运筹学与控制论

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 05. 001

混合整数二次规划的全局充分性最优条件*

祁云峰, 吴至友
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047)

摘要:利用一些学者提出的一种研究全局最优化问题的全局最优性条件的新方法,讨论了一些带有二次约束的非凸二次规划问题的全局最优性条件。本文主要通过利用拉格朗日函数 $F_{\lambda,u}=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}H_{\lambda,u}x+b_{\lambda,u}^{\mathrm{T}}x+\sum_{i\in I}\lambda_i c_i+\sum_{j\in J}\mu_j c_j$,正则锥($N_{L,D}(x_0)=\{l\in L: l(y)-l(x_0)\leqslant 0,\forall y\in D\}$)和 L-次微分相结合的方法,给出了带不等式约束的混合整数二次规划最小问题的全局极小点的全局最优性充分条件,而且推广了现有文献中的一些结论。同时通过一些实值例子说明了本文给出的最优性充分条件的可行性和有效性。

关键词:二次混合整数规划;不等式约束;等式约束;充分性条件
中图分类号:O221.1 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2010)05-0001-04

全局最优化领域的最基本的理论之一就是怎样判定一个给定的解是否是全局最优解。全局最优型必要条件是说明一个解不是全局最优解的一种工具之一。而全局最优性充分条件是用来说明一个解是全局最优解的工具之一。近年来,关于如何刻画一个凸规划问题的解,特别是在给出凸规划问题的必要条件方面已经取得了很大的进展[1-9]。然而,在如何刻画一个非凸规划问题的全局最优解方面的进展却很有限。通过利用 L-次微分给出了带双值与不等式约束的非凸二次规划问题的全局最优性充分条件[3];有学者提出了带箱子约束的非凸二次规划问题的全局最优性充分条件[2]。本文通过利用拉格朗日函数和 L-次微分,给出了对于带有不等式与等式约束的混合整数非凸二次规划问题的全局最优性充分条件。

考虑下面非线性最优化问题:(MIQP)

$$\min f(x)=x^{\mathrm{T}}A_0x+x^{\mathrm{T}}a_0$$

$$\text{s.t.}\quad g_i(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_ix+x^{\mathrm{T}}a_i+c_i\leqslant 0$$

$$i=1,2,\cdots,m$$

$$g_j(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_jx+x^{\mathrm{T}}a_j+c_j=0$$

$$j=m+1,m+2,\cdots,m+p$$

$$x\in\prod_{l\in M}[u_l,v_l]\prod_{e\in N}\{p_e,p_e+1,\cdots,q_e\}$$

其中 $M\cap N=\varnothing$,$M\cup N=\{1,2,\cdots,n\}$,$u_l,v_l\in\mathbf{R}$,$u_l<v_l$,对任何 $l\in M$;p_e,q_e 都是整数且 $p_e<q_e$,$\forall e\in N$。$a_i=(a_i^1,a_i^2,\cdots,a_i^n)^{\mathrm{T}}$,$A_i=S^n$,$i=0,1,\cdots,m+p$。该模型包含了一大类的二次最优化问题。

1 预备知识

介绍文章中所运用到的一些基本的定义与记号。$\mathbf{R}$ 表示实线性空间,$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧几里德空间,$\mathbf{R}_+^n$ 表示 n 维非负欧几里德空间,对于向量 $x,y\in\mathbf{R}^n$,$x\geqslant y\Leftrightarrow x_i\geqslant y_i$,$i=1,2,\cdots,n$。记号 $A\geqslant B\Leftrightarrow A-B$ 是半正定矩阵。用 $diag(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 表示对角元素为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的对角矩阵,设 L 为所有定义在 $\mathbf{R}^n$ 上一些实值函数的集合。

定义 1[8] (L-次微分)设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 且 $x_0\in\mathbf{R}^n$,$l\in L$,若 $f(x)\geqslant f(x_0)+l(x)-l(x_0)$,$\forall x\in\mathbf{R}^n$,则称 l 为 f 在 x_0 处的 L-次微分。

