

微小电流环与磁偶极子*

李 静,胡先权

(重庆师范大学 物理学与电子工程学院,重庆 400047)

摘要:电偶极子与磁偶极子是电磁学中的重要概念,在电多极矩和磁多极矩的应用中贡献最大,而且在研究原子、分子的物理性质以及电磁介质的特性及应用时,也有着极为重要的应用。本文从电偶极子与磁偶极子的基本定义出发,应用电偶极子与磁偶极子的相似性与不同点,来探究磁偶极子和小电流环的相互关系,定义的磁偶极矩经过修正为 $B_d(x) = \nabla(\frac{1}{4\pi\mu} \cdot \nabla \frac{1}{|x|}) + \mu\delta^{(3)}(x)$,环电流产生的磁场为 $B_y(x) = \frac{i}{4\pi c} \nabla_x [\int_S N \cdot \nabla_x \frac{1}{r} d\sigma] + N \frac{i}{c} \int_S \delta^{(3)}(x - \xi) d\sigma = B'_y(x) + B''_y(x)$ 。结果表明微小电流环所产生的磁场分部,就等同于两个磁子所组成的磁偶极子所产生的磁场。

关键词:电偶极子;磁偶极子;对比分析;微小电流环

中图分类号:O441

文献标识码:A

文章编号:1672-6693(2010)04-0054-03

在电磁学的学习和研究中,点偶极矩和磁偶极矩作为基本概念在电动力学中扮演着很重要的角色,在电多极矩和磁多极矩的应用中贡献最大,因为在对复杂的电势或磁矢势作多极矩展开时,电偶极子或磁偶极子对势函数的贡献是最大的,所以在一般情况下转而对电偶极子或磁偶极子的研究就变得十分重要。同样,在研究原子、分子的物理性质以及电磁介质的特性及应用时,有着极为重要的应用。由于目前的科学实验水平,在世界范围内,还没有科学家在实验室中发现单个的磁子,但是在理论研究时,发现磁子在磁学研究中所扮演的角色和电子在电学研究中所扮演的角色有着惊人的相似。本文就是注重从他们的相似性出发,来找出他们的相同点和不同点,希望给在学习电磁学的人们一点启发。

1 磁偶极矩磁场的提出

磁偶极子就是一个载流的小闭合圆环,这个概念来源于经典的静电学。然而,当此概念被用于静磁学时,它的物理内涵较之静电学中的电偶极子发生了很大的变化。本文的主要目的就是探究这两者之间的相似性和不同。

首先从静电学的电偶极子概念入手,假设有2个点电荷 $+q$ 和 $-q$ 位于 $\delta/2$ 和 $-\delta/2$ 处,由此可以得到电偶极矩为^[1-2]

$$d = q\delta$$

此电偶极矩在空间的电势为^[3-4]

$$V_d(x) = -\frac{1}{4\pi} d \cdot \nabla \frac{1}{|x|}$$

再由电场与电势的矢量关系,可得

$$E_d(x) = -\nabla V_d(x) = \nabla \left(\frac{1}{4\pi} d \cdot \nabla \frac{1}{|x|} \right)$$

用相似的方法定义一个磁偶极矩 μ ,这个磁偶极矩产生的磁场为

$$B_d(x) = \nabla \left(\frac{1}{4\pi} \mu \cdot \nabla \frac{1}{|x|} \right) \quad (1)$$

然而,众所周知单个的磁极是不存在的。(1)式不满足这个条件,由 Maxwell 方程^[5]

$$\nabla \cdot B = 0$$

对磁场求散度,得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot B_d(x) &= \frac{1}{4\pi} \mu \cdot \nabla \left(\nabla \frac{1}{|x|} \right) = \\ &= -\mu \cdot \nabla \delta^{(3)}(x) \neq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

在计算过程中使用了矢量分析公式

$$\nabla^2 \frac{1}{|x|} = -4\pi \delta^{(3)}(x)$$

之所以出现上述的结果,其原因在于用了电偶极矩的方法定义磁偶极矩,自然界中的单个电荷是存在的,但是单个磁极子却不存在。

为了使结果与 Maxwell 方程相符合,对(1)式进行修正,由(2)式可以看出,要想 B_d 满足 Maxwell 方

* 收稿日期 2009-10-08 修回日期 2010-01-06

资助项目:重庆市教委基础理论研究基金(No. KJ080825)

作者简介:李静,男,硕士研究生,研究方向为电磁场理论,通讯作者,胡先权, E-mail: huxuan2003@yahoo.com.cn

程 就必须使 (2) 式加上一个修正项 $\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \delta^{(3)}(x)$ 。由此 得到 B_d 的修正式为

$$B_d(x) = \nabla \left(\frac{1}{4\pi} \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \frac{1}{|x|} \right) + \boldsymbol{\mu} \delta^{(3)}(x) \quad (3)$$

但是 由 (3) 式所给出的磁场不是保守场。

2 磁场的失性分析

在静电学中 电场是保守场 由 Faraday 方程^[5]

