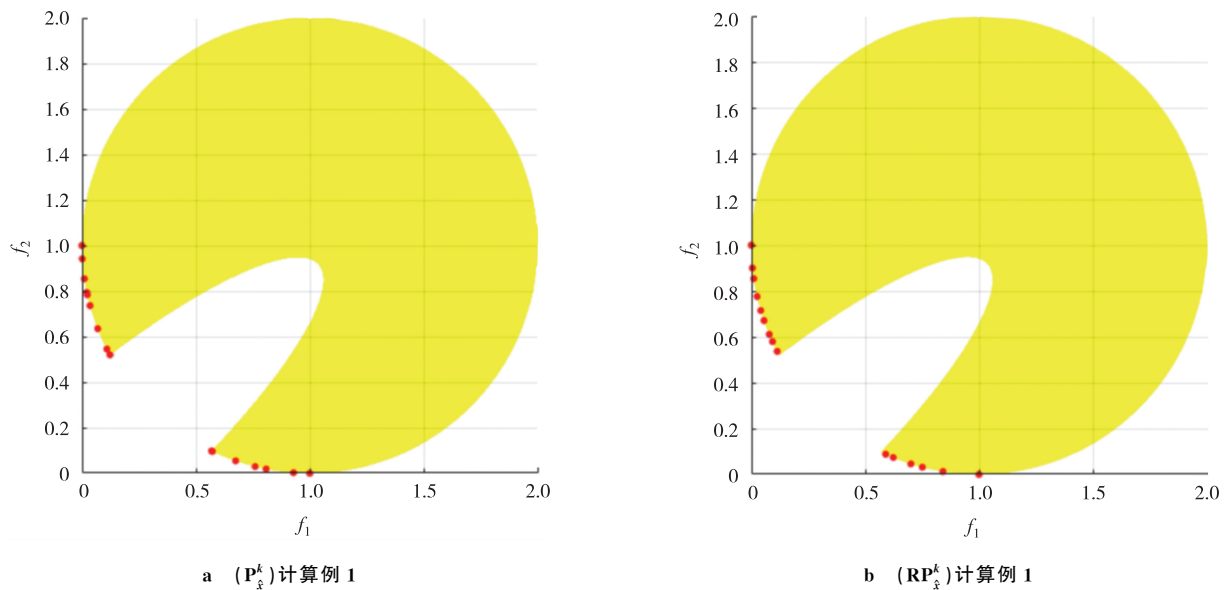


图 1 $(\text{P}_{\mathbf{x}}^k), (\text{RP}_{\mathbf{x}}^k)$ 在例 1 上获得的近似帕累托前沿面

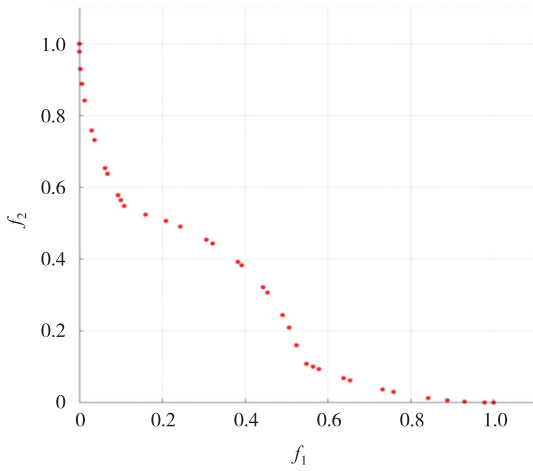
Fig. 1 The approximate Pareto front obtained by $(\text{P}_{\mathbf{x}}^k), (\text{RP}_{\mathbf{x}}^k)$ on example 1

例 2 考虑如下非凸双目标优化问题^[21]:

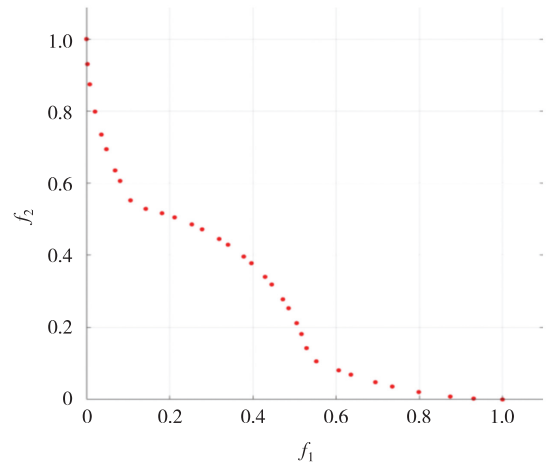
$$\begin{aligned} & \min (x_1, x_2)^T; \\ & \text{s. t. } (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0, \\ & \quad -x_1^2 - x_2^2 + 0.3 \leq 0, \\ & \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

