2010 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2010
第 27 卷 第 5 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 27 No. 5

运筹学与控制论

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 05. 002

一类非光滑锥约束规划问题的混合对偶*

唐莉萍, 赵克全
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047)

摘要:研究了非光滑锥约束规划问题的混合对偶模型的弱对偶、强对偶和逆对偶结果。在 K- 广义不变凸性、K- 广义伪不变凸性条件下证明了两个弱对偶定理;在 K- 广义不变凸性条件下,利用广义 Slater 约束规格给出了强对偶定理;在 K- 非光滑不变凸性和非光滑伪不变凸性下研究了该类模型的逆对偶定理。

关键词:K-广义不变凸性;混合对偶;非光滑锥约束规划问题
中图分类号:O221.2;O174.2 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2010)05-0005-04

凸性理论及其应用是数学规划与最优化理论中十分重要的研究内容。近年来,许多作者研究了凸性概念的多种推广形式[1-10]。1981 年,Hanson 给出了不变凸函数且讨论了这类函数的相关最优性理论[1]。随后,许多学者对不变凸性进行了研究。特别地,向量情形的锥广义不变凸性已成为数学规划与最优化研究的热点之一。Craven 给出了锥不变凸函数的定义[2],且 Craven 和 Glover 研究了这类函数的性质并给出了最优条件和对偶理论[3]。Khurana 定义了锥伪不变凸和强锥伪不变凸函数,给出了该锥广义凸性下多目标规划问题的对偶模型,建立了弱对偶、强对偶和逆对偶定理[4]。然而,许多学者对非光滑情形更为感兴趣。Reliand 利用 Clarke 次微分,对局部 Lipschitz 向量值函数定义了 4 种非光滑锥广义凸性,将可微的 K- 不变凸推广到非光滑的情形,在 K- 广义凸性假设下得到了此类非光滑不带约束和带锥约束的规划问题的最优性条件[5],建立了弱对偶和强对偶结果。而 Suneja 等人利用 Clarcke 广义梯度,进一步推广了锥不变凸性概念,定义了 K- 非光滑拟不变凸和 K- 非光滑伪不变凸,建立了此类非光滑规划问题的最优性条件及 Mond Wier 型对偶结果[6]。

受文献[6]的启发,本文主要讨论非光滑多目标锥规划问题的混合型对偶问题,建立了弱对偶和逆对偶定理,在广义 Slater 约束规格下建立了非光滑锥约束规划问题的强对偶结果。

1 预备知识

设 $K \subset \mathbf{R}^m$ 是非空闭凸锥,记 $\operatorname{int} K$ 和 $\overline{K}$ 分别为 K 的内部和闭包。K 的正对偶锥 K^+ 和严格正对偶锥 K^{S+} 分别表示为 $K^+ = \{y^* \in \mathbf{R}^m : \langle y, y^* \rangle \geqslant 0, \forall y \in K\}$,$K^{S+} = \{y^* \in \mathbf{R}^m : \langle y, y^* \rangle > 0, \forall y \in K\}$。

本文考虑下面的非光滑多目标规划问题

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{VP}) \quad & K - \min f(x) \\
& \text{s.t.} \ -g(x) \in Q
\end{aligned}
$$

其中 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$,$g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$,$K$ 和 Q 分别是 $\mathbf{R}^m$,$\mathbf{R}^p$ 中内部非空的闭凸锥。

记 $X_0 = \{x \in \mathbf{R}^n : -g(x) \in Q\}$ 为问题(VP)的可行域,且 $\tau \in K^+$,$\lambda \in Q^+$。假设 $\tau f = \xi \circ f$ 和 $\lambda g = \lambda \circ g$ 是局部 Lipschitz 函数。

定义 1[7] 设 X 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开子集,称函数 $f: X \to \mathbf{R}^n$ 在 $x \in X$ 上是局部 Lipschitz 的。如果对任意的 $y, z \in N_\delta(x)$,存在常数 $K > 0$,使得 $|f(y) - f(z)| \leqslant K\|y - z\|$,其中 $N_\delta(x)$ 是 x 的某个领域。如果 f 在 X 上任意点都是局部 Lipschitz 的,则称 f 在 X 上是局部 Lipschitz 的。

