运筹学与控制论

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693.2010.03.001

几种真有效点的锥刻画*

戎卫东, 童正大
(内蒙古大学 数学科学学院, 呼和浩特 010021)

摘要:本文在一般向量优化问题的目标空间中研究几种真有效点的锥刻画。设 Y 是偏序局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间,Y^* 为其拓扑对偶空间,C 是空间 Y 的序锥,D 是 Y 中的一个凸子集,点 $y\in D$。首先,笔者用切向锥 $T_D(y)$ 与负序锥 $-C$ 或 $-C\setminus\{0\}$ 间的位置关系式来给出 y 是 D 的 Benson 真有效点(超有效点、强有效点和两种严有效点)的充分必要条件;利用这些结果,得到了这几种真有效点概念等价的一个充分条件。然后,在对偶空间 Y^* 中,用法向锥 $N_D(y)$ 与锥 C^{-i} 或 $-\mathrm{int}(C^-)$ 间的位置关系式来给出 y 是 D 的 Benson 真有效点(强有效点)的充分必要条件。

关键词:运筹学;向量优化问题;真有效点;锥刻画
中图分类号:O224　　文献标识码:A　　文章编号:1672-6693(2010)03-0001-05

本世纪初,Kaisa Miettin 和 Marko M Mäkelä 在文献[1]中研究了向量优化问题的弱有效点、有效点及真有效点的锥刻画,他们将一个点是弱有效点、有效点及真有效点的充分必要条件表述为两个特定的锥的交集满足某一关系式。这种用几何性质来刻画向量优化问题的不同意义的最优性的方法受到一些运筹学工作者的重视。在国内,有黄龙光和刘三阳的文献[2]及李月鲜和戎卫东的文献[3]。前者是将文献[1]的主要结果推广到局部凸 Hausdorff 空间;后者则用这一方法研究了带不等式约束的非光滑向量优化问题。有效解的锥刻画本质上是回归到它们的几何特征,有可能是最优性条件研究的一条新路径,值得展开进一步研究。

1 概念和记号

设 Y 是局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间,Y^* 是 Y 的对偶空间。设集合 $A\subset Y$,$\mathrm{int}A$ 和 $\mathrm{cl}A$ 分别表示 A 的内部和闭包。集合 $A\subset Y$ 称为是凸的,如果 $\forall\lambda\in(0,1)$,$\lambda A+(1-\lambda)A\subset A$。集合 $C\subset Y$ 称为是一个锥,如果 $\forall k\geqslant 0$,$\forall c\in C$,$kc\in C$。如果锥 C 还是凸集,则称 C 是凸锥。如果锥 C 满足 $C\cap(-C)=\{0\}$,则称 C 是点锥。$\mathrm{cone}A=\{ka:\ k\geqslant 0,a\in A\}=\cup_{k\geqslant 0}kA$ 表示集合 A 的锥包。当锥 C 的凸子集 Θ 满足 $C=\mathrm{cone}\Theta$ 和 $0\notin\mathrm{cl}\Theta$ 时,则称 Θ 是锥 C 的一个基。

定义 1[4]　集合 $A\subset Y$ 的几种对偶锥定义如下

1) 负对偶锥:$A^-=\{\varphi\in Y^*\mid\varphi(a)\leqslant 0,\forall a\in A\}$;

2) 正对偶锥:$A^+=\{\varphi\in Y^*\mid\varphi(a)\geqslant 0,\forall a\in A\}$;

3) 严格负对偶锥:$A^{-i}=\{\varphi\in Y^*\mid\varphi(a)<0,\forall a\in A\setminus\{0\}\}$;

4) 严格正对偶锥:$A^{+i}=\{\varphi\in Y^*\mid\varphi(a)>0,\forall a\in A\setminus\{0\}\}$。

命题 1[5]　对于凸锥 C 的基 Θ,基泛函集 $\Theta^{st}=\{\varphi\in Y^*\mid\exists t>0,\varphi(\theta)\geqslant t,\forall\theta\in\Theta\}$ 有性质:1) $\Theta^{st}\neq\varnothing$;2) 如果 Θ 还是有界基,则 $\Theta^{st}=\mathrm{int}(C^+)$。

下面是本文要讨论的非空集合 A 的几种有效点的定义。

定义 2[1,6-7]　设 $C\subset Y$ 是锥,Θ 为锥 C 的一个基,$A\subset Y$ 是非空集合,$y\in A$;用 $B(0)$ 和 $N(0)$ 分别表示空间 Y 的零点邻域基和零点邻域族,则

