2010 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2010
第 27 卷 第 5 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 27 No. 5
DOI :10.3969/J. ISSN. 1672-6693.2010.05.010

二维 Extended Fisher-Kolmogorov 方程解的存在唯一性*

马 丽 蓉
(四川民族学院 数学系,四川 康定 626001)

摘要:方程解的存在唯一性是研究方程解的性态和分析解的性质的前提和基础。本文首先利用 Galerkin 截断方法将二维 Extended Fisher-Kolmogorov(EFK)方程化为常微分方程组,证明了常微分方程初值问题解的存在唯一性,随后根据截断解在相应泛函空间的能量估计,得到了截断解的收敛性,证明了弱解的存在性;最后证明了在 f 关于 u 满足 Lipschitz 条件下二维 Extended Fisher-Kolmogorov 方程弱解的唯一性。

关键词:Extended Fisher-Kolmogorov 方程;弱解;Galerkin 方法;存在;唯一
中图分类号:O175.26 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2010)05-0042-04

本文考虑如下 Extended Fisher-Kolmogorov 方程的初边值问题

$$u_t + \gamma\Delta^2 u - \Delta u + f(u) = 0,(x,t) \in \Omega \times (0,T] \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0,x \in \Omega \tag{2}$$

$$u = 0,\Delta u = 0,(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] \tag{3}$$

其中 $T > 0$,Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界集,边界为 $\partial\Omega$。

当 $\gamma = 0$ 时,方程(1)式对应 Fisher 和 Kolmogorov 在 1937 年提出的 Fisher-Kolmogorov 方程,用来描述生物的扩散与适应间的相互作用。Coullet[1] 和 Dee[2] 发现了模型中的一些缺陷,添加了四阶导数项,得到了 EFK 方程(1)式。

EFK 方程已经有了广泛的应用,如双稳态系统的图式形成[1-2],总体遗传学[3],液晶中畴壁的传播问题[4],反应扩散系统中的行波[5] 等等,所以备受关注。一维形式的初边值问题和周期边值问题已经有一系列的成果[6-10]。本文主要考虑方程(1)式的二维形式,定义了 Extended Fisher-Kolmogorov 方程的弱解,进行了 Galerkin 截断,将原方程转化为一个常微分方程组,证明了截断解在适当空间的收敛性,最后得到了弱解的存在唯一性。

1 预备知识

$L^2(\Omega)$ 表示在 Ω 上 L^2 可积函数空间,范数为 $\|\cdot\|$,内积为$(\cdot,\cdot)$;$H^k(\Omega)$,$k = 1,2,\cdots$,表示在 Ω 上 Sobolev 空间,$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}$,$H^{-m}(\Omega)$ 表示 $H_0^m(\Omega)$ 的对偶空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $H^{-m}(\Omega)$ 与 $H_0^m(\Omega)$ 的对偶积。设 H 是 Hilbert 空间,I 是 $\mathbf{R}$ 的一个子空间,$L^2(I;H)$ 是定义在 I 上 L^2 可积的 H 函数空间,范数用 $\|\cdot\|_{L^2(I;H)}$ 表示;$C(I;H)$ 和 $C^m(I;H)$,$m = 1,2,3,\cdots$,分别表示连续的 H 函数空间和 m 阶导数连续的 H 函数空间。为了方便,用 $C,C_1,C_2,\cdots$ 表示依赖于 γ,Ω,T 的任意常数。

定义 如果函数 $u \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$,$u' \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$ 且满足以下两个条件

1) $$\langle u',v\rangle + (\gamma\Delta u,\Delta v) + (\nabla u,\nabla v) + (f,v) = 0 \tag{4}$$

对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 几乎处处成立,其中 $v \in H_0^2(\Omega)$;

2) $$u(0) = \phi(x) \tag{5}$$

则称 $u(x,t)$ 是方程(1)~(3)式的弱解。

* 收稿日期:2010-07-05 修回日期:2010-08-24
资助项目:四川民族学院资助项目(No.2009[8])
作者简介:马丽蓉,女,讲师,硕士,研究方向为数学分析。

2 解的存在唯一性

取光滑函数 $w_k = w_k(x)(k = 1,2,\cdots)$ 是 $H_0^2(\Omega)$ 的正交基，同时也是 $H_0^1(\Omega)$，$L^2(\Omega)$ 的正交基。

固定正整数 m，可以找到如下形式的函数 $u_m:[0,T]\to H_0^2(\Omega)$：

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k \tag{6}$$

可以选取适当的系数 $d_m^k(t)(0\leqslant t\leqslant T, k = 1,2,\cdots,m)$ 满足

$$d_m^k(0) = (\phi, w_k) \tag{7}$$

$$(u'_m, w_k) + (\gamma\Delta^2 u_m - \Delta u_m, w_k) + (f(u_m), w_k) = 0 \tag{8}$$