* 收稿日期:2009-11-22
资助项目:国家自然科学基金(No. 10771228);重庆师范大学青年基金项目(No. 08XLQ01)
作者简介:唐莉萍,女,硕士研究生,研究方向为广义凸性与非光滑分析。通讯作者:赵克全,E-mail:kequanz@163.com

定义2[7] 设$f:X\to \mathbf{R}$是局部Lipschitz的,$v\in \mathbf{R}^n$,定义$f^0(x,v)$为f在x处沿方向v的广义Clarke导数,且记为$f^0(x,v)=\limsup\limits_{y\to x,\lambda\downarrow 0}\dfrac{f(y+\lambda v)-f(y)}{\lambda}$。

定义3[7] 设$f:X\to \mathbf{R}$是局部Lipschitz的,f在$x\in X$处的广义Clarke梯度定义为$\partial f(x)$,并记为$\partial f(x)=\{\xi\in \mathbf{R}^n:f^0(x,v)\geqslant \xi^{\mathrm{T}}v,\forall v\in \mathbf{R}^n\}$。

局部Lipschitz函数$f:\mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^m$在$x\in \mathbf{R}^n$沿方向$v$的广义Clarke导数定义为$f^0(x,v)=(f_1^0(x,v),\cdots,f_m^0(x,v))$,广义Clarke梯度定义为$\partial f(x)=\partial f_1(x)\times\cdots\times\partial f_m(x)$,其中$\partial f_i(x)$是$f_i(i=1,\cdots,m)$在$x$处的广义Clarke梯度。记$A=(v_1,\cdots,v_m)\in\partial f(x)$为$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^m$的连续线性算子,且$Ax=(\langle v_1,x\rangle,\cdots,\langle v_m,x\rangle)\in \mathbf{R}^m$。

定义4 设$\bar{x}\in X_0$,则

1)$\bar{x}$称为(VP)的弱有效解。如果对任意的$x\in X_0$,有$f(\bar{x})-f(x)\notin \operatorname{int}K$;

2)$\bar{x}$称为的(VP)有效解。如果对任意的$x\in X_0$,有$f(\bar{x})-f(x)\notin K\backslash\{0\}$。

定义5[5] f在$\bar{x}\in \mathbf{R}^n$处称为是K-广义不变凸,如果存在函数$\eta:\mathbf{R}^n\times \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^n$,使得对任意的$x\in \mathbf{R}^n$,$\xi\in\partial f(\bar{x})$,都有$f(x)-f(\bar{x})-\xi\eta(x,\bar{x})\in K$。

定义6[5] f在$\bar{x}\in \mathbf{R}^n$处称为是K-非光滑不变凸,如果存在函数$\eta:\mathbf{R}^n\times \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^n$,使得对任意的$x\in \mathbf{R}^n$,都有$f(x)-f(\bar{x})-f^{\circ}(\bar{x};\eta)\in K$。

定义7[6] f在$\bar{x}\in \mathbf{R}^n$处称为K-非光滑伪不变凸。如果存在$\eta:\mathbf{R}^n\times \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^n$,使得对任意的$x\in \mathbf{R}^n$,都有$-f^{\circ}(\bar{x};\eta(x,\bar{x}))\notin \operatorname{int}K\Rightarrow-(f(x)-f(\bar{x}))\notin \operatorname{int}K$。

定义8[6] f在$\bar{x}\in \mathbf{R}^n$处称为K-非光滑拟不变凸。如果存在$\eta:\mathbf{R}^n\times \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^n$,使得对任意的$x\in \mathbf{R}^n$,都有$f(x)-f(\bar{x})\notin \operatorname{int}K\Rightarrow -f^{\circ}(\bar{x};\eta(x,\bar{x}))\in K$。

