DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 03. 014

广义酉矩阵与广义 Hermite 矩阵的一些性质*

程 静,何承源
(西华大学 数学与计算机学院,成都 610039)

摘要:主要研究两类重要的、具有特殊性质的矩阵——广义酉矩阵和广义 Hermite 矩阵。对广义酉矩阵和广义 Hermite 矩阵的性质进行了推广,得到几种新的判别广义酉矩阵和广义 Hermite 矩阵的判别条件:若 $A \in C_n^n$ 相似于一个酉矩阵 U,则 A 是 n 阶 P-广义酉矩阵;已知 A 可对角化,则 A 为 n 阶 P-广义酉矩阵的充分必要条件是 A 相似于一个酉矩阵;若 A 为广义 P-酉矩阵,则 A 是广义 P^*-酉矩阵;若 A 为实矩阵,则 A 为广义 Hermite 矩阵;若 A 为 n 阶广义 P-Hermite 矩阵,则 A 为 n 阶广义 P^*-Hermite 矩阵。给出了广义酉矩阵的特征值:如果 $\lambda \neq 0$ 是 A 的特征值,那么 $1/\lambda$ 是 A^* 的特征值;当 A 为实矩阵时,$1/\lambda$ 也是 A 的特征值。

关键词:广义酉矩阵;广义 Hermite 矩阵;性质;条件

中图分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2010)03-0058-02

1 引言及符号

酉矩阵和(斜)Hermite 矩阵的研究已经取得了丰富的研究成果,它们在优化理论、计算数学、信号分析等诸多领域中都有着举足轻重的地位。但随着应用的需要和研究的深入,酉矩阵和 Hermite 矩阵的许多推广也应运而生[1-2]。特别是近年来,进一步提出了广义酉矩阵和广义 Hermite 矩阵的概念[3-8]。本文进一步研究广义酉矩阵和广义 Hermite 矩阵的性质,这无论是对于深入研究矩阵理论,还是对于应用研究(如辛几何、信号分析、物理学等)都很有价值。为叙述方便,A^{T} 与 A^* 分别表示矩阵 A 的转置和共轭转置,$C^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 复矩阵的集合,C_n^n 表示所有 n 阶复可逆矩阵的集合,$M^{m\times n}(\mathbf{R})$ 表示所有 $m\times n$ 实矩阵的集合,$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,($\theta\in\mathbf{R}$,i 表示纯虚数)。

定义 1[3] 设 $A\in C^{n\times n}$,若存在 $P\in C_n^n$ 使 $A^*PA=P$,则称 A 为 n 阶 P-广义酉矩阵,记为 $A\in U_P=\{A\in C^{n\times n}\mid A^*PA=P\}$。

定义 2[3] 设 $A\in C^{n\times n}$,若存在 $P\in C_n^n$ 使 $A^*P=PA$($A^*P=-PA$),则称 A 为 n 阶 P-广义 Hermite 矩阵(广义斜 Hermite 矩阵),记为 $A\in H_p=\{A\in C^{n\times n}\mid A^*P=PA\}$($A\in\overline{H}_p=\{A\in C^{n\times n}\mid A^*P=-PA\}$)。

定义 3 设矩阵 $A\in M^{n\times n}(\mathbf{R})$,如果存在 n 阶实可逆矩阵 D,使得 $A^{\mathrm{T}}D=DA$,则称 A 为广义实对称矩阵。

2 广义酉矩阵与广义 Hermite 矩阵的一些性质

定理 1 若 $A\in C_n^n$ 相似于一个酉矩阵 U,则 A 是 n 阶 P-广义酉矩阵。

证明 因为 $A\in C_n^n$ 相似于一个酉矩阵 U,所以存在可逆矩阵 S 使 $A=S^{-1}US$。又因为酉矩阵 U 及 A 非奇异,所以 $A^{-1}=S^{-1}U^*S$,$A^*=S^*U^*(S^{-1})^*$,从而

$$U^*=SA^{-1}S^{-1},A^*=S^*SA^{-1}S^{-1}(S^{-1})^*=(S^*S)A^{-1}(S^*S)^{-1}$$

于是令 $S^*S=P$,故有 $A^*PA=P$,这说明 A 是 n 阶 P-广义酉矩阵。 证毕

由上述的证明过程得

推论 1 若 $A\in C_n^n$ 相似于一个酉矩阵 U,则 A^{-1} 与 A^* 相似。

* 收稿日期:2009-03-31 修回日期:2009-11-18
资助项目:西华大学应用数学校重点学科(No. ZXD0910-09-1)
作者简介:程静,女,硕士,研究方向为矩阵理论及其应用;通讯作者:何承源,E-mail:chengyuanh@163.com