$\partial_L f(x)$ 表示 f 在 x_0 处的所有 L-次微分的集合。注意到如果 L 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 中所有线性函数的集合,则对于任意定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的实值凸函数 f,都有 $\partial_L f(x)=\partial f(x)$,其中 $\partial f(x)$ 为在文献[9]的关于凸函数的次微分。

定义 2[3] 正则锥:对于集合 $D\subset\mathbf{R}^n$ 且 $x_0\in D$,则 D 在 x_0 关于 L 的正则锥定义如下形式

$$N_{L,D}(x_0)=\{l\in L: l(y)-l(x_0)\leqslant 0,\forall y\in D\}$$

* 收稿日期:2010-04-17
资助项目:重庆市自然科学基金(No. 2007BB9233)
作者简介:祁云峰,女,硕士研究生,研究方向为最优化理论与方法;通讯作者:吴至友,E-mail:zhiyouwu@263. net

文章余下部分选用 L 为如下的函数集

$$L := \left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx + \beta^{\mathrm{T}}x : Q = diag(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n\right\}$$

注意 L 满足性质:$-l \in L, \forall l \in L$。

对于(MIQP),令

$$I := \{1,2,\cdots,m\}, J := \{m+1, m+2, \cdots, m+p\}$$

$$U := \prod_{l\in M}[u_l, v_l]\prod_{e\in N}\{p_e, p_{e+1}, \cdots, q_e\}$$

$$S := \{x \in u : g_i(x) \leqslant 0, g_j(x) = 0, i \in I, j \in J\}$$

考虑 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}_+^m$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^p, H_{\lambda,\mu} = A_0 + \sum_{i\in I}\lambda_i A_i + \sum_{j\in J}\mu_j A_j$$

$$b_{\lambda,\mu} = a_0 + \sum_{i\in I}\lambda_i a_i + \sum_{j\in J}\mu_j a_j$$

$$F_{\lambda,\mu} = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}H_{\lambda,\mu}x + b_{\lambda,\mu}^{\mathrm{T}}x + \sum_{i\in I}\lambda_i c_i + \sum_{j\in J}\mu_j c_j$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^{\mathrm{T}} \in S, \bar{X} = diag(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$$

引理1 设 $\bar{x} \in S$,如果存在 $\lambda \in \mathbf{R}_+^m, \mu \in \mathbf{R}^p$,使得 $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, i \in I$,如果 $-\partial_L F_{\lambda,\mu}(\bar{x}) \cap N_{L,U}(\bar{x}) \neq \varnothing$,则 $\bar{x}$ 为(MIQP)的全局极小点。

证明 由已知条件,存在着一个 $l \in N_{L,U}(\bar{x})$,使得 $-l \in \partial F_{\lambda,\mu}(\bar{x})$,有

$$F_{\lambda,\mu}(x) - F_{\lambda,\mu}(\bar{x}) \geqslant -l(x) + l(\bar{x}), \forall x \in U$$

由定义知 $l(x) - l(\bar{x}) \leqslant 0$,则 $F_{\lambda,\mu}(x) - F_{\lambda,\mu}(\bar{x}) \geqslant 0$,因为

$$F_{\lambda,\mu}(x) - F_{\lambda,\mu}(\bar{x}) \leqslant f(x) - f(\bar{x}), \forall x \in S$$

所以 $f(x) - f(\bar{x}) \geqslant 0, \forall x \in S$。故 $\bar{x}$ 为(MIQP)的全局极小点。 证毕

2 混合整数二次规划的全局最优性充分条件

这一部分将针对(MIQP)推导出它的全局最优充分性条件。

命题1[3] 对于 $\bar{x} \in \mathbf{R}^n, \lambda \in \mathbf{R}_+^m$,且 $\mu \in \mathbf{R}^p$,有

$$\partial_L F_{\lambda,\mu}(\bar{x}) = \left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx + x^{\mathrm{T}}\beta \mid H_{\lambda,\mu} - Q \geqslant 0, \beta = b_{\lambda,\mu} + (H_{\lambda,\mu} - Q)\bar{x}, Q = diag(\alpha), \alpha \in \mathbf{R}^n\right\}$$