其中$f^{\circ}(\bar{x};\eta)=(f_1^{\circ}(\bar{x};\eta),\cdots,f_m^{\circ}(\bar{x};\eta))$。

定义9[6] 如果存在$\bar{x}\in \mathbf{R}^n$,使$-g(\bar{x})\in \operatorname{int}Q$,则称问题(VP)满足广义Slater约束规格。

2 混合类型对偶

本文主要考虑非光滑锥约束多目标问题(VP)的混合型对偶问题。首先,给出问题(VP)的混合型对偶问题

$$(\mathrm{MD})\qquad \max\ \varphi(y,\lambda)=f(y)+\lambda g(y)r$$

$$\text{s.t.}\quad 0\in\partial(\tau f)(y)+\partial(\lambda g)(y) \tag{1}$$

$$\lambda g(y)\geqslant 0,\forall y\in \mathbf{R}^n \tag{2}$$

$$0\neq\tau\in K^+,\tau r=1,\lambda\in Q^+ \tag{3}$$

其中r是$\operatorname{int}K$中的任意固定量。

接下来,给出问题(VP)的几个对偶定理。

定理1 (弱对偶定理)设x和(y,τ,λ)分别是问题(VP),(MD)的可行解。如果下列条件之一成立

1)$f+\lambda gr$在$y\in \mathbf{R}^n$处是关于$\eta:\mathbf{R}^n\times \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^n$的$K$-广义不变凸函数且$\tau>0,\lambda\geqslant 0$。此外,若$f,g$在$y$处是正则的;

2)f和g在$y\in \mathbf{R}^n$处关于相同的$\eta:\mathbf{R}^n\times \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^n$分别是$K$-广义不变凸函数和$Q$-广义不变凸函数且$\tau>0,\lambda\geqslant 0$,那么$\varphi(y,\lambda)-f(x)\notin \operatorname{int}K$。

证明 只证情形1)。情形2)的证明与情形1)类似。反设$\varphi(y,\lambda)-f(x)\in \operatorname{int}K$,则

$$[\tau f+\lambda g](y)-(\tau f)(x)>0 \tag{4}$$

因为$f+\lambda gr$在$y\in \mathbf{R}^n$处是关于$\eta:\mathbf{R}^n\times \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^n$的$K$-广义不变凸函数,有

$$[f+\lambda gr](x)-[f+\lambda gr](y)-\xi\eta(x,y)\in K,\forall\xi\in\partial(f+\lambda gr)(y)$$

由(3)式可得

$$[\tau f+\lambda g](x)-[\tau f+\lambda g](y)-\tau\xi\eta(x,y)\geqslant 0,\forall\xi\in\partial(f+\lambda gr)(y) \tag{5}$$

由(4)、(5)式,可得

$$\lambda g(x)-\tau\xi\eta(x,y)>0,\forall\xi\in\partial(f+\lambda gr)(y) \tag{6}$$

因 x 是问题(VP)的可行解,知 $\lambda g(x)\leqslant 0$,再由(6)式得 $-\tau\xi\eta(x,y)>0,\forall\xi\in\partial(f+\lambda gr)(y)$。即 $z^*\eta(x,y)<0$,其中 $z^*=\tau\xi\in\partial(\tau f+\lambda g)(y),\tau>0$。因 f,g 在 y 处是正则的,知

$$\partial(\tau f+\lambda g)=\partial(\tau f)+\partial(\lambda g)$$

从而 $z^*\eta(x,y)<0$,其中

$$z^*=\tau\xi\in\partial(\tau f)(y)+\partial(\lambda g)(y),\tau>0$$

这与(1)式矛盾。故 $\varphi(y,\lambda)-f(x)\notin\operatorname{int}K$。　证毕

定理 2　(弱对偶定理)设 x 和 (y,τ,λ) 分别是问题(VP),(MD)的可行解。如果 $f+\lambda gr$ 在 $y\in\mathbf{R}^n$ 处是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的 K-非光滑伪不变凸函数且 $\tau>0,\lambda\geqslant 0$。此外,若 f,g 在 y 处是正则的,那么 $\varphi(y,\lambda)-f(x)\notin\operatorname{int}K$。