1) 集合 A 关于锥 C 的有效点集是指 $E(A,C)=\{y\in A\mid(A-y)\cap(-C)=\{0\}\}$;

* 收稿日期:2010-03-15
资助项目:运筹学与系统工程重庆市市级重点实验室开放课题(No. YC200801)
作者简介:戎卫东,男,教授,研究方向为运筹学数学理论。

2)集合 A 关于锥 C 的弱有效点集是指 $E_w(A,C)=\{y\in A \mid (A-y)\cap(-\mathrm{int}\ C)=\varnothing\}$;

3)集合 A 关于锥 C 的 Benson 真有效点集是指

$$PE(A,C)=\{y\in A \mid \mathrm{cl\ cone}(A+C-y)\cap(-C)=\{0\}\}$$

4)集合 A 关于锥 C 的超有效点集是指

$$SE(A,C)=\{y\in A \mid \forall V\in N(0),\exists U\in N(0),\mathrm{cl\ cone}(A-y)\cap(U-C)\subset V\}$$

5)集合 A 关于锥 C 的强有效点集是指

$$GE(A,C)=\{y\in A \mid \forall \varphi\in Y^*,\exists U,V\in B(0),\varphi(\mathrm{cl\ cone}(A-y)\cap(U-\mathrm{cone}(V+\Theta)))\text{有界}\}$$

6)集合 A 关于基 Θ 的严有效点集是指

$$FE(A,\Theta)=\{y\in A \mid \exists U\in N(0),\mathrm{cl\ cone}(A-y)\cap(U-\Theta)=\varnothing\}$$

而集合 A 关于锥 C 的严有效点集是指 $FE(A,C)=\cap\{FE(A,\Theta) \mid \Theta$ 为锥 C 的基$\}$,换言之,$y'\in FE(A,C)\Leftrightarrow$ 对于 C 的每一个基 Θ,都有 $y'=FE(A,\Theta)$。

注1 由文献[8]知,超有效点集的定义等价于

$$SE(A,C)=\{y\in A \mid \forall V\in N(0),\exists U\in N(0),\mathrm{cone}(A-y)\cap(U-C)\subset V\}$$

又由文献[5]知,强有效点集的定义等价于

$$GE(A,C)=\{y\in A \mid \forall \varphi\in Y^*,\exists U,V\in B(0),\varphi(\mathrm{cone}(A-y)\cap(U-\mathrm{cone}(V+\Theta)))\text{有界}\}$$

本文的主要结果需要用到集合的相依锥、法向锥和可行方向锥。

定义3[2] 设集合 $D\subset Y$(这里对 D 没有凸性要求),$y\in D$,则

1)集合 D 在点 y 处的相依锥 $T_D(y)$ 是指

$$T_D(y)=\{y\in Y \mid \exists\{t_\alpha\},t_\alpha\to0^+;\exists\{z_\alpha\}\subset Y,z_\alpha\to z;\forall\alpha,y+t_\alpha z_\alpha\in D\}$$

2)集合 D 在点 y 处的法向锥 $N_D(y)$ 是指 $N_D(y)=T_D(y)^-=\{\varphi\in Y^*:\varphi(z)\leqslant0,\forall z\in T_D(y)\}$;

3)集合 D 在点 y 处的可行方向锥 $F_D(y)$ 是指:$F_D(y)=\{z\in Y \mid \exists t>0,y+tz\in D\}$。

引理1[9] 若 K 和 C 是 Y 中的闭凸锥,C 是具有局部紧基的点锥,且 $K\cap C=\{0\}$,则有 $C^{+i}\cap K^-\neq\varnothing$。

2 关于凸集的几种真有效点的锥刻画

现在讨论非空凸集 $D\subset Y$ 的几种真有效点的锥刻画。可以指出:当 D 为凸集时,相依锥 $T_D(y)$ 与切向锥是一致的。因此,在这一节里,记号 $T_D(y)$ 就是凸集 D 在点 $y\in D$ 处的切向锥。此外,总假设 $C\subset Y$ 为闭凸点锥,且满足 $\mathrm{int}C\neq\varnothing$。

引理2[10] 设 $y\in D$,D 是 Y 的凸子集,则 $T_D(y)=\mathrm{cl\ cone}(D-y)$。

先用切向锥、后用法向锥来刻画凸集 D 的几种有效点。为了免去读者的查找,也使本文显得系统一些,先叙述文献[2]中的两个定理。

定理1[2] $y\in E(D,C)\Leftrightarrow y\in D,F_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing$。

