DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 04. 010

广义磁流体力学方程组的部分正则性*

罗 玉 文
(重庆理工大学 数学与统计学院,重庆 400050)

摘要:研究带分数次扩散项$(-\Delta)^{\alpha}$和$(-\Delta)^{\beta}$的广义磁流体力学方程组(GMHD)的正则性。这一方程包含了 Navier-Stokes 方程与通常的磁流体力学方程组(MHD)。本文采用能量积分方法,研究 GMHD 方程的解用速度向量的分量来判定正则性,并且结果并不依赖于磁场函数。本文主要讨论$\alpha=\beta$的情形。设$u=(u_1,u_2,u_3)$,$\tilde{u}=(u_1,u_2,0)$,$0<\alpha=\beta<\frac{3}{2}$初始速度与初始磁场满足$u_0,b_0\in H^1(\mathbf{R}^3)$。在上述条件下,本文指出,如果$\nabla\tilde{u}\in L^p(0,T;L^q(\mathbf{R}^3))$且$\frac{2\alpha}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 2a$,或者$\nabla\tilde{u}\in L^{\frac{2\alpha}{2\alpha-r}}(0,T;\dot{B}(\mathbf{R}^3))$,$0\leqslant r\leqslant\alpha$,那么方程的解在$[0,T]$上依然是光滑的。

关键词:广义磁流体力学方程组;正则性;乘子空间;Lebesgue 空间
中图分类号:O175.2;O361.3 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2010)04-0041-03

本文研究了如下的广义磁流体力学方程组的正则性

$$\begin{cases}\partial_t u+u\cdot\nabla u-b\cdot\nabla b+\nabla p=-(-\Delta)^{\alpha}u\\ \partial_t b+u\cdot\nabla b-b\cdot\nabla u=-(-\Delta)^{\beta}b\\ \nabla\cdot u=\nabla\cdot b=0\\ u(x,0)=u_0(x),b(x,0)=b_0(x)\end{cases}\tag{1}$$

其中初始条件满足$\nabla\cdot u_0=\nabla\cdot b_0=0$。向量函数$u,b$分别表示速度场和磁场,数量函数$p$表示压力函数,$t\geqslant 0$。分数次算子$(-\Delta)^{\alpha}$通过$\widehat{(-\Delta)^{\alpha}}f(\xi)=|\xi|^{2\alpha}\hat{f}(\xi)$来定义[1]。为了记号上的方便,记$\Lambda=(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$。

方程(1)式包含了 Navier-Stokes 方程以及通常的磁流体力学方程组。然而不能确定即使初始条件足够光滑,三维的 Navier-Stokes 方程是否会在有限时间内爆破。这导致了对 Navier-Stokes 方程以及它的各种形式的推广方程的正则性的深入研究。

当$\alpha=1$时,方程(1)式就成为通常的不可压缩磁流体力学方程组。对通常的磁流体力学方程组的正则性研究,已经有很多文献讨论了关于 Serrin 型的正则性[2-6],Beal-Kato-Majda 型的正则性[7-8],方程的解关于压力函数的正则性结果[9]及解在乘子空间的正则性判据[10]。

对于一般的α,文献[11]研究了方程(1)式的存在唯一性及正则性,及在 3 维情形,如果$\alpha>\frac{5}{4}$且$\beta>\frac{5}{4}$时,方程的任何光滑解不会在有限时间内出现奇性。对$1\leqslant\alpha\leqslant\frac{3}{2}$的情形,周勇得到了一些有用的 Serrin 型正则性准则[12]。利用 Littlewood-Paley 分解,对$\frac{3}{4}<\alpha<\frac{3}{2}$的情形,得到了一些 Beal-Kato-Majda 型的正则性[13]。对于最一般的$\alpha>0$的情形,罗玉文得到了一个有效的正则性准则[14]。

本文的目的是建立关于速度向量的两个分量的正则性。这些准则推广了 Navier-Stokes 方程和 MHD 方程的相应结果[9,15]。设$\tilde{u}=(u_1,u_2,0)$,主要的结果如下。

定理 1 令$0<\alpha<\frac{3}{2}$,假设初始速度与初始磁场满足$u_0,b_0\in H^1(\mathbf{R}^3)$。如果在$[0,T)$上,速度场满足