定理 2　已知 A 可对角化,则 A 为 n 阶 P-广义酉矩阵的充分必要条件是 A 相似于一个酉矩阵。

证明　必要性:因为 A 可对角化及为 n 阶 P-广义酉矩阵,所以存在可逆矩阵 T,使得 $A=T\Lambda T^{-1}$,其中 Λ 为可逆对角矩阵,于是 $A^{-1}=T\Lambda^{-1}T^{-1}$和 $A^{*}=(T^{-1})^{*}\Lambda^{*}T^{*}$ 以及 A^{-1}与 A^{*} 相似。又因为相似矩阵有相同的特征值以及必要时对 Λ^{-1}(或 Λ)作相应的行列变换,因此总可以假定 $\Lambda^{-1}=\Lambda^{*}$,由此可假定对角矩阵 $\Lambda=\mathrm{diag}\{e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}\}$,$(\theta_j\in\mathbf{R},j=1,\cdots,n)$,显然它是酉矩阵,故 A 相似于一个酉矩阵,其中 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,$(\theta\in\mathbf{R}$,i 表示纯虚数)。

充分性:定理 1 已证。　　　　证毕

定理 3　已知 A 是 n 阶 P-广义酉矩阵。如果 $\lambda\neq0$ 是 A 的特征值,那么 $1/\lambda$ 是 A^{*} 的特征值;当 A 为实矩阵时,$1/\lambda$ 也是 A 的特征值。

证明　因为 A 是 n 阶 P-广义酉矩阵,所以存在可逆矩阵 P 使得 $A^{*}PA=P$。若设 $\lambda\neq0$ 是 A 的特征值,α 为对应的特征向量,则 $A^{*}PA\alpha=\lambda A^{*}P\alpha=P\alpha$;因为 P 可逆且 $\alpha\neq0$,所以 $P\alpha\neq0$。于是 $1/\lambda$ 为 A^{*} 的特征值,其中 $P\alpha$ 为对应的特征向量。

因为 A 是 n 阶 P-广义酉矩阵且又为实矩阵,所以 A^{-1}相似于 A^{*},从而有 $\lambda_j(A^{-1})=\lambda_j(A^{*})=\overline{\lambda}_j(A^{\mathrm{T}})=\overline{\lambda}_j(A)$,$j=1,\cdots,n$。由定理 3 的证明过程知 $1/\lambda_j=\overline{\lambda}_j$,所以实矩阵 A 的特征值为 $1/\lambda$。　　　　证毕

定理 4　若 A 为广义 P-酉矩阵,则 A 是广义 P^{*}-酉矩阵。

证明　因为 A 为广义 P-酉矩阵,所以 $A^{*}PA=P$,于是 $A^{*}P^{*}A=(A^{*}PA)^{*}=P^{*}$,故 A 是广义 P^{*}-酉矩阵。　　　　证毕

定理 5　若 A 为实矩阵,则 A 为广义 Hermite 矩阵。

证明　对任意矩阵 $A\in M^{n\times n}(\mathbf{R})$,则 A 可分解为 $A=S^{-1}JS$,其中 J 为 A 的 Jorden 标准型,于是 $A^{*}=A^{\mathrm{T}}=S^{\mathrm{T}}J^{\mathrm{T}}(S^{-1})^{\mathrm{T}}$。但对 J 中任一 Jorden 块

$$J_{k_1}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & \cdots & \\ & \lambda_1 & \cdots & \\ \square & \square & & \square \\ & & \cdots & 1 \\ & & \cdots & \lambda_1\end{bmatrix}_{k_1\times k_1}\text{,存在次单位矩阵 } F_{k_1}=\begin{bmatrix} & & \cdots & & 1 \\ & & \cdots & 1 & \\ \square & \square & & \square & \square \\ & 1 & \cdots & & \\ 1 & & \cdots & & \end{bmatrix}_{k_1\times k_1}\text{(其中 } F_{k_1}^{\mathrm{T}}=F_{k_1}^{-1}=F_{k_1}\text{)}$$