对于(MIQP),令 $\bar{x} \in S, \forall l \in M, e \in N$,定义如下

$$\tilde{x}_l = \begin{cases} -1, \bar{x}_l = u_l \\ 1, \bar{x}_l = v_l \\ \operatorname{sign}(H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_l, \bar{x}_l = (u_l, v_l) \end{cases}$$

$$\tilde{x}_e = \begin{cases} -1, \bar{x}_e = p_e \\ 1, \bar{x}_e = q_e \\ \operatorname{sign}(H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_e, \bar{x}_e = \{p_e + 1, \cdots, q_e - 1\} \end{cases}$$

$$\operatorname{sign}(H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu}) = \begin{cases} -1, (H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_k < 0 \\ 0, (H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_k = 0 \\ 1, (H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_k > 0 \end{cases}$$

$$b_{\tilde{x}_l} := \frac{\tilde{x}_l(H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_l}{v_l - u_l}$$

$$b_{\tilde{x}_e} := \max\left\{\frac{\tilde{x}_e(H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_e}{1}, \frac{\tilde{x}_e(H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_e}{q_e - p_e}\right\}$$

$$b_{\tilde{x}} := (b_{\tilde{x}_1}, \cdots, b_{\tilde{x}_n})^{\mathrm{T}}$$

对于

$$Q = diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\tilde{\alpha}_i := \min\{\alpha_i, 0\}, \tilde{Q} := diag(\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_n)$$

命题2 设 $\bar{x} \in S$,且 $\beta = b_{\lambda,\mu} + (H_{\lambda,\mu} - Q)\bar{x}$。如果 $diag(b_{\tilde{x}}) \leqslant \frac{1}{2}\tilde{Q}$,则 $-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx - \beta^{\mathrm{T}}x \in N_{L,S}(\bar{x})$。

证明 令 $l(x) = -\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx - \beta^{\mathrm{T}}x$,由定义知,若

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\alpha_i(x_i - \bar{x}_i)^2 + (\beta_i + \alpha_i\bar{x}_i)(x_i - \bar{x}_i)\right] \geqslant 0, \quad \forall x \in S \tag{1}$$

则有 $l(x) \in N_{L,S}(\bar{x})$。

由 $\beta = b_{\lambda,\mu} + (H_{\lambda,\mu} - Q)\bar{x}$ 知,(1)式与下面(2)式等价

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\alpha_i(x_i - \bar{x}_i)^2 + (b_{\lambda,\mu} + H_{\lambda,\mu}\bar{x})_i(x_i - \bar{x}_i)\right] \geqslant 0, \quad \forall x \in S \tag{2}$$

如果对任意的 $i = 1, \cdots, n$ 有

$$\frac{1}{2}\alpha_i(x_i - \bar{x}_i) + (b_{\lambda,\mu} + H_{\lambda,\mu}\bar{x})_i(x_i - \bar{x}_i) \geqslant 0, \quad \forall x \in S$$

则(2)式成立。

当 $x_l \in [u_l, v_l]$ 时,则由定义有 $diag(b_{\tilde{x}}) \leqslant \frac{1}{2}\tilde{Q}$ 与下面(3)式等价

$$\tilde{x}_l(H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_l \leqslant \min\left\{0, \frac{(v_l - u_l)\alpha_l}{2}\right\} \tag{3}$$

情况1:令 $\bar{x}_l = u_l$,则(3)式成立,当且仅当

$$\begin{cases} (H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_l \geqslant 0, \alpha_l \geqslant 0 \\ (H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_l \geqslant -\frac{(v_l - u_l)\alpha_l}{2}, \alpha_l < 0 \end{cases}$$

