2008 年 7 月 重庆师范大学学报(自然科学版) July 2008
第 25 卷 第 3 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 25 No. 3

运筹学与控制论

机器不同时开工平行机排序问题的原始阈值算法*

李 蒙[1],唐万梅[1],唐国春[2]
(1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047;2. 上海第二工业大学 管理工程研究所,上海 200041)

摘 要:对于机器不同时开工排序问题,研究 m 台机器的情况,给出原始阈值算法 $PTm(\varepsilon)$(其中 ε 为可选参数),并证明当 $\varepsilon=\frac{m-1}{m}$ 时原始阈值算法 $PTm\left(\frac{m-1}{m}\right)$ 的近似比为 $1+\frac{m-1}{m}$,而且证明该界是紧的。由此推广原有文献中两台机器的原始阈值算法。

关键词:排序;就绪时间;近似比
中图分类号:O223 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2008)03-0005-03

平行机排序问题是排序理论中研究最为活跃的分支之一。经典的同型(identical)平行机排序问题可以这样描述:给定 m 台同型平行机器 $M_1, M_2, \cdots, M_m$,和工件集 $J=\{J_1, J_2, J_3, \cdots, J_j, \cdots, J_n\}$,工件 J_j 在每台同型机上的加工时间都是 $p_j(j=1,2,\cdots,n)$,通常也用 p_j 表示工件本身而不再加以说明。各工件相互独立,机器和工件都可在时刻零开始加工或者被加工,每个工件只需在一台机器上不中断地加工一次。排序的目标是使 m 台平行机中完工时间最大的那台机器的完工时间为最小。这里机器完工时间是指在这台机器上加工的所有工件的加工时间之和。

突破经典排序问题关于资源的类型、确定性、单目标和正则性等基本假设涌现出来的,具有实际背景的新型排序(现代排序)问题有很多很多,机器不同时开工的平行机排序是其中重要的一种新型排序问题[1]。虽然工件在时刻零可以开始加工,但是由于机器有不同就绪时间,因而只有在机器准备就绪之后才可以开始加工工件。在实际生产中机器的就绪时间往往是不相同的。机器不同时开工的平行机排序问题因其强烈的实际背景,受到广泛的关注。近十多年来人们提出了大量的模型和算法[2-5]。本文研究这类排序问题的近似算法。设机器 M_i 的就绪时间为 $r_i(i=1,2,\cdots,m)$,不失一般性,令 $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_m$。排序的目标还是使 m 台平行机中完工时间最大的那台机器的完工时间为最小。这时机器完工时间是指机器的就绪时间与在其上加工的所有工件的加工时间之和。

1 原始阈值算法

1.1 原始阈值算法背景

2005 年谈之奕和何勇对于经典的机器有相同就绪时间的两台同型号的平行机排序问题 $P2 \| C_{\max}$ 提出原始阈值算法(Primal Threshold Algorithm)[2],证明算法的近似比为 3/2。这里算法 A 的近似比定义为 $C_A=\inf\limits_{c}\{c \geqslant 1 \mid C^A(I) \leqslant cC^{OPT}(I), \forall I\}$,其中 $C^A(I)$ 和 $C^{OPT}(I)$ 分别表示算法 A 对于实例 I 所得到的目标函数值和最优目标值。本文把原始阈值算法推广到新型的机器有不同就绪时间的多台同型号平行机的情形。

原始阈值算法的基本思想是用所有机器的就绪时间以及所有工件的总加工时间之和 T 以及算法的预期情况界 $1+\varepsilon$(ε 为可选参数),确定出算法的上下阈值。通常,它们的值分别取为

$$(1+\varepsilon)\ \frac{T}{m},\left(1-\frac{\varepsilon}{m-1}\right)\frac{T}{m}$$

在这里,不妨假定 $r_1 \leqslant \frac{T}{m}$。根据文献[3],这时可以保证最优值大于等于 $\frac{T}{m}$。在算法的进行过程中,一旦某时刻有 $(m-1)$ 台机器的完工时间位于上下阈值之间,那么第 m 台机器的完工时间也一定位于上下