使得 $J_{k_1}^{\mathrm{T}}=F_{k_1}J_{k_1}F_{k_1}$,因此对

$$J=\begin{bmatrix}J_{k_1} & & \cdots & \\ & J_{k_2} & \cdots & \\ \square & \square & & \square \\ & & \cdots & J_{k_j}\end{bmatrix}(k_1+\cdots+k_j=n)\text{ 存在置换矩阵 } T=\begin{bmatrix}F_{k_j} & & \cdots & \\ & F_{k_2} & \cdots & \\ \square & \square & & \square \\ & & \cdots & F_{k_l}\end{bmatrix},$$

使得 $J^{\mathrm{T}}=TJT^{-1}$则 $A^{\mathrm{T}}=S^{\mathrm{T}}TSAS^{-1}T^{-1}(S^{-1})^{\mathrm{T}}=(S^{\mathrm{T}}TS)A(S^{\mathrm{T}}TS)^{-1}$,易知 A 为广义 Hermite 矩阵。　　　　证毕

推论 2　若 A 为实矩阵,则 A 为广义对称矩阵。

定理 6　若 A 为 n 阶广义 P-Hermite 矩阵,则 A 为 n 阶广义 P^{*}-Hermite 矩阵。

证明　因为 A 为 n 阶广义 P-Hermite 矩阵,所以 $A^{*}P=PA$,于是 $A^{*}P^{*}=(PA)^{*}=(A^{*}P)^{*}=P^{*}A$,则 A 是 P^{*}-广义 Hermite 矩阵。　　　　证毕

参考文献:

[1] 袁晖坪. 次亚正定矩阵[J]. 数学杂志,2001,21(1):29-32.
[2] 袁晖坪. 准次正定矩阵[J]. 纯粹数学与应用数学,2001,17(1):14-22.
[3] 袁晖坪. 广义酉矩阵与广义 Hermite 矩阵[J]. 数学杂志,2003,23(3):375-380.
[4] 赵雪. 广义酉矩阵性质的拓广[J]. 北华大学学报(自然科学版),2004,5(4):301-302.
[5] 徐进,盛兴平. 广义酉矩阵和广义(斜)Hermite 矩阵的约当标准形[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版),2006,29(12):1620-1623.

[6] 余新良. 幂等 Hermite 矩阵性质探讨[J]. 湖南工程学院学报(自然科学版),2008,18(2):50-52.
[7] 于江明,谢清明. 次正定 Hermite 矩阵次 Schur 补的性质[J]. 数学杂志,2006,26(2):185-190.
[8] 沈光星. 广义正定矩阵及其性质[J]. 高等学校计算数学学报,2002,24(2):186-192.

Some Properties of Generalized Unitary Matrices and Generalized Hermite Matrices

CHENG Jing, *HE Cheng-yuan*

(College of Mathematics and Computer, Xihua Universtity, Chengdu 610039, China)

Abstract: This paper focuses on two types of special matrices: the generalized unitary matrix and the generalized Hermite matrix. Promoted the nature of these two types of matrices we can obtained several new conditions of these two types of matrices. Such as: if a matrix $A \in C_n^n$ similar to a unitary matrix U, then A is the n-generaliized unitary matrix; if A can be diagonallyzable, then A is a n-generalized unitary matrix the necessary and sufficient condition is A similar to a unitary matrix; if A is a generalized P-unitary matrix, then A is a generalized P^*-unitary matrix; if a matrix A is a real matrix, then A is a generalized Hermite matrix; if A is a n-order generalized P-Hermite matrix, then A is a n-order generalized P^*-Hermite matrix. Gives the eigenvalues of the generalized unitary matrices: if $\lambda \neq 0$ is the eigenvalues of A, then $1/\lambda$ is the eigenvalues of A^*; when A is a real matrix, $1/\lambda$ is the eigenvalues of A.

Key words: generalize unitary matrix; generalized Hermite matrix; property; factor

(责任编辑 游中胜)