当且仅当

$$\frac{1}{2}\alpha_l(x_l - \bar{x}_l) + (H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_l \geqslant 0, \forall x_l \in (u_l, v_l]$$

故 $\frac{1}{2}\alpha_l(x - \bar{x}_l)^2 + (H_{\lambda,\mu}\bar{x} + b_{\lambda,\mu})_l(x_l - \bar{x}_l) \geqslant 0$。

情况2:令 $\bar{x}_l = v_l$,则(3)式成立,当且仅当

$$\begin{cases}(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_l \leqslant 0, \alpha_l \geqslant 0 \\ (H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_l \leqslant \dfrac{(v_l-u_l)\alpha_1}{2}, \alpha_1 < 0\end{cases}$$

当且仅当

$$\frac{1}{2}\alpha_l(x_l-\bar{x}_l)+(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_l \leqslant 0, \forall x_l \in [u_l,v_l)$$

故 $\frac{1}{2}\alpha_l(x_l-\bar{x}_l)^2+(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_l(x_l-\bar{x}_l) \geqslant 0$。

情况 3 :令 $\bar{x}_l \in (u_l,v_l)$,则(3)式成立,当且仅当 $(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_l = 0, \alpha_1 \geqslant 0$

当且仅当

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\alpha_l(x_l-\bar{x}_l)+(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_l \leqslant 0, x_l \in [u_l,\bar{x}_L) \\ \dfrac{1}{2}\alpha_l(x_l-\bar{x}_l)+(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_l \geqslant 0, x_l \in (\bar{x}_L,v_l]\end{cases}$$

故 $\frac{1}{2}\alpha_l(x_l-\bar{x}_l)^2+(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_l(x_l-\bar{x}_l) \geqslant 0$。

当 $x_e \in \{p_e,p_e+1,\cdots,q_e\}$ 时,$diag(b_{\bar{x}}) \leqslant \frac{1}{2}\tilde{Q}$ 与下面(4)式等价

$$\tilde{x}_e(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e \leqslant \min\left\{\frac{\alpha_e}{2},\frac{(q_e-p_e)\alpha_e}{2}\right\} \quad (4)$$

情况 4 :令 $\bar{x}_e = p_e$,(4)式成立,当且仅当

$$\begin{cases}(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e \geqslant -\dfrac{\alpha_e}{2}, \alpha_e \geqslant 0 \\ (H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e \geqslant -\dfrac{(q_e-p_e)\alpha_e}{2}, \alpha_e < 0\end{cases}$$

当且仅当 $\frac{1}{2}\alpha_e(x_e-\bar{x}_e)+(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e \geqslant 0$

$$\forall x_e \in \{p_e+1,p_e+2,\cdots,q_e\}$$

故 $\frac{1}{2}\alpha_e(x_e-\bar{x}_e)^2+(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e(x_e-\bar{x}_e) \geqslant 0$

情况 5 :令 $\bar{x}_e = q_e$,(4)式成立,当且仅当

$$\begin{cases}(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e \leqslant \dfrac{\alpha_e}{2}, \alpha_e \geqslant 0 \\ (H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e \leqslant \dfrac{(q_e-p_e)\alpha_e}{2}, \alpha_e < 0\end{cases}$$

当且仅当 $\frac{1}{2}\alpha_e(x_e-\bar{x}_e)+(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e \geqslant 0$

$$\forall x_e \in \{p_e,p_e+1,\cdots,q_e-1\}$$

故 $\frac{1}{2}\alpha_e(x_e-\bar{x}_e)^2+(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e(x_e-\bar{x}_e) \geqslant 0$

情况6 :令 $\bar{x}_e \in \{p_e+1,\cdots,q_e-1\}$,(4)式成立,

当且仅当 $-\frac{\alpha_e}{2} \leqslant (H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e \leqslant \frac{\alpha_e}{2}, \alpha_e \geqslant 0$