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

此处的磁场是无源场 所以不可能也为无旋场。

自然界中不存在单个的磁极子 所以在定义磁偶极子时必须应用环电流 由安培公式可知

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{c} \quad (4)$$

再由电荷守恒方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \quad (5)$$

就可以计算磁场 \boldsymbol{B} 。由 (4) 式可知 磁场 \boldsymbol{B} 的非保守部分是位于电路密度 \boldsymbol{j} 不为零的点。因此 在磁偶极子情况下 (4) 式的 $\boldsymbol{\mu} \delta^{(3)}(x)$ 项满足安培方程 因为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla \times [\boldsymbol{\mu} \delta^{(3)}(x)] = -\boldsymbol{\mu} \times \nabla \delta^{(3)}(x)$$

现在 考虑由一个无限小的电流环所产生的磁场 B_d 。由 Biot-savart's 法则可得^[6-8]

$$\boldsymbol{B}(x) = \frac{1}{4\pi c} \nabla \times \int d^3\xi \frac{\boldsymbol{j}(\xi)}{r} \quad (6)$$

公式中的 $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$ 其中 \boldsymbol{x} 是观察点 $\boldsymbol{\xi}$ 是产生磁场的源点。对 (6) 式进行换积分 积分的闭合回路为 γ 可得

$$B_\gamma(x) = \frac{i}{4\pi c} \nabla \times \oint \frac{\boldsymbol{t}}{r} dl = \frac{i}{4\pi c} \oint \frac{\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{r}}{r^3} dl \quad (7)$$

其中 i 为闭合回路为 γ 中的电流 \boldsymbol{t} 为单位矢量 由 (5) 式可知积分路径必须为闭合回路。

假设电流环在一个平面上 且所围的面积为 S 其平面法向的单位矢量为 \boldsymbol{N} 而回路线元的法向单位矢量为 \boldsymbol{n} 如图 1 所示。

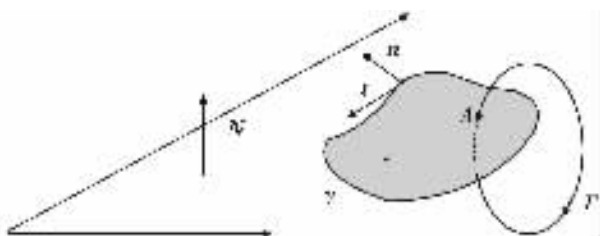


图 1 方向示意图

由图 1 可得

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{n} \quad (8)$$

将 (8) 式带入 (7) 式 可得

$$B_\gamma(x) = \frac{i}{4\pi c} \oint \frac{(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{r}}{r^3} dl \quad (9)$$

应用矢量分析进行计算 可得

$$\begin{aligned} \frac{(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{r}}{r^3} &= -(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{n}) \times \nabla_x \frac{1}{r} = \\ &= -\boldsymbol{n}(\boldsymbol{N} \cdot \nabla_x \frac{1}{r}) + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{n} \cdot \nabla_x \frac{1}{r}) \end{aligned}$$

所以 (9) 式可以改写为如下形式

$$B_\gamma(x) = \frac{i}{4\pi c} \oint \left[-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{N} \cdot \nabla_x \frac{1}{r}) + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{n} \cdot \nabla_x \frac{1}{r}) \right] dl$$

应用格林公式

$$\oint f \boldsymbol{n} dl = \int_S \nabla_\xi f d\sigma$$

其中 $d\sigma$ 为 S 面元有如下的关系

$$\nabla_x \frac{1}{r} = \nabla_\xi \frac{1}{r}$$

将线积分为面积分 可得

$$\begin{aligned} B_\gamma(x) &= \frac{i}{4\pi c} \nabla_x \left[\int_S (\boldsymbol{N} \cdot \nabla_x \frac{1}{r}) d\sigma \right] + \\ &= \boldsymbol{N} \frac{i}{c} \int_S \delta^{(3)}(x - \boldsymbol{\xi}) d\sigma = B_\gamma^1(x) + B_\gamma^2(x) \end{aligned}$$

由 (8) 式可以看出 $B_\gamma(x)$ 是由 2 个部分组成的 $B_\gamma^1(x)$ 是个无旋场 (因为 $B_\gamma^1(x)$ 是个梯度 根据矢量分析可知道 $\nabla \times \nabla \alpha = 0$) 而且在整个空间中都不为零 $B_\gamma^2(x)$ 只有在积分区域内不为零。

现在考虑 B_γ 安培公式的积分形式

$$\oint \boldsymbol{B}_\gamma \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S d\boldsymbol{S} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$$

应用安培公式的微分形式 可得

$$\oint \boldsymbol{B}_\gamma \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{i}{c}$$

其中 τ 是一个闭合的积分回路。把 (8) 式带入 (9) 式 得

$$\oint_\tau \boldsymbol{B}_\gamma \cdot d\boldsymbol{l} = \int_\tau \boldsymbol{B}_\gamma^2 \cdot d\boldsymbol{l}$$