定理2[2] 设 $y\in D$,则 $y\in E_w(D,C)\Leftrightarrow T_D(y)\cap(\mathrm{int}(-C))=\varnothing\Leftrightarrow F_D(y)\cap(\mathrm{int}(-C))=\varnothing$。

定理3 设 $C\subset Y$ 具有局部紧基,则 $y\in PE(D,C)\Leftrightarrow T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing$。

证明 “$\Rightarrow$”设 $y\in PE(D,C)$,由定义2的3)有 $\mathrm{cl\ cone}(D+C-y)\cap(-C)=\{0\}$,故

$$\mathrm{cl\ cone}(D+C-y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing \tag{1}$$

由于 C 是点锥,故 $D\subset D+C$,由此和引理2,便有 $T_D(y)=\mathrm{cl\ cone}(D-y)\subset\mathrm{cl\ cone}(D+C-y)$。由此式和(1)式就得到 $T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing$。

“$\Leftarrow$”由条件 $T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing$,并注意到 $0\in T_D(y)$ 和 $0\in-C$,则有 $T_D(y)\cap(-C)=\{0\}$。因为 C 具有局部紧基,从而 $(-C)$ 也有局部紧基,对 $T_D(y)$ 和 $(-C)$ 使用引理1得到 $(-C)^{+i}\cap(T_D(y))^-\neq\varnothing$。则 $\exists\varphi\in Y^*$,满足 $\varphi\in(-C)^{+i}\cap(T_D(y))^-$。再由引理2,有 $\varphi\in(-C)^{+i}\cap(\mathrm{cl\ cone}(D-y))^-$。由定义1的1)和4)表明

$$\forall c'=-C,\forall d'\in\mathrm{cl\ cone}(D-y),\varphi(c')>0\geqslant\varphi(d') \tag{2}$$

可以指出,对任意固定的 $z\in\mathrm{cl\ cone}(D+C-y)$ 和上述的 $\varphi\in Y^*$,必有 $\varphi(z)\leqslant0$。事实上,$z\in\mathrm{cl\ cone}(D+C-y)$ 等

价于存在网 $\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subset\mathrm{cone}(D+C-y)$,满足 $\lim\limits_{\alpha} y_\alpha=z$。进一步,对任意固定的 $\alpha\in\Lambda$,因 $y_\alpha\in\mathrm{cone}(D+C-y)$,故存在 $t_\alpha\geqslant0,d_\alpha\in D,c_\alpha\in C$,满足 $y_\alpha=t_\alpha(d_\alpha+c_\alpha-y)$。因 $\varphi\in Y^*$ 是连续线性泛函,且 $t_\alpha(d_\alpha-y)\in\mathrm{cone}(D-y)$,$t_\alpha c_\alpha\in C$,据此和(2)式有

$$\varphi(z)=\varphi(\lim_\alpha y_\alpha)=\lim_\alpha\varphi(y_\alpha)=\lim_\alpha\varphi(t_\alpha(d_\alpha-y)-(-t_\alpha c_\alpha))=\lim_\alpha\varphi(t_\alpha(d_\alpha-y))-\lim_\alpha\varphi(-t_\alpha c_\alpha)\leqslant0 \quad (3)$$

若能证明 $\mathrm{cl\ cone}(D+C-y)\cap(-C)=\{0\}$,则完成 $y\in PE(D,C)$ 的证明。因为 $0\in\mathrm{cl\ cone}(D+C-y)\cap(-C)$,则假设 $\exists\bar{y}\neq0,\bar{y}\in\mathrm{cl\ cone}(D+C-y)\cap(-C)$。由 $\bar{y}\in\mathrm{cl\ cone}(D+C-y)\cap(-C)$ 和(3)式,有 $\varphi(\bar{y})\leqslant0$。又由 $\bar{y}\neq0$ 且 $\bar{y}\in-C$,并注意到 $\varphi\in(-C)^{+i}$,由定义 1 的 4),又有 $\varphi(\bar{y})>0$。这两者矛盾。证毕

