运筹学与控制论

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 04. 003

一种改进的单纯形最优化方法*

董 兵,梁 俊
(中国民航飞行学院 计算机学院,四川 广汉 618307)

摘要:对求极小化线性规划问题 $\max Z=CX, AX=b, X\geqslant 0$,通过添加人工变量,可直接获得问题的基解,若求得问题的基解不是原问题的可行解,也不是对偶问题的可行解的情况下,本文给出了求解该类规划问题初始可行解的一般方法。迭代过程如下:令 $\frac{b_p}{a_{ps}}=\min\limits_{p\in P,t\in T}\{\frac{b_p}{a_{pt}}\}$,若 $\frac{b_r}{a_{rs}}\leqslant\frac{b_p}{a_{ps}}$,则以 a_{rs} 为主元,若 $\frac{b_r}{a_{rs}}\geqslant\frac{b_p}{a_{ps}}$,则以 a_{ps} 为主元,对单纯形表进行初等行变换,可获得问题的可行解或最优解。与大 M 法和两阶段法相比,该算法计算量大大减少。最后给出了具体实例。

关键词:线性规划;单纯形法;典式

中图分类号:O221.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2010)04-0009-03

1 引言及预备知识

单纯形法是求解线性规划的基本方法,许多文献对其不断的改进[1-7]。若求解线性规划问题时,存在基可行解或对偶问题的基可行解,则可直接采用文献[8]的方法,文献[9]采用人工约束法寻找问题的解,文献[3]提出"求解线性规划问题可行基的一种方法",可避免引入人工变量的优点,但文献[4-5]中指出上述两方法存在不正确之处。本文针对求得问题的基解不是原问题的可行解,也不是对偶问题的可行解的情况下,给出了求解该类问题的新的一般方法。

一般地,线性规划问题通过添加松弛变量,可以化为如下典式[8]

$$\min Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0,(j=1,2,\cdots,n+m)$$

定义 1 $\lambda_j=\sum\limits_{i=1}^{m}c_ia_{ij}-c_j$ 称为对应于基 B 的变量 x_j 的检验数。其中 c_i 为目标函数的系数,a_{ij} 为系数矩阵中 x_j 的系数。

2 主要结果

定理 1 线性规划问题对应的单纯形表中,若某个 $b_i<0(>0)$,而所在行变量的系数 $a_{ij}\geqslant 0(\leqslant 0)$,$j=1,2,\cdots,n$,则该线性规划问题无可行解。

证明 (反证法)设线性规划存在可行解 $\hat{x}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n)$,$\hat{x}_i\geqslant 0$,$i=1,\cdots,n$,左边 $=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\hat{x}_j\geqslant(\leqslant)0$,而左边 $=b_i<(>)0$,则矛盾。假设不成立,该线性规划问题无可行解。 证毕

设 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$

$$\frac{b_r}{a_{rs}}=\max_{r\in I,s\in J}\{\frac{b_r}{a_{rs}}\},I=\{i\mid b_i<0,i=1,\cdots,m\}$$

$$J=\{j\mid a_{ij}<0,j=1,2,\cdots,n\},\frac{b_p}{a_{ps}}=\min_{p\in P,t\in T}\{\frac{b_p}{a_{pt}}\}$$

$$P=\{i\mid b_i>0,i=1,2,\cdots,m\}$$

$$T=\{j\mid a_{ij}>0,j=1,2,\cdots,n\}$$

定理 2 在具有典式的线性规划问题对应的单纯形表中,若 $\frac{b_r}{a_{rs}}\leqslant\frac{b_p}{a_{ps}}$,则以 a_{rs} 为主元,若 $\frac{b_r}{a_{rs}}\geqslant\frac{b_p}{a_{ps}}$,则以 a_{ps} 为主元,对单纯形表进行初等行变换,则新的基解中小于 0 的项至少减少一个,重复上述过程,可以得到该单纯形问题的可行解。

* 收稿日期:2009-10-22 修回日期:2010-06-15
资助项目:中国民航飞行学院自然科学基金项目(No. J2008-76)
作者简介:董兵,男,讲师,博士,研究方向为最优化算法。

证明 1) 在具有典式的线性规划问题对应的单纯形表中,若$\frac{b_r}{a_{rs}} \leqslant \frac{b_p}{a_{ps}}$,则以为 a_{rs} 主元,对单纯形表进行初等行变换,即由非基变量x_s 代替基变量x_r,得到基解,不妨设为 $x^r = (x_1^r, x_2^r, \cdots, x_m^r, \cdots, 0)$,则 $x_s^r = \frac{b_r}{a_{rs}} \geqslant 0$(因为 $b_r < 0, a_{rs} < 0$)。

