DOI :10. 3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 03. 012

L-fuzzy 拓扑空间的相对近似 PS 紧性*

何 卫 民
(五邑大学 数学物理系,广东 江门 529020)

摘要 :本文在 LF 拓扑空间中引入了一种新的相对紧性—相对近似 PS 紧性,给出了相对近似 PS 紧性的 α-网、r-PS 覆盖、r-有限交性质等多种刻画。探讨了相对近似 PS 紧性和近似 PS 紧性之间的关系,即 :近似 PS 紧性蕴含相对近似 PS 紧性 ;近似 PS 紧空间中的每个 LF 集是相对近似 PS 紧的。相对近似 PS 紧性还具有以下的性质 :任两个相对近似 PS 紧集的并是相对近似 PS 紧 ;任一族相对近似 PS 紧集的交是相对近似 PS 紧的。最后,证明了相对近似 PS 紧性在 PS 连续映射下保持不变。由于相对近似 PS 紧性是针对任意 LF 子集来定义的,且保持了一般拓扑空间中紧性的许多好的性质,所以是紧性理论的一种较为理想的推广。

关键词 :LF 拓扑空间 ;相对近似 PS 紧性 ;准半闭集 ;PS 远域
中图分类号 :O189. 1 **文献标识码** :A **文章编号** :1672-6693(2010)03-0048-04

Chang 在文献[1]中首次引入了 Fuzzy 拓扑空间的概念,并把一般拓扑学中的诸如开集、闭集、邻域、内部、闭包、连续性以及紧性等基本概念推广到了 Fuzzy 拓扑空间中去。由于上述概念是模仿一般拓扑学中的相应概念来定义的,加之尚未触及 Fuzzy 拓扑空间的层次结构,所以许多一般拓扑学中的定理都被顺利地推广到了 Fuzzy 拓扑空间。然而,随着研究的深入,人们很快就发现,文献[1]中所说的“严格仿照 Kelley 的一般拓扑学中给出的定义、定理和证明去作”往往是行不通的,比如,文献[1]中关于紧性的定义就是失败的,因为它与 T_1 分离性相矛盾。直到 1977 年刘应明教授在 Fuzzy 拓扑空间中引入“重域”概念后,才克服了以邻域为工具时所造成的种种弊端,使 Fuzzy 拓扑学的研究发生了根本变化,而后来王国俊教授引入的“远域”概念,进一步导致了更广泛的拓扑分子格理论的产生,从而把 Fuzzy 拓扑学纳入了拓扑格范畴。于是基于“远域”这一工具的各种紧性[2,3-9]分别被引入。文献[3]定义了一种紧性,称为近似 PS 紧性,本文则在 LF 拓扑空间中引入了相对近似 PS 紧性,讨论了相对近似 PS 紧性的性质,证明了相对近似 PS 紧性在 PS 连续映射下是不变的,取得了较完整的结果。

1 预备知识

本文沿用文献[2]和[3]的术语和记号,如 L 表示具有逆合对应的完全分配格,简称 F 格,$M(L)$、$M^*(L^X)$ 分别表示 L、L^X 中的全部分子之集。$PSO(L^X)$,$PSC(L^X)$ 分别表示 LF 拓扑空间 (L^X,δ) 的全体准半开集和全体准半闭集的集合。

定义 1[10] 设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间,$A\in L^X$ 称为

1) 准半开集当且仅当 $A\leqslant(A^-)_o$;2) 准半闭集当且仅当 $A\geqslant(A^o)_-$。

这里,A^o,A^-,A_o 和 A_- 分别表示 A 的内部,闭包,半内部和半闭包。

定义 2[4] 设 (L^x,δ) 是 LF 拓扑空间,$x_\lambda\in M^*(L^X)$,$A\in PSC(L^X)$ 称为 x_λ 的一个准半闭远域,或 PS 远域,如果 $x_\lambda\notin A$。x_λ 的全体准半闭远域的集合记为 $\zeta(x_\lambda)$。