定理 4　设 C 具有有界基 Θ,则 $y\in SE(D,C)\Leftrightarrow y\in D,T_D(y)\cap(-C)=\{0\}$。

证明　"$\Rightarrow$"注意到 $0\notin\mathrm{cl}\Theta$ 等价于存在凸的对称的 $V\in N(0)$,使得

$$(-\Theta)\cap2V=\varnothing \quad (4)$$

由条件 $y\in SE(D,C)$ 和定义 2 的 4) 知 $y\in D$,且对上述的 $V\in N(0)$,$\exists U\in N(0)$,使得 $\mathrm{cl\ cone}(D-y)\cap(U-C)\subset V$。由引理 2,这就是

$$T_D(y)\cap(U-C)\subset V \quad (5)$$

不妨假设 $U\subset V$(否则可用 $U\cap V\in N(0)$ 代替 U),则有 $(U-\Theta)\cap V=\varnothing$。若其不然,即 $\exists z\in U-\Theta$,且有 $z\in V$,则 $\exists u\in U\subset V,\exists\theta\in\Theta,\exists v\in V$,满足 $z=u-\theta=v$。注意到 $U\subset V$ 和 V 的对称性与凸性,由此得到 $-\theta=v-u\in V-U\subset V-V=V+V\subset2V$。由此得到 $-\theta\in(-\Theta)\cap2V$,这与(4)式矛盾。由 $\Theta\subset C$ 和(5)式,有 $T_D(y)\cap(U-\Theta)\subset T_D(y)\cap(U-C)\subset V$。将此式两端同时交 $(U-\Theta)$,并使用刚才的结果 $(U-\Theta)\cap V=\varnothing$,有

$$T_D(y)\cap(U-\Theta)\subset V\cap(U-\Theta)=\varnothing \quad (6)$$

因为 $T_D(y)\cap(-C)\subset T_D(y)\cap(-\mathrm{cone}(\Theta-U))$,且 $\{0\}\subset T_D(y)\cap(-C)$,故为证明必要条件 $T_D(y)\cap(-C)=\{0\}$,只需证明 $T_D(y)\cap(-\mathrm{cone}(\Theta-U))$ 不含非零元。若其不然,即存在 $z\in Y\setminus\{0\}$,满足 $z\in T_D(y)$ 且 $z\in-\mathrm{cone}(\Theta-U)$,则由后者知:$\exists t\geqslant0,\exists z'\in\Theta-U,z=-tz'$。由 $z\in Y\setminus\{0\}$ 知:$t>0$ 且 $z'\neq0\in Y$,于是有 $0\neq-z'=\frac{z}{t}\in T_D(y)$。综上,有 $-z'\in T_D(y)\cap(U-\Theta)$,这与(6)式矛盾。

"$\Leftarrow$"设 $y\in D,T_D(y)\cap(-C)=\{0\}$。假设 $y\notin SE(D,C)$,由注 1 知,$\exists V\in N(0)$,$\forall U\in N(0)$,有 $\mathrm{cone}(D-y)\cap(U-C)\not\subset V$。由 $U\in N(0)$ 的任意性,可取固定的有界零邻域 U。在此情况下,取 $z_n\in\mathrm{cone}(D-y)\cap(U/n-C)$,$\forall n\in\mathbf{N}$,但 $z_n\notin V$。由 $z_n\in\mathrm{cone}(D-y)\subset T_D(y)$,再由 $z_n\in U/n-C$ 知,$\exists y_n\in U$,$\exists\lambda_n\geqslant0$,$\exists\theta_n\in\Theta$,使得

$$z_n=y_n/n-\lambda_n\theta_n\in T_D(y) \quad (7)$$

由 Θ 是 C 的有界基,故集合 $\{\theta_n\in\Theta \mid n\in\mathbf{N}\}$ 是局部凸空间 Y 的有界集。因有界集的连续象是有界集,故对任意固定的 $\varphi\in Y^*\setminus\{0\}$,$\{\varphi(\theta_n)\in\mathbf{R} \mid \theta_n\in\Theta,n\in\mathbf{N}\}$ 是有界集,这样一来,实数序列 $\{\varphi(\theta_n)\}$ 存在收敛子序列。不妨假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(\theta)=\varphi(\theta_n)$,于是有 $\theta_n\xrightarrow{w}\theta$。因为 Θ 是局部凸空间 Y 的凸子集,故它的弱闭包 $w-\mathrm{cl}\Theta$ 与它的原闭包 $\mathrm{cl}\Theta$ 相等,从而得到 $\theta\in w-\mathrm{cl}\Theta=\mathrm{cl}\Theta$。因 $0\notin\mathrm{cl}\Theta$,故 $\theta\neq0$,且 $\theta\in\mathrm{cl}\Theta\subset\mathrm{cl\ cone}\Theta=C$。现在证明 $\{1/\lambda_n\}$ 是有界集,否则存在子列 $\{1/\lambda_{n_k}\}$,$1/\lambda_{n_k}\to\infty(k\to\infty)$,因此有 $\lambda_{n_k}\to0(k\to\infty)$。对应地,对于 $\{z_n\}$ 的子列 $\{z_{n_k}\}$,$z_{n_k}=y_{n_k}/n_k-\lambda_{n_k}\theta_{n_k}\to0$。这将导致:对充分大的 k,有 $z_{n_k}\in V$,这同 $\forall n\in\mathbf{N},z_n\notin V$ 矛盾。刚才的收敛式用到 U 和 Θ 有界及文献[11]命题"对于拓扑线性空间 Y 中有界集内的任意序列 $\{y_n\}$,若实(复)数序列 $\{\alpha_n\}$ 满足 $\alpha_n\to0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n y_n=0$"。于是,由(7)式和 $\{1/\lambda_n\}$ 有界,并再次使用文献[11]的命题,有

