四阶抛物型方程子域精细积分紧致差分格式*

刘利斌，刘焕文，余锦鸿
(广西民族大学 数学与计算机学院，南宁 530006)

摘　要：首先给出了四阶导数的紧致差分公式，然后应用子域精细积分的方法，本文构造出了一个求解四阶抛物型方程周期初值问题的含参数 $\alpha(0<\alpha<<\Delta t)$ 的紧致格式，所得到的差分格式为五点、两层的隐格式。Fourier 分析方法表明该格式为无条件稳定，其局部截断误差为 $O(\alpha(\Delta t)^2+\alpha^2(\Delta t)^3+(\Delta x)^4)$，其中 Δt，Δx 分别为时间步长和空间步长，误差分析和数值实验均表明，本文构造的格式比经典的 Crank-Nicholson 格式和 Saul'ev 构造的格式精度要高阶 $10^{-3}\sim10^{-4}$。从精度及稳定性方面考虑，本文构造的格式也较好，因此，本文的差分格式是有效的，具有很好的实用性。

关键词：四阶抛物型方程；子域精细积分；高精度

中图分类号：O241.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2008)03-0024-04

本文考虑如下四阶抛物型方程周期初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0,-\infty<x<+\infty,0\leqslant t\leqslant T\\&u(x+L,t)=u(x,t),-\infty<x<+\infty,0\leqslant t\leqslant T\\&u(x,0)=f(x),-\infty<x<+\infty\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

近几年来，对高阶抛物型方程和方程组的研究不断增多。Saul' ev 在文献[1]提出了一类含权因子 α 的两层差分格式，当 $\alpha=0$ 时为显式格式，其稳定性条件为 $|r|<\frac{1}{2^{2m-1}}$；文献[2]构造了一族三层(特殊情况下为两层)、含双参数、绝对稳定、高精度、五对角线型的隐式差分格式，其局部截断误差为

$$O((\Delta t)^2+(\Delta x)^6)$$

Δt，Δx 分别为时间及空间步长；随后，文献[3]构造了若干高稳定性的两层显式差分格式和无条件稳定的两层半显式格式及三层格式，但这些格式的精度都很低，其局部截断误差阶仅为 $O((\Delta t)+(\Delta x)^2)$ 或 $O((\Delta t)^2+(\Delta x)^2)$；文献[4]构造了若干恒稳定的隐式差分格式，但是其精度太低，截断误差阶最高 $O\left[(\Delta t)^2+(\Delta x)^2+\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right]$，文献[5]格式的局部截断误差阶分别为

$$O((\Delta t)^2+(\Delta x)^6)$$

及

$$O((\Delta t)^2+(\Delta t)(\Delta x)^2+(\Delta x)^6)$$

其中显式差分格式的稳定性条件为 $|r|<\frac{1}{2^{2m-1}}$。

钟万勰于 1995 年提出子域精细积分方法[6-8]来求解偏微分方程，随后，赖永星[9-10]等提出了多点子域积分的方法。本文主要针对四阶抛物型方程(1)的周期初值问题，将构造出一个两层的恒稳定的紧致 Crank-Nicholson 差分格式，其截断误差阶为 $O(\alpha(\Delta t)^2+\alpha^2(\Delta t)^3+(\Delta x)^4)$。该格式的系数矩阵为严格对角占优的矩阵，可用平方根法[11]求解。数值实验表明，本文所提出的格式是有效的，具有高精度的，理论分析与实际计算相吻合。

1 子域精细积分紧致 Crank-Nicolson 差分格式

1.1 紧致差分公式的推导[12]

设 Δt 为时间步长，$\Delta x=L/M$ 为空间步长，u_j^n 表示在节点 $(j\Delta x,n\Delta t)$ 处的网函数值，方程(1)的解函数为 $u(x,t)$，记 $u(j\Delta x,n\Delta t)=u(j,n)$。