定理 1　设 $f\in L^2(\Omega_T)$，$\phi\in L^2(\Omega)$，则对任意正整数 m，满足(7)，(8)式的局部形式解(6)式存在唯一。

证明　设 $u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k$，由 w_k 是正交基可以得到 $(u'_m, w_k) = (d_m^k)'(t)$，且

$$(\gamma\Delta^2 u_m - \Delta u_m, w_k) = (\gamma\Delta^2(\sum_{l=1}^{m} d_m^l(t) w_l) - \Delta(\sum_{l=1}^{m} d_m^l(t) w_l), w_k) = \sum_{l=1}^{m} d_m^l(t)(\gamma\Delta^2 w_l - \Delta w_l, w_k) =$$

$$\sum_{l=1}^{m} d_m^l(t)[\gamma\Delta w_l, w_k) + (\nabla w_l, \nabla w_k)] = \sum_{l=1}^{m} d_m^l(t) e^{kl}$$

其中 $e^{kl} = (\gamma\Delta^2 w_l, \Delta w_k) + (\nabla w_l, \nabla w_k)(k = 1,2,\cdots,m)$，再设 $f^k(t) = (f, w_k)(k = 1,2,\cdots,m)$，那么(8)式变成了满足初值条件(7)式的常微分方程组

$$(d_m^k)'(t) + \sum_{l=1}^{m} e^{kl} d_m^l(t) + f^k(t) = 0 \tag{9}$$

由常微分方程组 Picard 存在唯一性定理，在 $[0,\tau]$ 上存在唯一解 $(d_m^1(t), d_m^2(t),\cdots,d_m^m(t))$ 几乎处处满足(7)，(9)式。即在 $[0,\tau]$ 上存在唯一解 u_m 几乎处处满足(7)，(8)式。　证毕

定理 2　设 $f\in L^2(\Omega_T)$，$\phi\in L^2(\Omega)$，则存在依赖于 Ω, T, γ 的常数 C，对任意正整数 m 满足

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_m(t)\| + \|u_m(t)\|_{L^2(0,T;H_0^2(\Omega))} + \|u'_m(t)\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leqslant C(\|f\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\phi\|_{L^2(\Omega)}) \tag{10}$$

证明　在(8)式两边乘以 $d_m^k(t)$，从 1 到 m 相加，得

$$(u'_m + \gamma\Delta^2 u_m - \Delta u_m, u_m) + (f(u_m), u_m) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|^2 + \gamma\|\Delta u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 \leqslant |(f, u_m)| < \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|^2 + 2\gamma\|\Delta u_m\|^2 + 2\|\nabla u_m\|^2 \leqslant |(f, u_m)| < \|f\|^2 + \|u_m\|^2 \tag{12}$$

由 Gronwall 不等式，得　$\|u_m\|^2 \leqslant e^t(\|u_m(0)\|^2 + \int_0^t \|f(s)\|^2 \mathrm{d}s) \leqslant C(\|f(t)\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\phi\|^2)$

故

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_m(t)\|^2 \leqslant C(\|f\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\phi\|^2) \tag{13}$$

在 $[0,T]$ 上积分(12)式，可以得到

$$\int_0^T 2\gamma\|\Delta u_m\|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^T (\|f(t)\|^2 + \|u_m\|^2)\mathrm{d}t + \|\phi\|^2 \leqslant$$

$$\int_0^T \|f(t)\|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T \|u_m\|^2 \mathrm{d}t + \|\phi\|^2 \leqslant \int_0^T \|f(t)\|^2 \mathrm{d}t +$$

$$\int_0^T C(\|\phi\|^2 + \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega_T)})\mathrm{d}t + \|\phi\|^2 \leqslant C(\|\phi\|^2 + \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega_T)})$$

即

$$\|u_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^2)} \leqslant C(\|\phi\|^2 + \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega_T)}) \tag{14}$$

任意 $v\in H_0^2(\Omega)$，且 $\|v\|_{H_0^2(\Omega)}\leqslant 1$，记 $v = v^1 + v^2$，$v^1\in Span\{\omega_k\}_{k=1}^m$，$(v^2, \omega_k) = 0(k = 1,2,\cdots,m)$。因为 $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ 是 $H_0^2(\Omega)$ 的正交基，所以 $\|v^1\|_{H_0^2(\Omega)} \leqslant \|v\|_{H_0^2(\Omega)} \leqslant 1$。那么对 $0\leqslant t\leqslant T$ 几乎处处成立 (u'_m, v^1) +