当且仅当

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\alpha_e(x_e-\bar{x}_e)+(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e \leqslant 0, x_e \in \{p_e,\cdots,\bar{x}_e-1\} \\ \dfrac{1}{2}\alpha_e(x_e-\bar{x}_e)+(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e \geqslant 0, x_e \in \{\bar{x}_e-1,\cdots,q_e\}\end{cases}$$

故 $\frac{1}{2}\alpha_e(x_e-\bar{x}_e)^2+(H_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_e(x_e-\bar{x}_e) \geqslant 0$。

由上面的讨论得知命题 2 成立。　　证毕

定理1　设 $\bar{x} \in S$,且存在 $\lambda \in \mathbf{R}_+^m, \mu \in \mathbf{R}^p$,使得 $\sum_{i \in I}\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$,如果[SC1] $\begin{cases}b_{\bar{x}_i} \leqslant 0, l \in M \\ diag(b_{\bar{x}}) \leqslant \dfrac{H_{\lambda,\mu}}{2}\end{cases}$,则 $\bar{x}$ 为(MIQP)的全局极小点。

证明　由引理 1 知,如果存在一个 $l(x) \in \partial_L F_{\lambda,\mu}(\bar{x}) \cap (-N_{L,S}(\bar{x}))$,则 $\bar{x}$ 为(MIQP)的全局最小点。

由命题 1 与命题 2 知,如果

$$\begin{cases}Q \leqslant H_{\lambda,\mu} \\ diag(b_{\bar{x}}) \leqslant \dfrac{1}{2}\tilde{Q}\end{cases} \quad (5)$$

则 $l(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx+\beta^{\mathrm{T}}x \in \partial_L F_{\lambda,\mu}(\bar{x}) \cap (-N_{L,S}(\bar{x}))$

显然(5)式与[SC1]等价。

事实上,如果(5)式成立,则

$$diag(b_{\bar{x}}) \leqslant \frac{Q}{2} \leqslant \frac{H_{\lambda,\mu}}{2}$$

相反,如果[SC1]成立,则可取 $Q = 2diag(b_{\bar{x}})$,从而 $Q = \tilde{Q}, H_{\lambda,\mu}-Q \geqslant 0$ 且 $diag(b_{\bar{x}}) \leqslant \frac{1}{2}\tilde{Q}$。

因此,若[SC1]成立,$\bar{x}$ 是(MIQP)的全局极小点。　　证毕

设 $A \in S^n$,定义 $E(A)$ 为 A 的最小特征值,$1 := (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$。

推论1　设 $x \in S$,且存在 $\lambda_i \geqslant 0, i \in I$ 和 $\mu_j, j \in J$ 为任意实数,使得 $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, i \in I$,如果

$$[\mathrm{SC2}]\begin{cases}b_{\bar{x}_l} \leqslant 0, l \in M \\ E\left(\dfrac{H_{\lambda,\mu}}{2}\right)\cdot 1 \geqslant b_{\bar{x}}\end{cases}$$

则 $\bar{x}$ 为(MIQP)的全局极小点。

证明　$E\left(\frac{H_{\lambda,\mu}}{2}-diag(b_{\bar{x}})\right) \geqslant$

$$E\left(\frac{H_{\lambda,\mu}}{2}\right)+E(-diag(b_{\bar{x}})) = E\left(\frac{H_{\lambda,\mu}}{2}\right)+E(diag(-b_{\bar{x}})) = E\left(\frac{H_{\lambda,\mu}}{2}\right)+\min_{1 \leqslant i \leqslant n}(-b_{\bar{x}})_i = E\left(\frac{H_{\lambda,\mu}}{2}\right)-\max_{1 \leqslant i \leqslant n}(b_{\bar{x}})_i$$

所以 $E\left(\frac{H_{\lambda,\mu}}{2}\right)\cdot 1 \geqslant b_{\bar{x}}$,则 $E\left(\frac{H_{\lambda,\mu}}{2} - diag(b_{\bar{x}})\right) \geqslant 0$。