① 若 $b_i \geqslant 0$,$(i \neq r)$ 则有

(a) 设 $a_{is} \leqslant 0$,$\frac{b_r}{a_{rs}} \geqslant 0$,$x_i^r = b_i - \frac{b_r}{a_{rs}} a_{is} \geqslant 0$。

(b) 设 $a_{is} > 0$,由$\frac{b_r}{a_{rs}} \geqslant 0$,$\frac{b_i}{a_{is}} \leqslant \frac{b_r}{a_{rs}}$有

$$x_i^r = b_i - \frac{b_r}{a_{rs}} a_{is} \geqslant 0$$

② 若 $b_i < 0 (i \neq r)$,则有

(a) 设 $a_{is} < 0$,由$\frac{b_r}{a_{rs}} \geqslant 0$,$\frac{b_i}{a_{is}} \leqslant \frac{b_r}{a_{rs}}$有

$$x_i^r = b_i - \frac{b_r}{a_{rs}} a_{is} \geqslant 0$$

(b) 设 $a_{is} > 0$,$x_i^r = b_i - \frac{b_r}{a_{rs}} a_{is} \leqslant 0$。

根据系数的选择,$x_s^r = \frac{b_r}{a_{rs}} \geqslant 0$,而其他情况,在基解中不会出现新的小于0 的分量,则新的基解中小于0 的项至少减少一个。

2) 同理,若$\frac{b_r}{a_{rs}} \geqslant \frac{b_p}{a_{ps}}$,则以 a_{ps} 为主元,对单纯形表进行初等行变换,即由非基变量x_s 代替基变量x_p,得到基解,不妨设为 $x^p = (x_1^p, x_2^p, \cdots, x_m^p, \cdots, 0)$,则 $x_s^p = \frac{b_p}{a_{ps}} \geqslant 0$,(因为 $b_p \geqslant 0, a_{ps} \geqslant 0$)。

① 若 $b_i \geqslant 0 (i \neq p)$,则有

(a) 设 $a_{is} \leqslant 0$,$\frac{b_p}{a_{ps}} \geqslant 0$,$x_i^p = b_i - \frac{b_p}{a_{ps}} a_{is} \geqslant 0$。

(b) 设 $a_{is} > 0$,由$\frac{b_p}{a_{ps}} \geqslant 0$,$\frac{b_i}{a_{is}} \geqslant \frac{b_p}{a_{ps}}$有

$$x_i^p = b_i - \frac{b_p}{a_{ps}} a_{is} \geqslant 0$$

② 若 $b_i < 0 (i \neq p)$,则有

(a) 设 $a_{is} < 0$,由$\frac{b_p}{a_{ps}} \geqslant 0$,$\frac{b_i}{a_{is}} \leqslant \frac{b_p}{a_{ps}}$有

$$x_i^p = b_i - \frac{b_p}{a_{ps}} a_{is} \geqslant 0$$

(b) 设 $a_{is} > 0$,$x_i^p = b_i - \frac{b_p}{a_{ps}} a_{is} \leqslant 0$。

根据系数的选择要求,必定存在 $a_{is} \leqslant 0$,由条件所述,而在其他情况,在基解中不会出现新的小于0 的分量,则新的基解中小于0 的项至少减少一个。

证毕

推论1 在具有典式的线性规划问题对应的单纯形表中,若 $b_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m$,设

$$\frac{b_p}{a_{ps}} = \min \left\{\frac{b_i}{a_{is}} \mid b_i \geqslant 0, a_{is} > 0\right\}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant s \leqslant n$$

则以 a_{ps} 为主元,对单纯形表进行初等行变换,得到的新基必为可行基。

推论2 在具有典式的线性规划问题对应的单纯形表中,若 $b_i \leqslant 0, i = 1,2,\cdots,m$,而存在某个 $s (1 \leqslant s \leqslant n)$,使得 $a_{is} < 0 (1 \leqslant i \leqslant m)$,设

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \max \left\{\frac{b_i}{a_{is}} \mid b_i \leqslant 0, a_{is} < 0\right\}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant s \leqslant n$$

则以 a_{rs} 为主元,对单纯形表进行初等行变换,得到的新基必为可行基。

3 应用举例

例1 求解下列线性规划问题

$$\min z = -2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 6 \end{cases}, x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

解 将问题化为具有典式的线性规划

$$\min z = -2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 6 \end{cases}, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

表1 例1 的迭代过程

Table 1 Iterative process of example 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	[-1]	-1	-1	1	0	-4
x_5	1	2	2	0	1	6
λ_i	2	-1	0	0	0	0
x_1	1	1	1	-1	0	4
x_5	0	1	1	[1]	1	2
λ_i	0	-3	-2	2	0	-8
x_1	1	2	2	0	1	6
x_5	0	1	1	1	1	2
λ_i	0	-5	-4	0	-2	-12