该问题的帕累托前沿具有非凸集。

该测试问题使用文献[16]中的算法 1,设置相关参数如下:权重网格的分区点数量 $N=50$,乌托邦点 $\mathbf{u} = (-1, -1)^T$,以及非负权重系数 $\lambda=0.012$ 。图 2 展示了可行值约束标量化方法(P_x^k)和基于模型重构的可行值约束标量化方法(RP_x^k)的帕累托前沿逼近效果。由图 2 可见,可行值约束标量化方法(P_x^k)生成了 20 个有效解,而基于模型重构的可行值约束标量化方法(RP_x^k)生成了 34 个有效解;且相较于可行值约束标量化方法(P_x^k),基于模型重构的可行值约束标量化方法(RP_x^k)生成的有效解在帕累托前沿面上分布得更加均匀。



a (P_x^k)计算例 2



b (RP_x^k)计算例 2

图 2 (P_x^k), (RP_x^k)在例 2 上获得的近似帕累托前沿面

Fig. 2 The approximate Pareto front obtained by (P_x^k), (RP_x^k) on example 2

例 3 考虑如下三目标优化问题^[12]:

$$\begin{aligned} & \min (x_1, x_2, x_3)^T; \\ & \text{s. t. } (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2 - (x_3 - 2)^2 \leq 4, \\ & \quad (1.05)^2 (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 7.18 \leq 0, \\ & \quad 0 \leq x_i \leq 4, i=1, 2, 3. \end{aligned}$$

该问题的帕累托前沿具有有界性,且为多重连通而非单连通结构。

该测试问题使用文献[24]中的算法 1,设置相关参数如下:权重网格的分区点数量 $N=21$,乌托邦点 $\mathbf{u} = (-10, -10, -10)^T$,非负权重系数 $\lambda=0.0214$ 。图 3 展示了可行值约束标量化方法(P_x^k)和基于模型重构的可行值约束标量化方法(RP_x^k)分别生成的帕累托前沿面效果。由图 3 可见,可行值约束标量化方法(P_x^k)生成了 585 个有效解,而基于模型重构的可行值约束标量化方法(RP_x^k)生成了 591 个有效解。本算例验证了所提方法(RP_x^k)在帕累托前沿的近似和有效解点的分布均匀程度上都优于可行值约束标量化方法(P_x^k)。

3.2 火箭喷射器设计中的应用

此前文献[26]已展开对多目标火箭喷射器设计问题的研究。该设计问题需重点考量 2 个核心方面:1) 性能;2) 延长使用寿命。性能主要受推力室轴向长度的影响,而使用寿命则与推力室内部的温度场密切相关。关于能够体现这些设计参数的喷注器示意图,可参阅文献[26]。

显然,二者之间存在相互制约的关系:高温会导致喷注器与推力室产生较大的热应力,进而降低构件的使用寿命。针对该火箭喷注器设计问题,文献[26]中定义了 4 个设计变量: x_1 为氢气喷射角; x_2 为氧化剂喷杆头部