故 $diag(b_{\bar{x}}) \leqslant \frac{H_{\lambda,\mu}}{2}$,由定理 1 得知,推论成立。

证毕

例 1 考虑如下问题

$$\min f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 12x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

$$\text{s.t. } g_1(x) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 - x_2 - \frac{1}{2} \leqslant 0$$

$$g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 = 0$$

$$x \in S = [-1,1] \times \{-1,0,1\}$$

解 由题可知 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$,$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,$a_0 = \left(-12,\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$,$a_1 = (1,-1)^{\mathrm{T}}$,$a_2 = (-1,-1)^{\mathrm{T}}$。

取 $\bar{x} = (1,1)^{\mathrm{T}}$,$\lambda = 2$,$\mu = 2$,$b_{\bar{x}} = \left(-\frac{5}{2},0\right) \leqslant 0$,$H_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 9 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$,$diag(b_{\bar{x}}) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$\frac{1}{2}H_{\lambda,\mu} - diag(b_{\bar{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{23}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \geqslant 0$,$\lambda g_1(\bar{x}) = 0$。

事实上,$\bar{x}$ 是全局极小点。

参考文献:

[1] Beck A,Teboulle M. Golbal optimality conditions for quadratic optimization problems with binary constraints[J]. SIAM J OPTIM,2000,11:197-188.

[2] Jeyakumar V,Rubinov A M,Wu Z Y. Sufficient global optimlity conditions for non-convex quadratic optimization problems with box contrains[J]. J Global Optim,2006,36(3):471-481.

[3] Wu Z Y,Jeyakumar V,Rubinov A M. Sufficient conditions for global optimality of bivaleent nonconvex quadratic programs with inequality conditions[J]. J Optim Theory Appl,2007,133:123-130.

[4] Wu Z Y. Sufficient global optimality conditions for weakly convex minimization problems[J]. J Global Optim,2007,39(3):427-440.

[5] Jeykumar V,Rubinov A M,Wu Z Y. Non-convex quadratic minimization with quadratic constraints:global optimality conditions[J]. Math Program (A),2007,110:512-514.

[6] Rubinov A M,Wu Z Y. Optimality conditions in global optimization and their applizations[J]. Mathematic Programming,2009, 120:101-123.

[7] Rubinov A M. Abstract convexity and golbal optimization [M]. Dordrechet:Kluwer Academic Publishers,2000.

[8] Hiriart-Urruty J B,Lemarechal C. Convex analysis and minmization algorithms[M]. Berlin:Spring, 1933.

[9] 李国权,吴至友. 带有二次约束的一些非凸二次规划问题的全局最优性条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2008,25(3):1-4.

Operations Research and Cybernetics

Sufficient Global Optimality Conditions for Mixed-Integer Quadratic Minimization Problem with Inequality Constraints

QI Yun-feng, WU Zhi-you

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 40047, China)

Abstract: In this paper, we mainly study the global optimality conditions for some noncovex quadratic problems with quadratic constraints by using an approach to establish sufficient global conditions suggested by Z. Y. Wu. In this paper, we give global optimality conditions of global minimizer point for mixed integer quadratic minimizer programming with inequality and equality constrains by using lagrangian function $F_{\lambda,u} = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}H_{\lambda,u}x + b_{\lambda,u}^{\mathrm{T}}x + \sum_{i\in I}\lambda_i C_i + \sum_{j\in J}\mu_j C_j$, normal cone $N_{L,D}(x_0) = \{l \in L: l(y) - l(x_0) \leqslant 0, \forall y \in D\}$ and L-subdifferential approach. Firstly, we proof lemma 1 and proposition 2. Then by using above two conclusions, some sufficient global optimality conditions for mixed-integer quadratic minimization problem with inequality are obtained. Based on the theorem, we get several deductions. Lastly, the effective and feasibility of sufficient optimality conditions are illustrsted by some numerical examples.

Key words: quadratic mixed integer program; inequality constraints; equality constraints; sufficient conditions

(责任编辑 黄 颖)