$$z_n/\lambda_n=(1/n)(1/\lambda_n)y_n-\theta_n\xrightarrow{w}-\theta\in w-\mathrm{cl}T_D(y)=\mathrm{cl}T_D(y)=T_D(y)$$

综上,得到 $0\neq-\theta\in T_D(y)\cap(-C)$,这与条件矛盾。　证毕

定理 5　设 Θ 是 C 的有界基,则 $y\in GE(D,C)\Leftrightarrow y\in D,T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing$。

证明　"$\Rightarrow$"设 $y\in GE(D,C)$,则由定义 2 的 5) 知,$\forall\varphi\in Y^*$,$\exists U,V\in B(0)$,使得实数集 $\varphi(\mathrm{cl\ cone}(D-y)\cap(U-\mathrm{cone}(V+\Theta)))$ 有界。假设 $T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})\neq\varnothing$,则存在 $z_0\in T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})$。由 $T_D(y)$ 和 $(-C)$ 均为非空锥,故 $\forall n\in\mathbf{N}$,有 $nz_0\in T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})$。由 $U,V\in B(0)$ 和 $C=\mathrm{cone}\Theta$ 容易推出

$-C\setminus\{0\}\subset U-\mathrm{cone}(V+\Theta)$:由引理2,得到 $nz_0\in \mathrm{cl\ cone}(D-y)\cap(U-\mathrm{cone}(V+\Theta))$。注意到 $z_0\in -C\setminus\{0\}$,则 $\exists\,\bar\varphi\in Y^*$,使得 $\bar\varphi(z_0)\neq 0$,不妨设 $\bar\varphi(z_0)>0$,于是得到

$$n\bar\varphi(z_0)=\bar\varphi(nz_0)\in\bar\varphi(\mathrm{cl\ cone}(D-y)\cap(U-\mathrm{cone}(V+\Theta)))$$

由此可见,$\bar\varphi(\mathrm{cl\ cone}(D-y)\cap(U-\mathrm{cone}(V+\Theta)))$ 是无界集,这与条件矛盾。因此 $T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing$。

"$\Leftarrow$":由条件 $y\in D$,$T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing$ 和 Θ 是 C 的基,从而有 $\Theta\subset C$,且 $0\notin\Theta$,故 $T_D(y)\cap(-\Theta)\subset T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing$。由此式推出:$\exists\,V_0\in B(0)$,$(T_D(y)+V_0)\cap(-\Theta+V_0)=\varnothing$。不妨将此式中的 V_0 取为对称的,即 $-V_0=V_0$,则此式可改写成

$$(T_D(y)+V_0)\cap(-(\Theta+V_0))=\varnothing \tag{8}$$

现在用反证法证明:$\forall\,\varphi\in Y^*$,$\exists\,U,V\in B(0)$,使得 $\varphi(\mathrm{cone}(D-y)\cap(U-\mathrm{cone}(V+\Theta)))$ 是有界集。再由注1知 $y\in GE(D,C)$,从而完成证明。反证:假设存在 $\bar\varphi\in Y^*$,对任意固定的 $U,V\in B(0)$,实数集 $\bar\varphi(\mathrm{cone}(D-y)\cap(U-\mathrm{cone}(V+\Theta)))$ 无界。于是,存在点列 $\{y_n\}\subset\mathrm{cone}(D-y)\cap(U-\mathrm{cone}(V+\Theta))$,使得 $|\bar\varphi(y_n)|\to\infty$。由 $y_n\in U-\mathrm{cone}(V+\Theta)$ 知,$\exists\,u_n\in U$,使得 $y_n-u_n\in-\mathrm{cone}(V+\Theta)$。注意到 $\mathrm{cone}(V+\Theta)$ 是锥,故