厚度, x_3 为输氧管基准横截面积的缩减量, x_4 为氢气管基准横截面积的增加量。

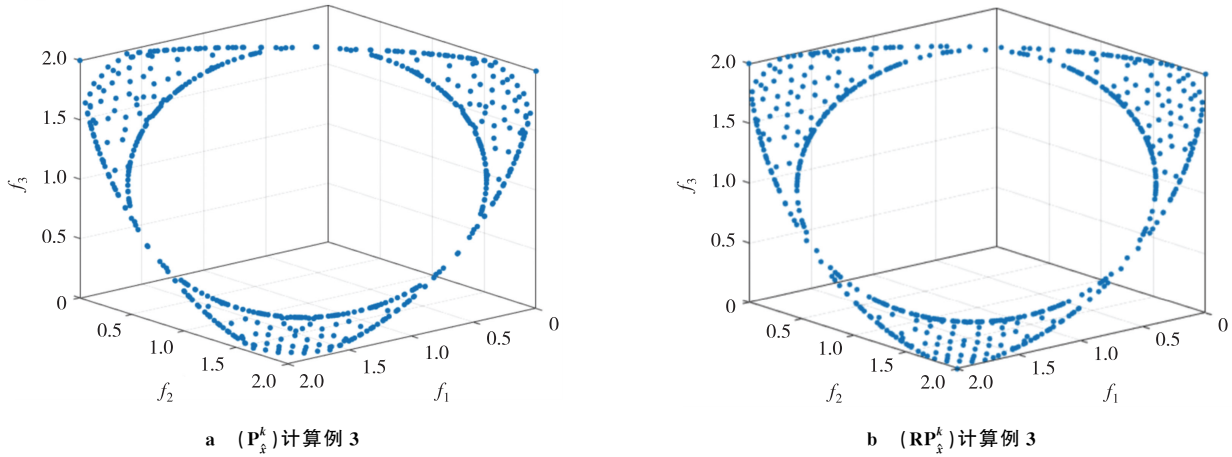


图 3 $(P_x^k), (RP_x^k)$ 在例 3 上获得的近似帕累托前沿面

Fig. 3 The approximate Pareto front obtained by $(P_x^k), (RP_x^k)$ on example 3

文献[26]中确定并列出了 4 个目标函数,具体如下:

$f_1(\mathbf{x})$:端面温度,即喷注器端面的最高温度;

$f_2(\mathbf{x})$:头部温度,即喷注器喷杆头部的最高温度;

$f_3(\mathbf{x})$:燃烧长度,即从入口处到 99%燃烧反应完成位置的距离;

$f_4(\mathbf{x})$:壁面温度,即距喷注器端面 3 英寸处(第 4 个测点)的壁面温度。

该火箭喷注器设计问题的数学模型^[26]可表述如下:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}), f_4(\mathbf{x}))^T,$$

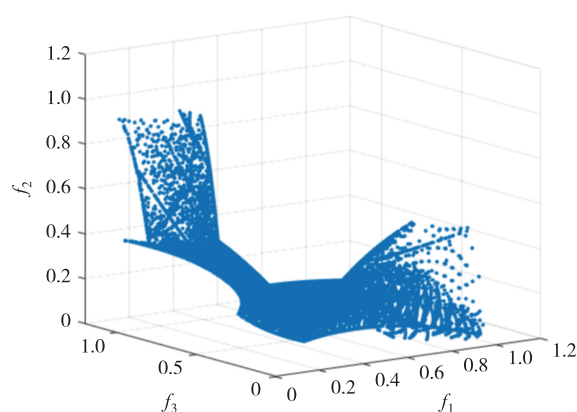
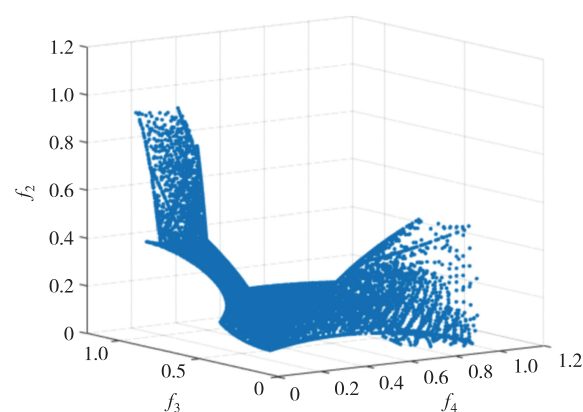
其中:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= 0.692 + 0.477x_1 - 0.687x_4 - 0.08x_3 - 0.065x_2 - 0.167x_1^2 - 0.0129x_1x_4 + \\ &\quad 0.0796x_4^2 - 0.0634x_1x_3 - 0.0257x_3x_4 + 0.0877x_3^2 - 0.0521x_1x_2 + \\ &\quad 0.00156x_2x_4 + 0.00198x_2x_3 + 0.0184x_2^2, \\ f_2(\mathbf{x}) &= 0.373 + 0.205x_1 - 0.0307x_4 - 0.108x_3 - 1.019x_2 - 0.135x_1^2 - 0.0141x_1x_4 + \\ &\quad 0.0998x_4^2 - 0.208x_1x_3 - 0.0301x_3x_4 + 0.226x_3^2 - 0.353x_1x_2 - 0.0497x_2x_3 - \\ &\quad 0.423x_2^2 + 0.202x_1^2x_4 + 0.281x_1^2x_3 - 0.281x_1^2x_3 - 0.342x_1x_4^2 - 0.245x_3x_4^2 + 0.281x_3^2x_4 - \\ &\quad 0.184x_1x_2^2 + 0.281x_1x_2x_3, \\ f_3(\mathbf{x}) &= 0.153 - 0.322x_1 + 0.396x_4 + 0.424x_3 + 0.0226x_2 + 0.175x_1^2 + 0.0185x_1x_4 - \\ &\quad 0.0701x_4^2 - 0.251x_1x_3 + 0.179x_3x_4 + 0.015x_3^2 + 0.0134x_1x_2 + 0.0296x_2x_4 + \\ &\quad 0.0752x_2x_3 + 0.0192x_2^2, \\ f_4(\mathbf{x}) &= 0.758 + 0.358x_1 - 0.807x_4 + 0.0925x_3 - 0.0468x_2 - 0.172x_1^2 - 0.0106x_1x_4 + \\ &\quad 0.0697x_4^2 - 0.146x_1x_3 - 0.0416x_3x_4 + 0.102x_3^2 - 0.0694x_1x_2 + \\ &\quad 0.00503x_2x_4 + 0.0151x_2x_3 + 0.0173x_2^2, \end{aligned}$$