定义 3[4] 设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间,$A\in L^X$,$\alpha\in M(L)$,$\Phi\subset PSC(L^X)$。如果对于 A 中的任 x_λ,$\exists B\in\Phi$,使得 $B\in\zeta(x_\lambda)$,则称 Φ 为 A 的 α-PS 远域族。如果 $\exists r\in\beta^*(\alpha)$ 使 Φ 是 A 的 r-PS 远域族,则称 Φ 为 A 的 α^--

* 收稿日期 :2009-07-05 修回日期 :2009-11-17
资助项目 :广东省自然科学基金资助项目(No. 8152902001000004);江门市科技计划(2008[103])
作者简介 :何卫民,男,讲师,研究方向为格上拓扑学、Domain 理论。

PS 远域族。

定义 4[3]　设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间,$A\in L^X$,$\alpha\in M(L)$。如果对于 A 的任一 α-PS 远域族 Φ,Φ 有有限子族 Ψ,使 Ψ 成为 A 的 α-PS 远域族,则称 A 为近似 PS 紧集,简称 NPS 紧集。特别地,当 $A=1_X$ 是 NPS 紧集时,称 (L^x,δ) 为 NPS 紧空间。

2 相对近似 PS 紧性及其刻画

定义 5　设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间,$A\in L^X$ $\alpha\in M(L)$。如果对于 (L^X,δ) 中的任一 α-PS 远域族 Φ,Φ 有有限子族 Ψ,使 Ψ 成为 A 的 α-PS 远域族,则称 A 为 (L^X,δ) 中的相对近似 PS 紧集,简称相对 NPS 紧集。特别地,当 $A=\chi_Y(Y\subset X)$ 时,称子空间 $(L^Y,\delta\mid Y)$ 为 (L^X,δ) 中的相对近似 PS 紧子空间。

推论 1　设 (L^x,δ) 是 LF 拓扑空间,$A\in L^X$,则有

1) 若 A 为 (L^X,δ) 中的 NPS 紧集,则 A 为 (L^X,δ) 中的相对 NPS 紧集;

2) 若 (L^X,δ) 为 NPS 紧空间,则 A 为 (L^X,δ) 中的相对 NPS 紧集,特别地,$(L^Y,\delta\mid Y)$ 为 (L^X,δ) 中的相对近似 PS 紧空间。

证明　1) 设 Φ 为 (L^X,δ) 中任一 α-PS 远域族,则 Φ 也是 A 的 α-PS 远域族,因为 A 为 NPS 紧集,所以 Φ 有有限子族 Ψ,使 Ψ 成为 A 的 α-PS 远域族,由定义 5 知,A 为 (L^X,δ) 中的相对 NPS 紧集。

2) 设 Φ 为 (L^X,δ) 中任一 α-PS 远域族,因为 (L^X,δ) 为 NPS 紧空间,所以存在有限子族 $\Psi\subset\Phi$,使 Ψ 为 1_X 的 α-PS 远域族。由于 $A\leqslant 1_X$,所以 Ψ 也是 A 的 α-PS 远域族。从而 A 为 (L^X,δ) 中的相对 NPS 紧集。令 $A=\chi_Y$,即可得 $(L^Y,\delta\mid Y)$ 为 (L^X,δ) 中的相对 NPS 紧空间。　证毕

定义 6[3]　设 D 是定向集,X 是非空集,则称映射 $S:D\to M^*(L^X)$ 为 L^X 中的网,记为 $S=\{S(n),n\in D\}$。设 A 是 LF 集,若 $\forall n=D$,$S(n)\in A$,则称 S 为 A 中的网。设 $\alpha\in M(L)$,如果 $\forall n\in D$,$V(S(n))$ 等于同一常值 α,则称 S 为常值 α-网,这里 $V(S(n))$ 为分子 $S(n)$ 的高度。

定义 7[4]　设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间,$S=\{S(n),n\in D\}$ 是分子网,$x_\lambda\in M^*(L^X)$。如果对于 $\forall P\in\zeta(x_\lambda)$,$S$ 经常不在 P 中,则称 x_λ 为 S 的一个 PS 聚点。

定理 1　设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间,$A\in L^X$,$\alpha\in M(L)$。则 A 是 (L^X,δ) 中的相对 NPS 紧集当且仅当 A 中的每个常值 α-网在 (L^X,δ) 中都有一个高为 α 的 PS 聚点。