* 收稿日期:2007-07-24 修回日期:2008-01-07
基金项目:国家自然科学基金重大国际(地区)合作研究项目(No. 70731160015)
作者简介:李蒙(1981-),男,硕士研究生,研究方向为组合最优化。

阈值之间,由此算法的近似比可得到保证。把这种情况称为正常终止。若不然,称之为异常终止。此时通过对算法和最优解做进一步的分析来证明,算法的目标函数值也不超过最优解的$1+\varepsilon$倍。算法安排工件在总体上遵守所谓原始准则,即尽量把工件安排在当前完工时间最小的机器上加工。此时,机器的当前完工时间是指机器的就绪时间与在其上已加工的所有工件的加工时间之和。

1.2 原始阈值算法 $PTm(\varepsilon)$

如果存在还没有安排加工的工件,并且p是第一个这样的工件,那么按如下步骤安排。

步骤1 (正常终止准则)如果存在机器M_i $(i=1,\cdots,m)$把p安排在其上加工时会使得$m-1$台机器的完工时间位于

$$\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{m-1}\right)\frac{T}{m},\frac{(1+\varepsilon)T}{m}\right]$$

中,那么就把p安排在M_i上加工。然后把剩余工件安排在唯一的完工时间小于$\left(1-\frac{\varepsilon}{m-1}\right)\frac{T}{m}$的机器上加工,算法终止。

步骤2 (异常终止准则)如果工件p安排在任何机器上加工都会使其完工时间大于$\frac{(1+\varepsilon)T}{m}$,那么把$p$和剩余的工件按LS序安排加工。

步骤3 (原始安排准则)安排工件p在当前完工时间最小的机器上加工。

根据原始阈值算法引入以下定义。

定义1 如果算法按异常终止原则终止,那么必定存在工件$p_t(1\leqslant t\leqslant n)$,其被安排到某台机器加工,这台机器在加工这个工件以前的完工时间一定小于下阈值,在加工这个工件以后会使这台机器的完工时间大于上阈值,把这样的工件p_t称为关键工件。

由定义可得,关键工件p_t的加工时间一定大于上下阈值之差。

引理1 若算法$PTm(\varepsilon)$按正常终止准则终止,则$\frac{C^{PTm(\varepsilon)}}{C^{OPT}}\leqslant 1+\varepsilon$。

证明 显然有$C^{OPT}\geqslant\frac{T}{m}$,若算法按正常终止准则终止,则存在$m-1$台机器,不妨记为$M_1,M_2,\cdots,M_{m-1}$,它们的完工时间位于$\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{m-1}\right)\frac{T}{m},\frac{(1+\varepsilon)T}{m}\right]$之间,并且此后这$m-1$台机器不再加工任何工件。另一方面,机器$M_m$的完工时间不超过

$$T-(m-1)\left(1-\frac{\varepsilon}{m-1}\right)\frac{T}{m}=(1+\varepsilon)\frac{T}{m}$$

所以$C^{PTm(\varepsilon)}\leqslant(1+\varepsilon)\frac{T}{m}\leqslant(1+\varepsilon)C^{OPT}$。 证毕

定义2 如果对于选定的参数$\varepsilon(0<\varepsilon<1)$,可使得算法的近似比为$1+\varepsilon$,而且所给出的近似比不会再下降,那么把$1+\varepsilon$称为算法的紧界。

2 主要结论

在本节中,将给出原始阈值的一个近似比,并进一步说明该界是紧的。不失一般性,假设$r_m=0$,这是因为有下面的引理2。

引理2[4] 若对所有满足$r_n'=0$的实例I',成立$\frac{C^A(I')}{C^{OPT}(I')}\leqslant c$,则对所有实例$I$,都有$\frac{C^A(I)}{C^{OPT}(I)}\leqslant c$。

定理1 对任何$m\geqslant 3$,算法$PTm\left(\frac{m-1}{m}\right)$关于$Pm,r_i\parallel C_{\max}$的紧界为$1+\frac{m-1}{m}$。

证明 为了简便起见,记$C=C^{PT_m\left(\frac{m-1}{m}\right)}$。首先证明$\frac{C}{C^{OPT}}\leqslant\frac{m-1}{m}$。不失一般性,令$T=m^2$,那么上阈和下阈分别为$2m-1$和$m-1$。如果算法是异常终止,那么结论自然成立。下面假设算法$PT\left(\frac{m-1}{m}\right)$是正常终止。