且 $0 \leq x_i \leq 1, i=1, 2, 3, 4$ 。

该问题采用文献[24]中的算法 9,实验参数设置如下: $N=90, \lambda=0.002$ 。由于四维空间中的帕累托前沿无法直接可视化且便于与文献[26]中的结果对比,因此,选取 2 种投影方式进行展示:在图 4 中,将目标函数 (f_1, f_2, f_3, f_4) 投影至 $f_1-f_2-f_3$ 空间,得到投影结果 $(f_1, f_2, f_3, 0)$;在图 5 中,将目标函数 (f_1, f_2, f_3, f_4) 投影至 $f_4-f_3-f_2$ 空间,得到投影结果 $(0, f_2, f_3, f_4)$ 。

图 4 和图 5 展示了基于模型重构的可行值约束标量化方法 (RP_x^k) 的有效性;同时,也验证了文献[24]中所得出的结论,也即在该多目标优化问题中纳入 f_4 这一目标函数是至关重要且必不可少的。

图4 帕累托前沿在 f_1 - f_2 - f_3 空间的投影Fig. 4 Projection of Pareto front in space f_1 - f_2 - f_3 图5 帕累托前沿在 f_4 - f_3 - f_2 空间的投影Fig. 5 Projection of Pareto front in space f_4 - f_3 - f_2

4 结论和展望

本文借助模型的重构思想对可行值约束标量化方法进行了改进,并研究了改进后的可行值约束标量化方法的最优解与多目标优化问题(弱、真)有效解之间的关系,特别建立了与多目标优化问题真有效解之间的等价刻画关系。实验结果表明,所提出的改进可行值约束标量化方法具有一定的有效性。

本文基于原多目标优化问题的一种重构模型,研究了对可行值约束标量化方法进行改进的方式,后续研究可以寻找并利用原多目标问题的其他重构模型,对可行值约束标量化方法作进一步的改进。

参考文献:

- [1] Lee D H, Bian W, Dong M. Multiobjective model and solution method for integrated forward and reverse logistics network design for third-party logistics providers[J]. Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board, 2007, 2032 (1): 43-52.
- [2] Boonmee C, Kasemset C. The multi-objective fuzzy mathematical programming model for humanitarian relief logistics[J]. Industrial Engineering & Management Systems, 2020, 19 (1): 197-210.
- [3] Budak G, Kara İ. A multiobjective mathematical model to form the best team at sports clubs: team harmony and player performance objectives[J]. Team Performance Management, 2022, 28 (3/4): 145-159.
- [4] Gass S, Saaty T. The computational algorithm for the parametric objective function[J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1955, 2 (1/2): 39-45.
- [5] Geoffrion A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1968, 22 (3): 618-630.
- [6] Kasimbeyli R, Ozturk Z K, Kasimbeyli N, et al. Comparison of some scalarization methods in multiobjective optimization[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2019, 42 (5): 1875-1905.
- [7] Klamroth K, Jørgen T. Constrained optimization using multiple objective programming[J]. Journal of Global Optimization, 2007, 37 (3): 325-355.
- [8] Steuer R E. Multiple criteria optimization: theory, computation and application[M]. New York: Wiley, 1986.
- [9] On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1971, SMC-1 (3): 296-297.
- [10] Ehrgott M, Ryan D M. Constructing robust crew schedules with bicriteria optimization[J]. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 2002, 11 (3): 139-150.
- [11] Ehrgott M, Ruzika S. Improved ϵ -constraint method for Multiobjective programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2008, 138 (3): 375-396.
- [12] Bowman V J Jr. On the relationship of the tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives[M]// Multiple criteria decision making. Berlin: Springer, 1976: 76-86.
- [13] Choo E U, Atkins D R. Proper efficiency in nonconvex multicriteria programming[J]. Mathematics of Operations