证明　反设

$$\varphi(y,\lambda)-f(x)\in\operatorname{int}K \tag{7}$$

而 $-(\lambda gr)(x)\in K$。否则 $-(\lambda gr)(x)\notin K$,再由(3)式可得 $-(\tau\lambda gr)(x)=-(\lambda g)(x)<0$。这与 x 是问题(VP)的可行解相矛盾。由(7)式可得 $[f+\lambda gr](y)-[f+\lambda gr](x)\in\operatorname{int}K$。因为 $f+\lambda gr$ 在 $y\in X_0$ 处是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的 K-广义伪不变凸函数,知 $-[f+\lambda gr]^\circ(y,\eta(x,y))\in\operatorname{int}K$。

再由(3)式,可得 $[\tau f+\lambda g]^\circ(y,\eta(x,y))<0$,这等价于 $\xi\eta(x,y)<0,\forall\xi\in\partial[\tau f+\lambda g](y)$。而函数 f 和 g 在 y 处是正则的,故有

$$\xi\eta(x,y)<0,\forall\xi\in\partial(\tau f)(y)+\partial(\lambda g)(y)$$

这与(1)式矛盾。故 $\varphi(y,\lambda)-f(x)\notin\operatorname{int}K$。　证毕

定理 3　(强对偶定理)设 x_0 是问题(VP)的弱有效解且广义 Slater 约束规格满足。如果 f 在 x_0 处是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的 K-广义不变凸函数,g 在 x_0 处是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的 Q-广义不变凸函数,则存在 $0\neq\tau_0\in K^+,\lambda_0\in Q^+$,使得 (x_0,τ_0,λ_0) 是问题(MD)的可行解。此外,如果弱对偶定理的条件满足,那么 (x_0,τ_0,λ_0) 是问题(MD)的弱极大值点,且目标函数值相等。

证明　因 x_0 是问题(VP)的弱有效解且广义 Slater 约束规格满足,由 Kuhn-Tucker 必要条件[6],存在 $0\neq\tau_0\in K^+,\lambda_0\in Q^+$,使得

$$0\in\partial(\tau_0 f)(x_0)+\partial(\lambda_0 g)(x_0),\lambda_0 g(x_0)=0$$

这意味着 (x_0,τ_0,λ_0) 是问题(MD)的可行解。

反设 (x_0,τ_0,λ_0) 不是问题(MD)的弱有效解,则存在问题(MD)的可行解 (y,τ,λ),使得 $[f+\lambda gr](y)-[f+\lambda gr](x_0)\in\operatorname{int}K$。即 $[f+\lambda gr](y)-f(x_0)\in\operatorname{int}K$。这与弱对偶定理矛盾。　证毕

定理 4　(逆对偶定理)设 $(\bar{y},\bar{\tau},\bar{\lambda})$ 是问题(MD)的可行解且 $\bar{y}\in X_0$。如果下列条件之一满足

1)$f+\lambda gr$ 在 $\bar{y}\in X_0$ 处是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的 K-广义不变凸函数,且 f,g 在 $\bar{y}$ 处是正则的;

2)f,g 在 $\bar{y}\in X_0$ 处关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 分别是 K-非光滑伪不变凸函数和 Q-非光滑拟不变凸函数。那么 $\bar{y}$ 是问题(VP)的弱有效解。

证明　只证明情形 1)。情形 2)的证明与文献[6]中的逆对偶类似。反设 $\bar{y}$ 不是问题(VP)的弱有效解。则存在 $\tilde{x}\in D$ 使得 $f(\bar{y})-f(\tilde{x})\in\operatorname{int}K$。故

$$\bar{\tau}(f(\bar{y})-f(\tilde{x}))>0 \tag{8}$$

因 $f+\lambda gr$ 在 $\bar{y}\in X_0$ 处是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的 K-广义不变凸函数,知

$$[f+\lambda gr](\tilde{x})-[f+\lambda gr](\bar{y})-\xi\eta(\tilde{x},\bar{y})\in K,\forall\xi\in\partial[f+\lambda gr](\bar{y})$$