---

* 收稿日期:2009-12-14
作者简介:罗玉文,男,讲师,硕士,研究方向为偏微分方程及流体力学。

$\nabla\tilde{u}\in L^p(0,T;L^q(\mathbf{R}^3))$,其中$p,q$满足关系式$\frac{2\alpha}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 2\alpha,\frac{3}{2}<q\leqslant\infty$,则方程的解通过$T$时依然是光滑的。

定理2 令$0<\alpha<\frac{3}{2}$,假设初始速度与初始磁场满足$u_0,b_0\in H^1(\mathbf{R}^3)$。如果在$[0,T)$上,速度场满足$\nabla\tilde{u}\in L^{\frac{2\alpha}{2\alpha-r}}(0,T;\dot{X}^r(\mathbf{R}^3))$,$0\leqslant r\leqslant\alpha$,则方程的解通过$T$时依然是光滑的。

首先给出乘子空间的定义。

定义1[6] 对任何的$0\leqslant r<\frac{3}{2}$,齐次空间$\dot{X}^r$定义为$\dot{X}^r=\{f\in L^2_{\mathrm{loc}}:\forall g\in\dot{H}^r,fg\in L^2\}$,其范数定义为$\|f\|_{\dot{X}^r}=\sup\limits_{\|g\|_{\dot{X}^r}\leqslant 1}\|fg\|_{L^2}$。这里$\dot{H}^r$为齐次Sobolev空间,其范数为$\|f\|_{\dot{X}^r}=\||\xi|^r\hat{f}\|_{L_2}$,这里$\hat{f}$为$f$的Fourier变换。

1 定理1的证明

对方程(1)式的第一个方程乘以Δu,第二个方程乘以Δb,分部积分所得方程,然后相加所得结果,可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|^2_{L^2}+\|\nabla b\|^2_{L^2})+\|\Lambda^{\alpha+1}u\|^2_{L^2}+\|\Lambda b\|^2_{L^2}=\int_{\mathbf{R}^3}\partial_k u_i\cdot\partial_i u_j\cdot\partial_k u_i\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\mathbf{R}^3}\partial_k u_i\cdot\partial_i b_j\cdot\partial_k b_j\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}\partial_k b_i\cdot\partial_i b_j\cdot\partial_k u_j\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}\partial_k b_i\cdot\partial_i u_j\cdot\partial_k b_j\mathrm{d}x\triangleq I_1+I_2+I_3+I_4 \tag{2}$$

现在估计右边第一部分。先假设$q<\infty$。考虑3种情况,$i\neq 3$或$i=3$而$j\neq 3$或$i=j=3$。前面两种情况,I_1本质上为$\|\nabla\tilde{u}\|_{L^q}\|\nabla\tilde{u}\|^2_{L^r}$所控制,其中$\frac{1}{q}+\frac{2}{r}=1$。因为$\partial_3 u_3=-(\partial_1 u_1+\partial_2 u_2)$,所以对于$i=j=3$,有

$$\left|\int_{\mathbf{R}^3}\partial_k u_3\cdot\partial_3 u_3\cdot\partial_k u_3\mathrm{d}x\right|=\left|-\int_{\mathbf{R}^3}\partial_k u_3\cdot(\partial_1 u_1+\partial_2 u_2)\cdot\partial_k u_3\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$2\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla\tilde{u}\|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\|\nabla\tilde{u}\|_{L^q}\|\nabla u\|^2_{L^r}$$

最后一个不等式由Hölder不等式得到。所以第一部分有界$C\|\nabla\tilde{u}\|_{L^q}\|\nabla u\|^2_{L^r}$。由$L^p$空间插值不等式,Sobolev嵌入定理以及Young不等式,得到

$$|I_1|\leqslant C\|\nabla\tilde{u}\|_{L^q}\|\nabla u\|^2_{L^r}\leqslant C\|\nabla\tilde{u}\|_{L^q}\|\nabla u\|^{2\theta}_{L^2}\|\nabla u\|^{2(1-\theta)}_{L^\gamma}\leqslant$$
$$C\|\nabla\tilde{u}\|_{L^q}\|\nabla u\|^{2\theta}_{L^2}\|\Lambda^{\alpha+1}u\|^{2(1-\theta)}_{L^\gamma}\leqslant C\|\nabla\tilde{u}\|^{\frac{1}{\theta}}_{L^q}\|\nabla u\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|\Lambda^{\alpha+1}u\|^2_{L^2}$$