$(\gamma\Delta^2 u_m - \Delta u_m, v^1) + (f(u_m), v^1) = 0$,所以

$$\langle u'_m, v^1\rangle = (u'_m, v^1) = -(\gamma\Delta^2 u_m - \Delta u_m, v^1) - (f(u_m), v^1)$$

$$|\langle u'_m, v^1\rangle| \leqslant |(\gamma\Delta^2 u_m - \Delta u_m, v^1)| + |(f(u_m), v^1)|$$

$$|\langle u'_m, v^1\rangle| \leqslant |(\gamma\Delta^2 u_m, v^1)| + |\Delta u_m, v^1| + |(f(u_m), v^1)| \leqslant$$

$$|(\gamma\Delta u_m, \Delta v^1)| + |(\nabla u_m, \nabla v^1)| + |(f(u_m), v^1)| \leqslant$$

$$\gamma \|\Delta u_m\| \cdot \|\Delta v^1\| + \|\nabla u_m\| \cdot \|\nabla v^1\| + \|f\| \cdot \|v^1\| \leqslant$$

$$C(\|\Delta u_m\| + \|\nabla u_m\| + \|f\|)\|v^1\|_{H_0^2} \leqslant C(\|u_m\|_{H_0^2} + \|f\|)\|v^1\|_{H_0^2} \|u'_m\|_{H^{-2}(\Omega)} \leqslant C(\|u_m\|_{H_0^2} + \|f\|)$$

因此 $$\|u'_m\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} = \int_0^T \|u'_m\|^2_{H^{-2}}\mathrm{d}t \leqslant C\int_0^T \|u_m\|_{H_0^2} + \|f\|\,\mathrm{d}t \leqslant C(\|\phi\|^2 + \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega_t)}) \tag{15}$$

由(13),(14)和(15)式可以得出

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_m(t)\| + \|u_m(t)\|_{L^2(0,T;H_0^2(\Omega))} + \|u'_m(t)\|_{L^2(0,T;H_0^{-2}(\Omega))} \leqslant C(\|f\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\phi\|_{L^2(\Omega)})$$ 证毕

该定理给出了相应的能量估计,同时可以将 u_m 从 $[0,\tau]$ 对(7),(8)式几乎处处成立延拓到 $[0,T]$ 对(7),(8)式几乎处处成立。

定理 3 设 $f \in L^2(\Omega_T)$,且对 u 满足 Lipschitz 条件,$\phi \in L^2(\Omega)$,则方程(1)~(3)式存在唯一弱解。

证明 根据定理 2,序列 $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ 有界,且 $\{u'_m\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$ 有界。因此存在子序列 $\{u_{m_l}\}_{l=1}^{\infty} \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ 和函数 $u \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ 且 $u' \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$,使得 $u_{m_l} \to u$ 在 $L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ 弱收敛,$u'_{m_l} \to u'$ 在 $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$ 弱收敛。

固定正整数 N,选具有下列形式的函数 $v \in C^1([0,T];H_0^2(\Omega))$

$$v(t) = \sum_{k=1}^{N} d^k(t)\omega_k \tag{16}$$

其中 $\{d^k\}_{k=1}^{N}(t)$ 是任意给定的光滑函数,设 $N \leqslant m$,用 $d^k(t)$ 乘以(8)式,从 1 到 N 相加,在 $[0,\tau]$ 上积分,得

$$\int_0^\tau (u'_m, v) + (\gamma\Delta^2 u_m - \Delta u_m, v) + (f, v)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_0^\tau (u'_m, v) + (\gamma\Delta u_m, \Delta v) + (\nabla u_m, \nabla v) + (f, v)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{17}$$

设 $m = m_l$,令 $l \to \infty$,则有 $$\int_0^\tau (u', v) + (\gamma\Delta u, \Delta v) + (\nabla u, \nabla v) + (f, v)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{18}$$

上式对 $v \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ 成立,因为 $C^1([0,T];H_0^2(\Omega))$ 在 $L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ 稠密。根据 τ 的任意性,可以得到对任意 $v \in H_0^2(\Omega)$ 及 $0 \leqslant t \leqslant T$ 几乎处处成立。

接下来证明 $u(0) = \phi$,任用 $v \in C^1([0,\tau];H_0^2(\Omega))$,且 $v(\tau) = 0$,利用 Green 公式,(18)式变为

$$\int_0^\tau (u, v') + (\gamma\Delta u, \Delta v) + (\nabla u, \nabla v) + (f, v)\,\mathrm{d}t = (u(0), v(0))$$

同理,(17)式变为 $$\int_0^\tau (u_m, v') + (\gamma\Delta u_m, \Delta v) + (\nabla u_m, \nabla v) + (f, v)\,\mathrm{d}t = (u_m(0), v(0))$$