又因 $(\bar{y},\bar{\tau},\bar{\lambda})$ 是问题(MD)的可行解且 f,g 在 $\bar{y}$ 处是正则的,知 $\forall z=\bar{\tau}\xi\in\partial(\bar{\tau}f)(\bar{y})+\partial(\bar{\lambda}g)(\bar{y})$,有

$$[\bar{\tau}f+\bar{\lambda}g](\tilde{x})-[\bar{\tau}f+\bar{\lambda}g](\bar{y})-z\eta(\tilde{x},\bar{y})\geqslant 0 \tag{9}$$

而 $-g(\tilde{x})\in Q,\bar{\lambda}\in Q^+,\lambda g(\bar{y})\geqslant 0$ 故

$$\bar{\lambda}g(\tilde{x})-\bar{\lambda}g(\bar{y})\leqslant 0 \tag{10}$$

综合(8)~(10)式,可得 $-z\eta(\tilde{x},\bar{y})>0,\forall z\in\partial(\bar{\tau}f)(\bar{y})+\partial(\bar{\lambda}g)(\bar{y})$,这与(1)式矛盾。故 $\bar{y}$ 是问题(VP)的弱有效解。　证毕

3 结束语

本文在 Clarke 广义次微分条件下,利用锥广义不变凸性,建立了带锥约束的非光滑锥广义不变凸多目标规划问题的混合型对偶模型弱对偶、强对偶和逆对偶三种对偶性结果。本文的结果是对文献[6]中结果的丰富与完善。

参考文献:

[1] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions [J]. J Math Anal Appl, 1981, 80: 545-550.

[2] Craven B D. Invex functions and constrained local minima [J]. Bull Aust Math Soc, 1981, 24: 357-366.

[3] Craven B D, Glover B M. Invex functions and duality [J]. J Austral Math Soc (Series A), 1985, 39: 1-20.

[4] Khurana S. Symmetric Duality in multiobjective programming involving generalized cone-invex functions [J]. Eur J Oper Res, 2005, 165: 592-597.

[5] Reiland T W. Generalized invexity for nonsmooth vector valued mapping [J]. Numerical Functional Analysis and Optimalization, 1989, 10: 1191-1202.

[6] Sunjia S K, Khurana S V. Generalized nonsmooth invexity over cones in vector optimalization [J]. Eur J Oper Res, 2008, 186: 28-40.

[7] Clarke F H. Optimization Nonsmooth Analysis [M]. New York: John Wiely, 1983.

[8] 杨新民. 关于非线性规划的逆对偶性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学学报), 2003, 20(4): 1-4.

[9] 赵克全,罗杰,唐莉萍. 一类非光滑规划问题的 Mond Weir 和 Wolf 对偶[J]. 重庆师范大学学报(自然科学学报), 2010, 27(1): 1-5.

[10] 王荣波,张庆祥,冯强. 一类非光滑多目标无限规划的最优性条件[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2008, 30(3): 1-5.

Operations Research and Cybernetics

Mixed Dual for a Class of Non-smooth Programming Problems

TANG Li-ping, ZHAO Ke-quan

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In recent years, nonsmooth analysis becomes one of the research topics. Dual problem plays an important role in programming problem, especially in nonsmooth programming problem over cones. In this paper, we focus on the mixed dual model for nonsmooth multi-objective programming with respect to cones constraints. Three dual theorems for this programming problem are given, which are weak dual theorem, strong dual theorem and converse dual theorem. Firstly, two weak dual theorems under K-generalization invexity and K-generalization pseudoinvexity are proved; then, one strong dual theorem is given under generalized Slater constraint qualification and nonsmooth cone-invexity; finally, converse theorem is proved under K-nonsmooth invexity and pseudoinvexity.

Key words: K-generalized invexity; mixed duality; nonsmooth cone constrainted programming

(责任编辑 黄 颖)