其中q,r,θ,γ满足$\frac{1}{q}+\frac{2}{r}=1,\frac{1}{r}=\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{\gamma},2<r<\gamma,\gamma=\frac{2n}{n-2\alpha}=\frac{6}{3-2\alpha}$。

从上述关系得到$\theta=1-\frac{3}{2}\alpha+\frac{3}{r\alpha}$。因为$\frac{2\alpha}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 2\alpha$,这意味着$\frac{1}{\theta}\leqslant p$。所以$\int_{\mathbf{R}^3}\|\nabla\tilde{u}\|^{\frac{1}{\theta}}_{L^q}\mathrm{d}x\leqslant\infty$。

类似地,可以得到$|I_2|+|I_3|+|I_4|\leqslant C\|\nabla\tilde{u}\|^{\frac{1}{\theta}}_{L^q}\|\nabla b\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|\Lambda^{\alpha+1}b\|^2_{L^2}$,其中$\theta$与前述的一致。则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|^2_{L^2}+\|\nabla b\|^2_{L^2})+\|\Lambda^{\alpha+1}u\|^2_{L^2}+\|\Lambda b\|^2_{L^2}\leqslant C\|\nabla\tilde{u}\|^{\frac{1}{\theta}}_{L^q}\left(\|\nabla b\|^2_{L^2}\|\nabla u\|^2_{L^2}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\|\Lambda^{\alpha+1}u\|^2_{L^2}+\|\Lambda^{\alpha+1}b\|^2_{L^2}\right)$$

由标准的Gronwell不等式,定理的结论成立。

当$q=\infty$时,由Hölder不等式,$|I_1|$有界$\|\nabla\tilde{u}\|_{L^\infty}\|\nabla u\|^2_{L^2}$,而其它几项有界$\|\nabla\tilde{u}\|_{L^\infty}\|\nabla b\|^2_{L^2}$。条件$\frac{2\alpha}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 2\alpha$意味着,当$q=\infty$时,$p\geqslant 1$,所以$\int_{\mathbf{R}^3}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^\infty}\mathrm{d}t<\infty$。然后,由标准的Gronwell不等式,定理的

结论依然是成立的。 **证毕**

2 定理 2 的证明

从(2)式开始,由Hölder**不等式得到**$|I_1|\leqslant \| |\nabla \tilde{u}| \ |\nabla u| \|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}\leqslant C\|\nabla \tilde{u}\|_{\dot{X}^r}\|\nabla u\|_{\dot{H}^r}\|\nabla u\|_{L^2}$,**由** Sobolev **空间插值不等式**[10],**可以得到** $\|\nabla u\|_{\dot{H}^r}\leqslant C\|\nabla u\|_{L^2}^{1-\frac{r}{\alpha}}\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^{\frac{r}{\alpha}}$,**所以**

$$|I_1|\leqslant C\|\nabla \tilde{u}\|_{\dot{X}^r}\|\nabla u\|_{L^2}^{2-\frac{r}{\alpha}}\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^{\frac{r}{\alpha}}\leqslant C\left(\|\nabla \tilde{u}\|_{\dot{X}^r}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-r}}\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2\alpha-r}{2\alpha}}\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^{\frac{r}{\alpha}}\leqslant$$

$$C\|\nabla \tilde{u}\|_{\dot{X}^r}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-r}}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^2$$

最后一个不等式可以由 Young **不等式得到。**

类似地,可以得到$|I_2|+|I_3|+|I_4|\leqslant C\|\nabla \tilde{u}\|_{\dot{X}^r}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-r}}\|\nabla b\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\Lambda^{\alpha+1}b\|_{L^2}^2$。**类似于定理** 1 **的证明,就完成了定理** 2 **的证明。** **证毕**

参考文献:

[1] Stein E M. Singular integrals and differentiability properties of functions(PMS-30)[M]. Princeton:Princeton University Press, 1971.

[2] He C,Xin Z P. On the regularity of weak solutions to the magnetohydrodynamic equations[J]. J Diff Equations,2005,213(2):235-254.