由 $\max \left\{\frac{b_i}{a_{ij}} \mid b_i < 0, a_{ij} < 0\right\} = \frac{b_1}{a_{11}} = 4$

$$i = \{1\}, 1 \leqslant j \leqslant 3$$

及 $\min \left\{\frac{b_i}{a_{i1}} \mid b_i > 0, a_{i1} > 0\right\} = \frac{b_2}{a_{21}} = 6, i = \{2\}, 4 < 6$

选择 a_{11} 为主元进行换基迭代。完成一次迭代后，已经得到基可行解，此时 $\lambda_4 > 0$，不是问题的最优解，进行单纯形迭代，由表 1 的单纯形表可知最优解为 $x_1 = 6, x_2 = 0, x_3 = 0$，最优值 $z^* = -12$。

例 2 求解下列线性规划问题

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geqslant 4 \\ -x_1 + 9x_2 - x_3 \geqslant 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leqslant 12 \end{cases}, x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

解 将问题化为具有典式的线性规划

$$\min w = -2x_1 + x_2 - x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 9x_2 + x_3 + x_5 = -3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_6 = 12 \end{cases}, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0$$

表 2 例 2 的迭代过程

Table 2 Iterative process of example 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	-2	$[-3]$	5	1	0	0	-4
x_5	1	-9	1	0	1	0	-3
x_6	2	6	3	0	0	1	12
λ_i	2	-1	1	0	0	0	0
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_5	7	0	-14	-3	1	0	9
x_6	-2	0	13	2	0	1	4
λ_i	$\frac{8}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$

存在 $j = 2$，使得 $b_i \leqslant 0, a_{ij} < 0, i = 1, 2$，$\max\left\{\frac{b_i}{a_{ij}} \mid b_i \leqslant 0, a_{ij} < 0\right\} = \frac{b_1}{a_{12}} = \frac{4}{3}, 1 \leqslant i \leqslant 2, j = 2$，$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i2}} \middle| b_i > 0, a_{i2} > 0\right\} = \frac{b_3}{a_{32}} = 2, 1 \leqslant i \leqslant 3, \frac{4}{3} < 2$，选择 a_{12} 为主元进行换基迭代。经迭代后，获得该线性规划的基可行解。其中存在检验数 $\lambda_1 > 0$，该可行解不是问题的最优解，进行换基迭代。问题的最优解为 $x_1 = 3.75, x_2 = 0.75, x_3 = 0$，目标函数值 $z^* = 6.75$。

参考文献：

[1] 田川. 对偶单纯形法的改进[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2007, 24(2): 91-92.

[2] 曾昭才，董景荣. 关于单纯形集的一个定理[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1997, 14(4): 41-44.

[3] 吴延东. 求解线性规划问题可行基的一种方法[J]. 运筹与管理 1999, 8(1): 123-127.

[4] 范鹰. 关于人工约束法寻找对偶可行解的分类与证明[J]. 应用数学与计算数学学报, 1999, 13(2): 78-82.

[5] 胡剑峰，潘平奇. "求解线性规划问题可行基的一种方法"的再注记[J]. 运筹与管理，2006, 15(3): 13-15.

[6] 陆宗元. 关于单纯形方法的一点注记[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 2000, 29(4): 215-218.

[7] 吴至友，白富生. 一种新的求全局优化最优性条件的方法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2006, 23(1): 1-5.

[8] 程理民，吴江，张玉林. 运筹学模型与方法教程[M]. 北京: 清华大学出版社，2007.

[9] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2005.

[10] Gass S I. Linear programming: methods and application[M]. New York: Dover Publications, 2003.

A New Improved Optimal Method of Simplex Algorithm

DONG Bing, LIANG Jun

(College of Computer, Civil Aviation Flight University of China, Guanghan Sichuan 618307, China)

Abstract: Considering the linear program for minimal solution with standard style: max $Z = CX$, $AX = b$, by adding artificial variables, the directly based solution can be obtained. If the problem doesn't have either feasible or dual feasible base solution, a new common method is obtained in the paper. Iterative process as following as: Let $\frac{b_p}{a_{ps}} = \min\limits_{p \in P, t \in T}\left\{\frac{b_p}{a_{pt}}\right\}$, If $\frac{b_r}{a_{rs}} \leqslant \frac{b_p}{a_{ps}}$, Places a_{rs} as the main element, if $\frac{b_r}{a_{rs}} \geqslant \frac{b_p}{a_{ps}}$, places a_{ps} as the main element. Row transformation the simplex table elementary, a feasible solution of the problem or the optimal solution are obtained. Through the analysis and comparison with a big-M method, two-phase method, the results show that it is a simple effective and feasible method. Two examples are given.

Key words: linear programming; simplex algorithm; standard style

(责任编辑 黄 颖)