证明　1) 必要性。设 $S=\{x(n)_\alpha,n\in D\}$ 是 A 中的常值 α-网。如果 S 在 (L^X,δ) 中没有高度为 α 的 PS 聚点,则 $\forall y_\alpha\in(L^X,\delta)$,有 $P_y\in\zeta(y_\alpha)$,使 S 最终在 P_y 中。令 $\Phi=\{P_y\mid y\in X\}$,则 Φ 为 (L^X,δ) 的 α-PS 远域族,设 $\Psi=\{P_{y_i}\mid 1\leqslant i\leqslant k,P_{y_i}\in\Phi\}$ 为 Φ 的任一有限子族,由于 $\forall 1\leqslant i\leqslant k$,$S$ 最终在 P_{y_i} 中,从而 $\exists n_i\in D$,当 $n\geqslant n_i$ 时,有 $(x(n))_\alpha\leqslant P_{y_i}$。因为 D 是定向集,所以存在 $n_0\in D$,使得 $n_0\geqslant n_i(i=1,2,\cdots,k)$,当 $n\geqslant n_0$ 时

$$(x(n))_\alpha\leqslant P(y_1)\wedge\cdots\wedge P(y_k)$$

任取一个使上式成立的 $(x(n))_\alpha$,则 Ψ 中没有 $(x(n))_\alpha$ 的 PS 远域,即 Ψ 不是 A 的 α-PS 远域族,所以 A 不是 (L^X,δ) 中的相对 NPS 紧集,必要性得证。

2) 充分性。设 A 不是 (L^X,δ) 中的相对 NPS 紧集,则存在 (L^X,δ) 中的一个 α-PS 远域族 Φ,使得 $\forall\Psi\in 2^{(\Phi)}$(这里 $2^{(\Phi)}$ 是 Φ 的所有有限子族组成的集合),Ψ 不是 A 的 α-PS 远域族,因此 A 中有一高度为 α 的分子 $x_\alpha\leqslant\wedge\Psi$。记 x_α 为 $(x(\Psi))_\alpha$,因为 $2^{(\Phi)}$ 按包含关系成为一定向集,所以 $S=\{(x(\Psi))_\alpha,\Psi\in 2^{(\Phi)}\}$ 是 A 中的分子网,它显然是常值 α-网,再设 y_α 是 L^X 中任一高度为 α 的分子,因为 Φ 是 (L^X,δ) 中的 α-PS 远域族,所以有 $P\in\Phi$ 使 $P\in\zeta(y_\alpha)$,这时 $\forall\Psi\in 2^{(\Phi)}$,只要 $\Psi\geqslant\{P\}$(即 $P\in\Psi$),就有 $(x(\Psi))_\alpha\leqslant\wedge\Psi\leqslant P$。即网 S 最终在 P 中,所以 y_α 不是 S 的聚点,由 y_α 的任意性知 S 在 (L^X,δ) 中无高度为 α 的聚点。充分性得证。　证毕

定义 8[3]　设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间,$A\in L^X$,r 是异于 1 的素元,$\mu\subset PSO(L^X)$。如果对于 $\forall x\in\varepsilon_{r'}(A)=\{x\in X\mid A(x)\geqslant r'\}$,存在 $V\in\mu$ 使得 $V(x)\not\leqslant r$,则称 μ 是 A 的 r-PS 覆盖。

定理 2　设 (L^X,δ) 是 LF 拓扑空间,$A\in L^X$,r 是异于 1 的素元,则 A 是相对 NPS 紧集当且仅当 (L^X,δ) 的任一 r-PS 覆盖 μ,都有有限子族 $v\subset\mu$,使 v 构成 A 的 r-PS 覆盖。