- Research, 1983, 8 (3): 467-470.
- [14] Steuer R E, Choo E U. An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming [J]. Mathematical Programming, 1983, 26 (3): 326-344.
- [15] Khorasani V A, Khorram E. Modification of some scalarization approaches for multiobjective optimization[J]. RAIRO-Operations Research, 2023, 57 (3): 1027-1044.
- [16] RIZVI M M. New optimality conditions for nonlinear multiobjective optimization problems and new scalarization techniques for constructing pathological Pareto fronts[D]. Adelaide: University of South Australia, 2013.
- [17] Hoseinpoor N, Ghaznavi M. The modified objective-constraint scalarization approach for multiobjective optimization problems[J]. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2022, 51 (5): 1403-1418.
- [18] Hoseinpoor N, Ghaznavi M. A flexible objective-constraint approach and a new algorithm for constructing the Pareto front of multiobjective optimization problems[J]. Acta Mathematica Scientia, 2024, 44 (2): 702-720.
- [19] Pascoletti A, Serafini P. Scalarizing vector optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1984, 42: 499-524.
- [20] Khaledian K, Khorram E, Karimi B. Characterizing ϵ -properly efficient solutions [J]. Optimization Methods and Software, 2015, 30 (3): 583-593.
- [21] Akbari F, Ghaznavi M, Khorram E. A revised pascoletti-serafini scalarization method for multiobjective optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2018, 178 (2): 560-590.
- [22] Ghaznavi M, Akbari F, Khorram E. Optimality conditions via a unified direction approach for (approximate) efficiency in multiobjective optimization[J]. Optimization Methods and Software, 2021, 36 (2/3): 627-652.
- [23] Tang L P, Yang X M. A modified direction approach for proper efficiency of multiobjective optimization[J]. Optimization Methods and Software, 2021, 36 (2/3): 653-668.
- [24] Burachik R S, Kaya C Y, Rizvi M M. A new scalarization technique and new algorithms to generate Pareto fronts[J]. SIAM Journal on Optimization, 2017, 27 (2): 1010-1034.
- [25] Miettinen K. Nonlinear multiobjective optimization[M]. Boston, MA: Springer US, 1998.
- [26] Goel T, Vaidyanathan R, Haftka R T, et al. Response surface approximation of Pareto optimal front in multi-objective optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196 (4/5/6): 879-893.

Operations Research and Cybernetics

Feasible-Value-Constraint Scalarization Method Based on Model Reconstruction

WANG Shuai, TANG Liping

(National Center for Applied Mathematics in Chongqing, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: To address the issue that the feasible-value constrained scalarization method cannot obtain properly efficient solutions for nonconvex multiobjective optimization problems, this paper uses the idea of model reconstruction and proposes an improved feasible-value-constraint scalarization method, investigating its application in nonconvex multiobjective optimization problems. First, by reconstructing the original multiobjective optimization problem and combining it with the feasible-value constrained scalarization method, an improved feasible-value-constraint scalarization method based on the reconstructed model is constructed. Second, using this method, scalarization characterizations of (weakly) efficient solutions are established for both the original problem and the reconstructed multiobjective problem. Third, based on the relationship between properly efficient solutions for the original problem and (weakly) efficient solutions of the reconstructed problem, a scalarization characterization of properly efficient solutions for the original problem is derived using the reconstruction-based feasible-value-constraint method. Finally, numerical experiments demonstrate that, compared with the feasible-value-constraint method, the proposed method can approximate the Pareto front more effectively.

Keywords: multi-objective optimization; model reconstruction; feasible-value-constraint scalarization method; properly efficient solution

(责任编辑 陈 乔)