$$\exists\,t_n\geqslant 0,\ t_n(y_n-u_n)\in-(V+\Theta) \tag{9}$$

由 $U,V\in B(0)$ 的任意性,可取 $U=V$,且可要求它们还是对称有界零邻域基中的基元。从而 $-(V+\Theta)$ 是 Y 中的有界集。在拓扑向量空间中,有界集的连续象是有界集,因此,$\bar\varphi(V+\Theta)$ 是有界集,于是由(9)式知,$\bar\varphi(t_n(y_n-u_n))=t_n(\bar\varphi(y_n)-\bar\varphi(u_n))$ 的全体是 $\mathbf{R}$ 中的有界集。换言之,

$$\exists\,M>0,\ t_n\,|\bar\varphi(y_n)-\bar\varphi(u_n)|\leqslant M \tag{10}$$

因为 $u_n\in U$,U 是有界集,故 $\bar\varphi(u_n)$ 的全体是有界集。综上有

$$|\bar\varphi(y_n)-\bar\varphi(u_n)|\geqslant|\bar\varphi(y_n)|-|\bar\varphi(u_n)|\to\infty\ (\text{当}\ n\to\infty)$$

由此和(10)式知,(9)式中的 $t_n\downarrow 0$。因此对于充分大的 $n\in\mathbf{N}$,总有 $0\leqslant t_n\leqslant 1$。由此推出 $-t_nu_n\in-t_nU\subset-U=-V=V$,从而有 $t_n(y_n-u_n)=t_ny_n-t_nu_n\in\mathrm{cone}(D-y)+V$。据此和(9)式立刻有 $(\mathrm{cone}(D-y)+V)\cap(-(V+\Theta))\neq\varnothing$,更有 $(T_D(y)+V)\cap(-(V+\Theta))\neq\varnothing$。由 $V\in B(0)$ 的取法看到,这同(8)式矛盾。 证毕

先给出下面的关于基 Θ 的严有效点的锥刻画结果,然后由此得到关于锥 C 的严有效点的锥刻画结果。

定理6 设 Θ 是 C 的有界基,则 $y\in FE(D,\Theta)\Leftrightarrow y\in D$,$T_D(y)\cap(-C)=\{0\}$。

证明 "$\Rightarrow$"设 $y\in FE(D,\Theta)$,则由定义2的6)知,$y\in D$,且 $\exists\,U\in N(0)$,$\mathrm{cl\ cone}(D-y)\cap(U-\Theta)=\varnothing$。由引理2,这又等价于

$$\exists\,U\in N(0),\ T_D(y)\cap(U-\Theta)=\varnothing \tag{11}$$

据此可以证明 $T_D(y)\cap(-\mathrm{cone}(\Theta-U))=\{0\}$。反证:假设存在非零的 $z\in T_D(y)\cap(-\mathrm{cone}(\Theta-U))$,则由 $z\in-\mathrm{cone}(\Theta-U)$ 知,$\exists\,t\geqslant 0$,$\exists\,z'\in U-\Theta$,使得 $z=tz'$。因 $z\neq 0$,故只有 $t>0$。于是 $0\neq z'=z/t\in T_D(y)$,因此 $z'\in T_D(y)\cap(U-\Theta)$,这与(11)式矛盾。最后,由刚才的结果和 $0\in-C\subset-\mathrm{cone}(\Theta-u)$,有 $\{0\}\subset T_D(y)\cap(-C)\subset T_D(y)\cap(-\mathrm{cone}(\Theta-U))=\{0\}$。此即 $T_D(y)\cap(-C)=\{0\}$。

"$\Leftarrow$"设 $y\in D$,$T_D(y)\cap(-C)=\{0\}$。假设 $y\notin FE(D,\Theta)$,由定义2的6)知,$\forall\,U\in N(0)$,$\mathrm{cl\ cone}(D-y)\cap(U-\Theta)\neq\varnothing$。由引理2,这等价于 $\forall\,U\in N(0)$,$T_D(y)\cap(U-\Theta)\neq\varnothing$。由 $U\in N(0)$ 的任意性,可取固定的有界零邻域 U。在此情况下,取 $d_n\in T_D(y)\cap(U/n-\Theta)$,$n\in\mathbf{N}$。这表明,$\exists\,y_n\in U$,$\exists\,\theta_n\in\Theta$,满足