设 $m = m_l$,令 $l \to \infty$,得到 $$\int_0^\tau (u, v') + (\gamma\Delta u, \Delta v) + (\nabla u, \nabla v) + (f, v)\,\mathrm{d}t = (\phi, v(0))$$

根据 $v(0)$ 的任意性,可以得到 $u(0) = \phi$。

故 u 是方程(1)~(3)式的弱解。

下证唯一性。设 u_1, u_2 是方程(1)~(3)式的弱解,则有

$$(u'_1, v) + (\gamma\Delta u_1, \Delta v) + (\nabla u_1, \nabla v) + (f(u_1), v) = 0 \tag{19}$$

$$(u'_2, v) + (\gamma\Delta u_2, \Delta v) + (\nabla u_2, \nabla v) + (f(u_2), v) = 0 \tag{20}$$

两式相减,令 $\omega = u_1 - u_2$,则 $\omega(0) = 0$,有

$$(\omega, v) + (\gamma\Delta\omega, \Delta v) + (\nabla\omega, \nabla v) + (f(u_1) - f(u_2), v) = 0$$

取 $v = \omega$,由 f 对 u 满足 Lipschitz 条件,上式变为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\omega\|^2+\gamma\|\Delta\omega\|^2+\|\nabla\omega\|^2\leqslant|f(u_1)-f(u_2),\omega|\leqslant C\|\omega\|^2,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\omega\|^2\leqslant C\|\omega\|^2$$

由 Gronwall 不等式，易得 $\|\omega(t)\|^2\leqslant e^{C_t}\|\omega(0)\|^2=0$，即 $u_1=u_2$。

因此，方程(1)～(3)式的弱解是唯一的。 证毕

参考文献：

[1] Coullet P, Elphick C, Repaux D. Nature of spatial chaos [J]. Phys Rev Lett, 1987, 58: 431-434.

[2] Dee G T, Saarloos W V. Bistable systems with propagating fronts leading to pattern formation [J]. Phys Rev Lett, 1988, 60: 2641-2644.

[3] Aronson D G, Weinberger H F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics [J]. Adv Math, 1978, 30: 33-67.

[4] Zhu G. Experiments on director waves in nematic liquid crystals [J]. Phys Rev Lett, 1982, 49: 1332-1335.

[5] Ahlers G, Cannell D S. Vortex-front propagation in rotating couette-Taylor flow [J]. Phys Rev Lett, 1983, 50: 1583-1586.

[6] Peletier L A, Troy W C. Stationary solutions of a fourthorder nonlinear diffusion equation [J]. Diff Equ, 1995, 31: 327-337.

[7] Peletier L A, Troy W C. Chaotic spatial patterns described by the EFK equation [J]. J D E, 1996, 129: 458-508.

[8] 魏晋滢. Extended Fisher-Kolmogorov 方程解的存在性，正则性及渐近性[D]. 兰州：西北师范大学，2007.

[9] 丁保岭，李成岳，李学锋. 关于 Extended Fisher-Kolmogorov 方程和 Swift-Hohenberg 方程同宿轨道解的一个注记[J]. 中央民族大学学报(自然科学版)，2009，18(3)：42-46.

[10] LI Cheng-yue. Remarks on homoclinic solutions for semilinear fourth-order ordinary differential equations without periodicity [J]. Appl Math J Chinese Univ, 2009, 24(1): 49-55.

Existence and Uniqueness of Solution for Two Dimensional Extended Fisher-Kolmogorov Equation

MA Li-rong

(Dept. of Mathematics, Sichuan University for Nationalities, Kangding Sichuan 626001, China)

Abstract: Existence and uniqueness of solutions for equations is preliminary and foundation to study the behavior and property of solutions. The Extended Fisher- Kolmogorov (EFK) equation plays an important role in the study of pattern formation in bi-stable systems, general genetics, the spread of liquid in the domain wall and traveling wave of reaction-diffusion system. In this paper, two-dimensional Extended Fisher-Kolmogorov (EFK) equation can be renormalized into ordinary differential equations by using Galerkin truncated method, and the existence and uniqueness of solutions for initial value problem of ordinary differential equations is proved. According to energy estimates of truncated solution in corresponding functional space, the convergence of truncated solution in corresponding functional space is given and the existence of weak solutions for two-dimensional Extended Fisher-Kolmogorov (EFK) equation is proved. Lastly, uniqueness for the weak solutions of two dimensional Extended Fisher-Kolmogorov (EFK) equation is derived in the condition that $f(u)$ satisfies the Lipschitz conditions with respect to u.

Key words: Extended Fisher-Kolmogorov equation; weak solution; Galerkin method; existence; uniqueness

(责任编辑　黄　颖)