证明 设A是相对NPS紧集,μ是(L^X,δ)的任一r-PS覆盖。令$\Phi=\mu'$,则$\Phi\subset PSC(L^X)$,$\forall x\in\varepsilon_{r'}(1_X)=X$,存在$Q=V'\in\Phi$,使得$V(x)\not\leqslant r$,即$r'\not\leqslant V'(x)=Q(x)$,由$r$是异于1的素元知$r'\in M(L)$,从而$Q\in\zeta(x_{r'})$。这说明$\Phi$是$(L^X,\delta)$的$r'$-$PS$远域族,因此$\mu$中有有限子族$v$,使得$\Psi=v'$是$A$的$r'$-$PS$远域族,所以$\forall x\in\varepsilon_{r'}(A)$,存在$V'\in\Psi=v'$使得$V'\in\zeta(x_{r'})$,即$x_{r'}\not\leqslant V'$或$r'\not\leqslant V'(x)$,等价的说法就是$\forall x\in\varepsilon_{r'}(A)$,存在$V\in v$使得$V(x)\not\leqslant r$。故$\mu$中有有限子族$v$成为$A$的$r$-$PS$覆盖。

反过来,设(L^X,δ)的任一r-PS覆盖μ,都有有限子族$v\subset\mu$构成A的r-PS覆盖。Φ是(L^X,δ)的任一α-PS远域族($\alpha\in M(L)$),令$\mu=\Phi'$,$r=\alpha'$,由α是分子知r是异于1的素元。容易证明μ是(L^X,δ)的r-PS覆盖,从而μ有有限子族v成为A的r-PS覆盖。即$\forall x\in\varepsilon_{r'}(A)$,存在$V\in v$使$V(x)\not\leqslant r$或$V'(x)\not\geqslant r'=\alpha$,这等价于说,$\forall x_\alpha\in A$,存在$P=V'\in v'$使得$P(x)\not\geqslant\alpha$,从而$x_\alpha\not\leqslant P$,即$P\in\zeta(x_\alpha)$。令$\Psi=v'$,则$\Psi$是$\Phi$的有限子族,且$\Psi$是$A$的$\alpha$-$PS$远域族,即$A$是相对$NPS$紧集。 证毕

定义9[3] 设(L^X,δ)是LF拓扑空间,$A\in L^X$,r是异于1的素元,$\mu\subset L^X$,若μ的每个有限子族v,存在$x\in\varepsilon_{r'}(A)$使得$(\wedge v)(x)\geqslant r'$,则称$\mu$在$A$中具有$r$-有限交性质。特别地,当$A=1_X$时,称$\mu$在$(L^X,\delta)$中具有$r$-有限交性质。

定理3 设(L^X,δ)是LF拓扑空间,$A\in L^X$,r是异于1的素元,则A是相对NPS紧集当且仅当每个在A中具有r-有限交性质的$\mu\subset PSC(L^X)$,存在$x\in X$使得$(\wedge\mu)(x)\geqslant r'$。

证明 设A是相对NPS紧集,如果存在一个在A中具有r-有限交性质的$\mu\subset PSC(L^X)$,使得$\forall x\in X$,$(\wedge\mu)(x)\not\geqslant r'$,则有$(\vee\mu')(x)\not\leqslant r$。从而$\exists B\in\mu$,使$B'(x)\not\leqslant r$,这说明$\mu'$是$(L^X,\delta)$的$r$-$PS$覆盖,由定理2知,存在$\mu$的一个有限子族$v=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$,使得$v'$是$A$的$r$-$PS$覆盖。因此对$\forall x\in\varepsilon_{r'}(A)$,存在$B_i\in v$使得$B'_i(x)\not\leqslant r$,从而$(\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}}B'_i)(x)\not\leqslant r$,这等价于$(\wedge v)(x)\not\geqslant r'$,与$\mu$在$A$中具有$r$-有限交性质矛盾。

反过来,μ是(L^X,δ)的r-PS覆盖,如果μ的任一有限子族v都不是A的r-PS覆盖,则$\exists x\in\varepsilon_{r'}(A)$,使得$\forall B\in v$,有$B(x)\leqslant r$,从而$(\vee v)(x)\leqslant r$或$(\wedge v')(x)\geqslant r'$,这说明$\mu'\subset PSC(L^X)$在$A$中具有$r$-有限交性质。因此存在$x\in X$使得$(\wedge\mu')(x)\geqslant r'$,于是$(\vee\mu)(x)\leqslant r$,所以$\mu$不是$(L^X,\delta)$的$r$-$PS$覆盖。

3 相对NPS紧性的其他性质

定理4 设(L^X,δ)是LF拓扑空间,$A,B,A_t\in L^X$,则有:

1) 如果A是(L^X,δ)中的相对NPS紧集,则$A\wedge B$也是相对NPS紧集;

2) 如果$A_t(\forall t\in T)$是(L^X,δ)中的相对NPS紧集,则$A_i\vee A_j(i,j\in T)$以及$\underset{t\in T}{\wedge}A_t$也是相对$NPS$紧集。

证明 1) 设$S=\{(x(n))_\alpha,n\in D\}$是$A\wedge B$中的一个常值$\alpha$-网,则$S$也是$A$中的常值$\alpha$-网,因为$A$是$(L^X,\delta)$中的相对$NPS$紧集,由定理1知$S$在$(L^X,\delta)$中有一个高为$\alpha$的$PS$聚点,从而$A\wedge B$是$(L^X,\delta)$中的相对$NPS$紧集。

2) 设$\Phi\subset PSC(L^X)$是(L^X,δ)的任一α-PS远域族,$\alpha\in M(L)$,因为A_i,A_j是(L^X,δ)的相对NPS紧集,所以Φ中有有限子族Ψ_1和Ψ_2,分别是A_i,A_j的α-PS远域族,令$\Psi=\Psi_1\cup\Psi_2$,对于$\forall x_\alpha\in(A_i\vee A_j)$,由于$x_\alpha$为分子,从而有$x_\alpha\in A_i$或$x_\alpha\in A_j$,因此必有$P\in\Psi_1$或$P\in\Psi_2$使得$P\in\zeta(x_\alpha)$,也即$\exists P\in\Psi_1\cup\Psi_2$使得$P\in\zeta(x_\alpha)$,所以$\Psi$是$A_i\vee A_j$的$\alpha$-$PS$远域族。$\Psi$显然是有限的,所以$A_i\vee A_j$是$(L^X,\delta)$中的相对$NPS$紧集。后一结论的证明与1)类似。 证毕

定理5 设(L^X,δ)是LF拓扑空间,$A\in L^X$,若A的承集为有限集,则A为(L^X,δ)中的相对NPS紧集。

证明 由文献[5]的定理4.4知A为NPS紧集,再由本文推论1知结论成立。 证毕

定义10[5] 设(L^X,δ)和(L^Y,τ)是两个LF拓扑空间,$f:(L^X,\delta)\to(L^Y,\tau)$是序同态,如果对于$\forall B\in PSO(L^Y)$,有$f^{-1}(B)\in PSO(L^X)$,称$f$是$PS$连续的。

定理6 设(L^X,δ)和(L^Z,μ)是两个LF拓扑空间,$F:(L^X,\delta)\to(L^Z,\mu)$是由$f:X\to Z$诱导的$L$值Zadeh型函数,若$F$是$PS$连续的,$(L^Y,\delta|Y)$是$(L^X,\delta)$中的相对$NPS$紧子空间,则$(L^{f(Y)},\mu|f(Y))$是$(L^Z,\mu)$中相对$NPS$紧子空间。

证明　由定义 5 知，只需证明当 $\chi_Y(Y\subset X)$ 为 (L^X,δ) 中相对 NPS 集时，$F(\chi_Y)=\chi_{f(Y)}$ 为 (L^Z,μ) 中相对 NPS 集。设 Φ 是 (L^Z,μ) 中 α-PS 的远域族 $(\alpha\in M(L))$。对于 L^X 中的任一分子 x_α，$F(x_\alpha)=(f(x))_\alpha$ 是 (L^Z,μ) 中高度为 α 的分子，所以 Φ 中存在 P，使 $(f(x))_\alpha\not\leqslant P$，从而有 $\alpha\not\leqslant P(f(x))=F^{-1}(P)(x)$。因为 F 是 PS 连续的，由 $P\in PSC(L^Z)$ 知 $F^{-1}(P)\in PSC(L^X)$，可见 $F^{-1}(P)\in\zeta(x_\alpha)$，这说明 $F^{-1}(\Phi)$ 是 (L^X,δ) 中的 α-PS 远域族。若 χ_Y 是 (L^X,δ) 中的相对 NPS 紧集，则 Φ 有有限子族 $\Psi=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，使 $F^{-1}(\Psi)=\{F^{-1}(P_i),i=1,2,\cdots,n\}$ 是 χ_Y 的 α-PS 远域族。以下证明 Ψ 是 $F(\chi_Y)$ 的 α-PS 远域族，为此只须证明

$$\forall z_\alpha\leqslant F(\chi_Y),z_\alpha\not\leqslant\bigwedge_{i=1}^{n}P_i \tag{1}$$