[3] Luo Y W. Regularity of weak solutions to the magneto-hydrodynamics equations in terms of the direction of velocity[J]. Electron J Diff Equ,2009,132:1-7.

[4] Wu J H. Bounds and new approaches for the 3D MHD equations[J]. J Nonlinear Sci,2008,12(4):395-413.

[5] Wu J H. Regularity results for weak solutions of the 3D MHD equations[J]. Discrete Contin Dynam Systems,2004,10(1-2):543-556.

[6] Cao C S,Wu J H. Two regularity criteria for the 3D MHD equations[J]. Journal of Differential Equations,2010,248(9):2263-2274.

[7] Caflish R E,Klapper I,Steele G. Remarks on singularities,dimension and energy dissipation for ideal hydrodynamics and MHD[J]. Comm in Math Phys,1997,184(2):443-455.

[8] Chen Q L,Miao C X,Zhang Z F. The Beale-Kato-Majda criterion to the 3D magneto-hydrodynamics equations[J]. Comm in Math Phys,2007,275(3):861-872.

[9] Zhou Y. Regularity criteria for the 3D MHD equations in terms of the pressure[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2006,41(10):1174-1180.

[10] Zhou Y,Gala S. Regularity criteria for the solutions to the 3D MHD equations in the multiplier space[J]. Z Angew Math Phys, 2010,61(2):193-199.

[11] Wu J H. Generalized MHD equations[J]. J Diff Equations,2003,195:284-312.

[12] Zhou Y. Regularity criteria for the generalized viscous MHD equations[J]. Ann I H Poincare,2007,24(3):491-505.

[13] Wu G. Regularity criteria for the 3D generalized MHD equations in terms of vorticity[J]. Nonlinear Analysis:TMA,2009,71(9):4251-4258.

[14] Luo Y W. On the regularity of generalized MHD equations[J]. J Math Anal Appl,2010,365(2):806-808.

[15] Fan J S,Gao H J. Two component regularity for the Navier-Stokes equations[J]. Elec J Diff Equa,2009,121:1-6.

[16] Lemerié-Rieuset P G,Gala S. Multipliers between Sobolev spaces and fractional differentiation[J]. J Math Anal Appl, 2006,322(2):1030-1054.

[17] Bergh J,Löfström J. Interpolation spaces,an introduction[M]. Berlin:Springer-Verlag,1976.

(下转第 50 页)

(上接第 43 页)

Partial Regularity of Generalized MHD Equations

LUO Yu-wen

(School of Mathematics & Statitics, Chongqing University of Technology, Chongqing 400050, China)

Abstract: In this paper, the regularity of 3D generalized magneto-hydrodynamics (GMHD) equations with fractional dissipative terms $(-\Delta)^{\alpha}$ and $(-\Delta)^{\beta}$ is studied. The equations contain the well-known Navier-Stokes equations and magneto-hydrodynamics equations. The regularity problem of Navier-Stokes equation and generalized type, such as the magneto-hydrodynamics equation and the generalized Navier-Stokes equations, were studied extensively. But the problem is still unsettled now. Some researchers turned to study the regularities criterion of Naveir-Stokes equations in terms of the components of velocity, and got some of useful results. Since MHD and GMHD are far more difficult than Navier-Stokes equations, there are few similar results of these two equations. Using energy integral method, the regularity of GMHD equations in terms of two components of velocity is studied, and the results does not depend on the magnetic field. The special case $\alpha=\beta$ is considered in the paper. Let $u=(u_1,u_2,u_3)$, $\tilde{u}=(u_1,u_2,0)$, $0<\alpha=\beta<\frac{3}{2}$, the initial velocity and magnetic field satisfied $u_0, b_0 \in H^1(\mathbf{R}^3)$. Under these conditions, it is proved that if $\nabla\tilde{u}\in L^{p}(0,T;L^{q}(\mathbf{R}^3))$ with $\frac{2\alpha}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 2\alpha$ on $[0,T]$, or if $\nabla\tilde{u}\in L^{\frac{2\alpha}{2\alpha-r}}(0,T;\dot{X}_r(\mathbf{R}^3))$ with $0\leqslant r\leqslant\alpha$, the solution remains smooth on $[0,T]$.

Key words: generalized magnetohydrodynamics equations; regularity conditions; multiplier spaces; Lebesgue spaces

(责任编辑　黄　颖)