又因 B_γ^2 是一个 delta 函数 所以对其积分由图 1 可以看出 只有在 γ 和 Γ 的相交点 A 处积分才不为零 通过在 A 点积分 可得 B_γ^2 刚好满足安培方程。

现在作这样的近似 当闭合回路的半径趋向零时 即积分区域趋向一点。引入一个常数因子 $\mu = \frac{iS}{c}$ 再来改写 B_γ^1 可得

$$B_\gamma^1(x) = \frac{i}{4\pi c} \nabla_x \left[\int_S (\boldsymbol{N} \cdot \nabla_x \frac{1}{r}) d\sigma \right] =$$

$$\frac{\mu}{4\pi} \nabla_x \left[\frac{1}{S} \int_S \left(\mathbf{N} \cdot \nabla_x \frac{1}{r} \right) d\sigma \right] = \frac{\mu}{4\pi} \nabla_x \left(\mathbf{N} \cdot \nabla_x \frac{1}{r} \right)$$

由中值定理可知

$$\mathbf{N} \cdot \nabla_x \frac{1}{r} = \left(\mathbf{N} \cdot \nabla_x \frac{1}{r} \right)_p$$

式中 p 为积分区域 S 中的一点。当整个积分区域就极限的趋向这点时,有

$$\mathbf{B}_y^1(x) = \frac{1}{4\pi} \nabla_x \left[\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla_x \frac{1}{r} \right]$$

其中 $\boldsymbol{\mu} = \frac{iS}{c} \mathbf{N}$ 这就是一个闭合圆环的磁矩。而(8)

式的第二部分 \mathbf{B}_y^2 可以改写为

$$\mathbf{B}_y^2 = \boldsymbol{\mu} \frac{1}{S} \int_S \delta^3(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\sigma = \boldsymbol{\mu} \delta^3(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$$

由中值定理可知,在积分区域内必有一点 $\boldsymbol{\xi}_0$,有 $\boldsymbol{\mu} \delta^3(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\mu} \delta^3(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_0)$,所以,当 $S \rightarrow 0$ 时,就有 $\mathbf{B}_y^2 \rightarrow \boldsymbol{\mu} \delta^3(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_0)$ 。

由此可以看出(8)式与(3)式是等价的。即一个无限小的电流环所产生的磁场就等同于一个磁偶极矩 $\boldsymbol{\mu} = (iS/c) \mathbf{N}$ 产生的磁场。

3 结论

从上文的计算分析,可以看出微小电流环所产

生的磁场分部,就等同于两个磁子所组成的磁偶极子所产生的磁场,虽然在实验室范围内还没有探测到单磁极的存在,但从理论应用中,使用磁偶极子的概念来研究所得到的结果与现在的理论是不违背的。

参考文献:

- [1] 胡先权,廖海峰,王万录. 导体球壳内的电偶极子的禁闭[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2005,29(1):47-50.
- [2] 徐国亮,朱正和. 碳分子线激发态特性的 TDDFT 方法研究[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2008,31(3):325-327.
- [3] 程守株. 普通物理学[M]. 北京:高等教育出版社,1982.
- [4] 郭硕宏. 电动力学[M]. 北京:高等教育出版社,1983.
- [5] 赵凯华. 电磁学[M]. 北京:高等教育出版社,1999.
- [6] 胡先权,胡文江,马勇. 偏心圆柱面与分离圆柱面带电导体等势面的统一描述[J]. 大学物理,2004,23(8):20-22.
- [7] 胡先权,胡文江,邓树申. 偏心圆柱面静电场的求解[J]. 重庆师范大学学报,1999,16(3):6-10.
- [8] 胡先权,蒋明宇. 直线电荷与带电导体圆柱电场和电力线簇研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(2):44-46.

Study on the Pointlike Circuit and Magnetic Dipole

LI Jing, HU Xian-quan

(College of Physics and Information Technology, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Electric dipole and magnetic dipole are very important concept in electrodynamics. It plays a vital role in studying electric multipole and magnetic multipole. When we used electric multipole to expand the scalar potential or use magnetic multipole to expand the magnetic vector potential, we found that electric dipole or magnetic dipole as the first approximate solve would be the most important parties for the expansion. So, if we want to know the potential's property, we must to study electric dipole and magnetic dipole. While in the area of atom and molecule, it provides a good method to studying atomy and molecules' physical property. It is also the basal theory to discuss dielectric and diamagnetic. So it is important to make students to master the relationship of electric dipole and magnetic dipole. In this paper, we discuss several similarities and differences between the concepts of electric and magnetic dipoles. We then consider the relation between the magnetic dipole and a current loop and show that in the limit of a pointlike circuit, their magnetic fields coincide. The presentation is accessible to students with a acknowledged of the basic ideas of classical electromagnetism.

Key words: electric dipole; magnetic dipole; comparative analysis; pointlike circuit

(责任编辑 欧红叶)