情况一,把p_t安排在M_n上加工,并且是首个加工的工件,那么$p_t>2m-1$。这意味着,$C^{OPT}\geqslant p_t>2m-1$。采用反证法来证明$\frac{C}{C^{OPT}}\leqslant\frac{m-1}{m}$成立。

假设$\frac{C}{C^{OPT}}>1+\frac{m-1}{m}$。此时,必存在一台机器的完工时间$C>\left(1+\frac{m-1}{m}\right)C^{OPT}>\frac{(2m-1)^2}{m}$。记此台机器最后完工的工件为$p$,则其余$m-1$台机器的完工时间至少等于$C-p$。于是

$$(m-2)(C-p)+C+p_t\leqslant T \tag{1}$$

从而得到$p\geqslant\frac{(m-1)C+p_t-T}{m-2}$。由

$$C>\frac{(2m-1)^2}{m},p_t>2m-1,T=m^2$$

可得

$$p \geqslant \frac{(m-1)(2m-1)^2 + m(2m-1) - m^3}{m(m-2)} > \frac{3m^3 - 6m^2 + 4m - 1}{m(m-2)} \quad (2)$$

由(1)式还可以得到

$$C - p \leqslant \frac{T - C - p_t}{m-2} < \frac{m^2 - \frac{(2m-1)^2}{m} - (2m-1)}{m-2} = \frac{m^3 - 6m^2 + 5m - 1}{m(m-2)} \quad (3)$$

由(2)、(3)式，得出矛盾

$$\frac{C}{C^{OPT}} \leqslant \frac{C}{p} = 1 + \frac{C-p}{p} \leqslant 1 + \frac{m^3 - 6m^2 + 5m - 1}{3m^3 - 6m^2 + 4m - 1} < 1 + \frac{m-1}{m}$$

情况二，或者把 p_t 安排在 M_n 上加工，并且不是首个加工的工件，或者把 p_t 安排在其他机器上加工。

此时有 $p_t > m$。记 p_t 开始加工的时间为 L，先证明 $L < \frac{m-1}{m}p_t$。

假设 $L \geqslant \frac{m-1}{m}p_t$。根据 $PTm(\varepsilon)$ 的算法，可知在 p_t 开始在某台机器加工时，其他 $m-1$ 台机器的完工时间都不会比这台机器小，这时有

$$T > (m-1)\frac{m-1}{m}p_t + \left(1 + \frac{m-1}{m}\right)p_t = mp_t > m^2$$

这与 $T = m^2$ 矛盾。

下面分两种情况讨论。

1）当 p_t 是最后完工的工件时，

$$C = L + p_t < \left(1 + \frac{m-1}{m}\right)p_t \leqslant \left(1 + \frac{m-1}{m}\right)C^{OPT}$$

于是结论成立。

2）当 p_t 不是最后完工的工件时，记此时最后完工的工件为 p，其所在机器的完工时间为 C。将证明 $C \leqslant \left(1 + \frac{m-1}{m}\right)C^{OPT}$。

假设 $C > \left(1 + \frac{m-1}{m}\right)C^{OPT}$。由于 $C^{OPT} \geqslant p_t > m$，那么 $C > \left(1 + \frac{m-1}{m}\right)m = 2m - 1$。根据 $PTm\left(\frac{m-1}{m}\right)$ 的算法，可知有 $m-1$ 台机器的完工时间至少为 $C - p$。于是有

$$(m-2)(C-p) + C + L + p_t \leqslant T \quad (4)$$

因而，得知 $p \geqslant \frac{(m-1)C + L + P_t - T}{m-2}$。由于 $C > 2m-1$，$p_t > m$，$T = m^2$，可得

$$p \geqslant \frac{(m-1)C + L + p_t - T}{m-2} > \frac{(m-1)(2m-1) + 2m - 1 - m^2}{m-2} = \frac{m^2 - m}{m-2} \quad (5)$$