事实上，由于 $F^{-1}(\Psi)$ 是 χ_Y 的 α-PS 远域族，从而有

$$\forall x_\alpha\leqslant\chi_Y,x_\alpha\not\leqslant\bigwedge_{i=1}^{n}F^{-1}(P_i) \tag{2}$$

现假设(1)式不成立，即 $\exists z_\alpha\leqslant F(\chi_Y)=\chi_{f(Y)}$，使 $z_\alpha\leqslant\bigwedge_{i=1}^{n}P_i$。显然 $z\in f(Y)$，从而 $\exists x\in Y$ 使 $z=f(x)$，此时 $F(x_\alpha)=(f(x))_\alpha=z_\alpha\leqslant\bigwedge_{i=1}^{n}P_i$，从而 $x_\alpha\leqslant F^{-1}(\bigwedge_{i=1}^{n}P_i)=\bigwedge_{i=1}^{n}F^{-1}(P_i)$。由于 $x_\alpha\leqslant\chi_Y$，上式与(2)式矛盾，所以(1)式成立。进而证明了 $F(\chi_Y)$ 是 (L^Z,μ) 中相对 NPS 紧集。　证毕

参考文献：

[1] Chang C L. Fuzzy topological spaces[J]. JMAA,1968(24):182-190.

[2] 王国俊. *L*-fuzzy 拓扑空间论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,1998.

[3] Bai S Z,Wang W L. Fuzzy non-continuous mappings and fuzzy pre-semi-separation axioms[J]. Fuzzy Sets Syst,1998(94):261-268.

[4] Bai S Z. Near *PS*-compactness *L*-subsets[J]. Information Sciences,2003(155):111-118.

[5] Bai S Z. *L*-fuzzy *PS*-compactness[J]. International Journal of Uncertainty,Fuzziness and Knowledge Based Systems,2002(2):201-209.

[6] 蒲义书,陈水利. *L*-Fuzzy 拓扑空间中的可数 *F* 紧性与几乎可数 *F* 紧性[J]. 纯粹数学与应用数学,1993(2):47-52.

[7] Zhao D S. The *N*-compactness in *L*-fuzzy topological spaces[J]. J Math Anal Appl,1987(128):64-79.

[8] Liu Y M,Luo M K. Fuzzy topology[M]. Singapore:World Science Publishers,1997.

[9] 马保国,王延军,姜金平. *L*-拓扑空间中的 *p*-良紧性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(4):10-14.

[10] Bai S Z. Fuzzy pre-semiopen sets and fuzzy pre-semicontinuity[J]. Prc ICIS,92,1992(918):312-320.

Relative Near *PS*-Compact *L*-subsets

HE Wei-min

(Dept. of Mathematics,Wuyi University, Jiangmen Guangdong 529020, China)

Abstract: In this paper the new concept of relative near *PS*-compactness in *L*-fuzzy topological spaces is introduced. The relative near *PS*-compactness is described with α-net, *r-ps*-cover, *r*-finite intersection property. The relationship between relative near *PS*-compactness and near *PS*-compactness is investigated. It is found that near *PS*-compactness implies relative near *PS*-compactness and every *LF*-set of near *PS*-compact space is relative near *PS*-compact. The relative near *PS*-compactness possess the following properties: the union of two arbitrary relative near *PS*-compact sets is relative near *PS*-compact; the intersection of a family relative near *PS*-compact sets is also relative near *PS*-compact. Finally, it is proved that the relative near *PS*-compactness is invariant under the *PS*-continuous maps. This relative near *PS*-compactness is defined for arbitrary *L*-fuzzy subsets, and it preserves many good properties of compactness in general topological spaces.

Key words: *L*-fuzzy topological spaces; fuzzy lattice; pre-semiclosed; remote-neighborhood; relative near *PS*-compactness

(责任编辑　游中胜)