$$d_n=y_n/n-\theta_n\in T_D(y) \tag{12}$$

由 Θ 是 C 的有界基,故集合 $\{\theta_n\in\Theta:n\in\mathbf{N}\}$ 是局部凸空间 Y 的有界集。因有界集的连续象是有界集,故对任意固定的 $\varphi\in Y^*$,实数集 $\{\varphi(\theta_n)\in\mathbf{R}:\theta_n\in\Theta,n\in\mathbf{N}\}$ 有界。于是,实数序列 $\{\varphi(\theta_n)\}$ 存在收敛子序列。不妨假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(\theta_n)=\varphi(\theta)$,于是有 $\theta_n\xrightarrow{w}\theta$。同定理4证明中的理由,这表明 $\theta\in\mathrm{cl}\Theta$。因 $0\notin\mathrm{cl}\Theta$,故 $\theta\neq 0$,且 $\theta\in\mathrm{cl}\Theta\subset\mathrm{cl\ cone}\Theta=C$。对拓扑线性空间的有界集中的任意序列 $\{y_n\}$,必有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n/n=0$。注意到 $U\in N(0)$ 有界,由(12)式和上一步的结论,立刻有 $d_n\xrightarrow{w}-\theta\in\mathrm{cl}T_D(y)=T_D(y)$。综上,得到 $0\neq-\theta\in T_D(y)\cap(-C)$,这与条件矛盾。 证毕

引理3　设 $D\subset Y$，Θ 是 C 的任一有界基，则有 $FE(D,C)=FE(D,\Theta)$。

证明　在文献[12]的定理2.1中令 $\varepsilon=0$ 即可。　证毕

注2　实际上，当空间 Y 是赋范空间时，引理3就是文献[6]的引理2。

现在，由定理6，并借助于引理3，很轻易地得到关于锥 C 的严有效点的锥刻画结果。

推论1　设 Θ 是 C 的有界基，则 $y\in FE(D,C)\Leftrightarrow y\in D$，$T_D(y)\cap(-C)=\{0\}$。

证明　由 Θ 是有界的，则由引理3可以得到 $FE(D,C)=FE(D,\Theta)$，再由定理6知命题成立。　证毕

注3　由文献[13]知，在拓扑线性空间 Y 中，紧集必是有界集，以及 $T_D(y)\cap(-C)=\{0\}$ 等价于 $T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing$，则使用得到的结果知：当锥 C 存在紧基 Θ 时，如下等式成立

$$PE(D,C)=FE(D,\Theta)=FE(D,C)=SE(D,C)=GE(D,C)$$

而当锥 C 存在有界基 Θ 时，只有 $FE(D,\Theta)=FE(D,C)=SE(D,C)=GE(D,C)$。

由此可见，Benson 真有效点的存在性条件要比严有效点、强有效点和超有效点的存在性条件都强。

现在用法向锥刻画凸集 D 的 Benson 真有效点和强有效点。

定理7　设 C 是具有局部紧基的闭凸点锥，则 $y=PE(D,C)\Leftrightarrow y\in D$，$N_D(y)\cap C^{-i}\neq\varnothing$。

证明　“$\Rightarrow$”设 $y\in PE(D,C)$。由 C 具有局部紧基以及定理3知，$T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing$。由 $0\in -C$，这等价于 $T_D(y)\cap(-C)=\{0\}$。注意到 $T_D(y)$ 为闭凸锥；又由 C 为闭凸点锥且具有局部紧基知 $-C$ 也是这样。故由引理1有 $(T_D(y))^-\cap(-C)^{+i}\neq\varnothing$。由定义3的2)及 $(-C)^{+i}=C^{-i}$，这等价于 $N_D(y)\cap C^{-i}\neq\varnothing$。

“$\Leftarrow$”设 $y\in D$ 且 $N_D(y)\cap(-C)^{+i}\neq\varnothing$。任取 $\varphi\in N_D(y)\cap(-C)^{+i}$。若能证明 $T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing$，则由定理3得到 $y\in PE(D,C)$，于是完成证明。反证：假设 $T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})\neq\varnothing$，取 $z\in T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})$。由 $\varphi\in N_D(y)$ 和 $z\in T_D(y)$ 及定义3的2)知，$\varphi(z)\leqslant 0$。又由 $\varphi\in C^{-i}=(-C)^{+i}$、$z\in -D\setminus\{0\}$ 和定义1的4)知，$\varphi(z)>0$，这与刚才的不等式矛盾。故 $T_D(y)\cap(-C\setminus\{0\})=\varnothing$。　证毕