由(4)式还可以得出

$$C - p \leqslant \frac{T - C - (L+P)}{m-2} < \frac{m^2 - 2m + 1 - 2m + 1}{m-2} < \frac{m^2 - 2m + 1}{m-2} = \frac{m^2 - 2m + 1}{m-2} \quad (6)$$

结合(5)、(6)式，可以得到矛盾

$$\frac{C}{C^{OPT}} \leqslant \frac{C}{p} = 1 + \frac{C-p}{p} \leqslant 1 + \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - m} < 1 + \frac{m-1}{m}$$

证毕

定理 2　对于问题 $Pm, r_i \| C_{\max}$，算法 $PTm\left(\frac{m-1}{m}\right)$ 所得的近似比是紧界。

证明　根据算法紧界的定义，只需举一个实例 I。对于此实例，有 $C^{OPT}(I) = m$，而且 $C^{PTm(\frac{m-1}{m})} = 2m - 1$。

考察实例 $r_1 = r_2 = \cdots = r_{m-2} = \frac{1}{2m}$，$r_{m-1} = r_m = 0$，$p_1 = m-1$，$p_2 = \frac{1}{m}$，$p_3 = p_4 = \cdots = p_m = \frac{1}{2m}$，$p_{m+1} = p_{m+2} = \cdots p_{m(m-1)^2+1} = \frac{1}{m}$，$p_{m(m-1)^2+2} = m$，根据算法 $PTm\left(\frac{m-1}{m}\right)$ 对于此实例，有 $C^{PTm(\frac{m-1}{m})} = 2m - 1$。最优解是先安排 $p_1 \in M_m$，$p_{m(m-1)^2+2} \in M_{m-1}$，$p_i \in M_{i-2}$，$i = 3, 4, \cdots, m$。然后，其余工件按 LS 序排列，可得 $C^{OPT}(I) = m$，于是结论成立。　证毕

3 结论

对于多于 2 台的机器不同时开工排序，给出原始阈值算法，并进一步给出算法的紧界。在今后的研究中，如何修正此算法使之应用于其它半在线排序问题，从而给出此类问题更好的半在线算法将是一项很有意义的工作。

参考文献：

[1] 唐国春，张峰，罗守成，等. 现代排序论[M]. 上海：上海科学普及出版社，2003.

[2] TAN Zhiyi, HE Yong. Linear Time Algorithms for Parallel Machine Scheduling[J]. Algorithmic Applications in Management, 2005, 3521: 172-182.

[3] LEE C Y, HE Y, TANG G C. A Note on "Parallel Machine Scheduling with Non-simultaneous Machine Available Time" [J]. Disc Appl Math, 2000, 100: 133-135.
[4] 范静,杨启帆.机器带准备时间的三台平行机排序问题的线性时间算法[J].浙江大学学报(自然科学版), 2005, 32(3): 258-263.
[5] 孙叶平,唐万梅,唐国春. Moore-Hodgson 算法最优性的新算法[J].重庆师范大学学报(自然科学版), 2007, 24(3): 4-7.

Primal Threshold Algorithms of Non-Simultaneous Machine Available Times

LI Meng[1], *TANG Wan-mei*[1], *TANG Guo-chun*[2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;
2. Institute of Management Engineering, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 200041, China)

Abstract: In this paper the case of m machines with non-simultaneous machine available times is investigated. As a generalation of the classical parallel machine scheduling problem, each machine is available only at a machine dependent release time. For the problem of minimizing the makespan, the kind of algorthm which is called Primal-Threshold $PT_m(\varepsilon)$, where ε is an optional parameter, is proposed. Then we prove that if the Algorithm will be controlled by normal stopping rule, we can obtain that $\frac{C^{PTm(\varepsilon)}}{C^{OPT}} \leqslant 1+\varepsilon$. The Algorithm will be controlled by abnormal stopping rule. We can also get the same result. Moreover, it is proved that if ε equalso to $\frac{m-1}{m}$, the performance ratio of Primal-Threshold Algorithm $PTm\left(\frac{m-1}{m}\right)$ is $1+\frac{m-1}{m}$, which is tight. It extends the case of two machines on Primal-Threshold Algorithms.

Key words: scheduling; performance ratio; machine available ti

(责任编辑　黄　颖)