定理8　设 C 具有有界基，则 $y\in GE(D,C)\Leftrightarrow y\in D$，$N_D(y)\cap\mathrm{int}\ C^-\neq\varnothing$。

证明　由文献[5]知，$y\in GE(D,C)\Leftrightarrow(\mathrm{cl\ cone}(D-y))^+\cap\Theta^{st}\neq\varnothing$。由引理2和命题1的2)，等价关系的右端可化为 $(T_D(y))^+\cap\mathrm{int}(C^+)\neq\varnothing$。注意到 $N_D(y)=(T_D(y))^-$，并经一些简单的变换就可得到本定理的结论。　证毕

3 结论

本文在一般向量优化问题的目标空间中展开讨论。首先，笔者用切向锥 $T_D(y)$ 与负序锥 $-C$ 或 $C\setminus\{0\}$ 间的位置关系式来给出 y 是 D 的 Benson 真有效点（超有效点、强有效点和两种严有效点）的充分必要条件；利用这些结果，得到了这几种真有效点概念等价的一个充分条件。然后，在对偶空间中，用法向锥 $N_D(y)$ 与 C^{-i} 或 $-\mathrm{int}(C^-)$ 间的位置关系式来给出 y 是 D 的 Benson 真有效点（强有效点）的充分必要条件。所有这些结果都可以方便地应用到各类向量优化问题的最优性条件的研究中。本文是研究工作的第一部分成果，其余的工作将陆续呈献出来。

参考文献：

[1] Kaisa M，Marko M M. On cone characterizations of weak、proper and pareto optimality in multiobjective optimization[J]. Mathematical Methods of Operations Research，2001，53(2)：233-245.

[2] 黄龙光，刘三阳. 有效点、弱有效点和真有效点的锥刻画[J]. 系统科学与数学，2003，23(4)：452-460.

[3] 李月鲜，戊卫东. 向量优化问题最优性条件的锥刻画[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版)，2008，39(5)：503-507.

[4] 胡毓达. 多目标规划有效性理论[M]. 上海：上海科学技术出版社，1994.

[5] Cheng Y H，Fu W T. Strong efficiency in a locally concex space[J]. Math Meth Oper Res，1999，50：373-384.

[6] 傅万涛. 赋范线性空间集合的严有效点[J]. 系统科学与数学，1997，17(4)：324-329.

[7] 武育楠，戊卫东. 集值向量优化问题的严有效性[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版)，1999，30(5)：546-550.

[8] Zheng X Y. Proper efficiency in locally convex topological vector spaces[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997, 94: 469-486.

[9] Borwein J M. Proper efficient points for maximization with respect to cones [J]. Journal on Control and Optimization, 1977, 15: 57-63.

[10] Borwein J M, Zhuang D M. Super efficiency in convex vector optimization[J]. ZOR, 1991, 35(3): 175-184.

[11] 徐登洲. 拓扑线性空间[M]. 兰州:兰州大学出版社, 1987.

[12] 赵春英, 戎卫东. 强(严)有效点集的标量化[C]. 袁亚湘. 中国运筹学会第八届学术交流会论文集. Hong Kong: Globallink Informatics Limited, 2006, 220-225.

[13] 史树中. 凸分析[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1990.

Operations Research and Cybernetics

Cone Characterizations Some Proper Efficient Points

RONG Wei-dong, TONG Zheng-da

(School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

Abstract: In the paper we study cone characterizations in some kinds of properly efficient points in the objective space of general vector optimization problem. Suppose that Y is a partially ordered Hausdorff locally convex topological vector space, C is an ordered cone of the space Y, D is a convex subset in Y, and a point $y \in D$. First we give a necessary and sufficient condition that y is the Benson properly efficient point (super efficient point, strong efficient point and two kinds of strict efficient points) of D described by the formulation between the tangent cone $T_D(y)$ and the negative ordered cone $-C$ or $-C \setminus \{0\}$. Using these results, we obtain the sufficient condition that these concepts of properly efficient points are equivalent. Then we give a necessary and sufficient condition that is the Benson properly efficient point (strong efficient point) of D described by the formulation between the normal cone $N_D(y)$ and the cone C^{-i} or $-\mathrm{int}(C^-)$ in the topological dual space Y^*.

Key words: operational research; vector optimization problem; proper efficient point; cone characterization

(责任编辑 黄 颖)