引入记号　$D_x=\frac{\partial}{\partial x}$，$T_x^{\pm S}u(j,n)=u(j\pm s,n)$

$$\delta_x u(j,n)=u(j+\frac{1}{2},n)-u(j-\frac{1}{2},n)$$

* 收稿日期：2007-05-10　　修改日期：2007-11-19
资助项目：广西自然科学基金(No. 0575029；No. 0639008)；广西研究生教育创新计划(No. 2006106080701M10)；广西民族大学研究生教育创新基金(No. GXUN-CHX0756)
作者简介：刘利斌(1982-)，男，硕士研究生，研究方向为偏微分方程数值解。

其中 D_x,T_x 与 δ_x 依次为关于 x 的一阶偏微分算子,位移算子与一阶中心差分算子,下面建立中心差分算子 δ_x 和微分算子 D_x 的关系式。由 Taylor 展开,可得

$$T_x u(j,n) = u(j+1,n) = u(j,n) + \Delta x \frac{\partial u(j,n)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 u(j,n)}{\partial x^2} + \cdots = (1 + \Delta x D_x + \frac{\Delta x^2}{2!}D_x^2 + \cdots)u(j,n) = \exp(\Delta x D_x)u(j,n)$$

于是 $$T_x = \exp(\Delta x D_x)$$

又因为 $$\delta_x = T_x^{\frac{1}{2}} - T_x^{-\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2}\Delta x D_x) - \exp(-\frac{1}{2}\Delta x D_x) = 2sh(\frac{1}{2}\Delta x D_x)$$

可得 $$D_x = 2\frac{1}{\Delta x}sh^{-1}(\frac{\delta_x}{2}) = \frac{1}{\Delta x}(\delta_x - \frac{1^2}{2^2 \times 3!}\delta_x^3 + \frac{1^2 \times 3^2}{2^4 \times 5!}\delta_x^5 + \cdots)$$

$$D_x^2 = \frac{1}{\Delta x^2}(\delta_x^2 - \frac{1}{12}\delta_x^4 + \frac{1}{90}\delta_x^6 + \cdots) \qquad (2)$$

$$D_x^4 = \frac{1}{\Delta x^4}(\delta_x^4 - \frac{1}{6}\delta_x^6 + \frac{7}{240}\delta_x^8 + \cdots) \qquad (3)$$

用 $\frac{1}{\Delta x^4}\delta_x^4\left(1 + \frac{1}{6}\delta_x^2\right)^{-1}$ 代替(3)式前两项,于是可得到如下紧致差分公式

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{1}{(\Delta x)^4}\frac{\delta_x^4}{1 + \frac{1}{6}\delta_x^2}u + O(\Delta x^4) \qquad (4)$$

1.2 子域精细积分紧致 Crank-Nicholson 差分格式的构造

令 $p = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$,首先引入一个附加项 αu_i(这里 $\alpha > 0$ 是参数),加到方程(1)第一式的两端,得

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} + \alpha u_i = q \qquad (5)$$

其中 $q = p + \alpha u_i$。如果令 q 为某一个常数,则利用常数变易法可解得方程(5)的通解

$$u_i(t) = C\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{q}{\alpha} \qquad (6)$$

其中 C 是任意常数。由条件 $u_i(t_n) = u_i^n$,确定该常数 C,并将 $t = t_{n+1}$ 代入(6)式,经整理可得如下方程

$$u_i^{n+1} = bu_i^n + \frac{1-b}{\alpha}q, b = \mathrm{e}^{-\alpha t} \in (0,1) \qquad (7)$$

考虑方程(1)在 $n+1$ 时刻的值,由(4)式可取

$$q = -\frac{1}{(\Delta x)^4}\frac{\delta_x^4}{1 + \frac{1}{6}\delta_x^2}(u_i^{n+1} + u_i^n) + \alpha u_i^{n+1} \qquad (8)$$

其中 $\delta_x^4 u_i = u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}$。

将 q 代入(7)式,经整理得

$$\gamma u_{i-2}^{n+1} + \left(\frac{1}{6} - 4\gamma\right)u_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{2}{3} + 6\gamma\right)u_i^{n+1} + \left(\frac{1}{6} - 4\gamma\right)u_{i+1}^{n+1} + \gamma u_{i+2}^{n+1} = -\gamma u_{i-2}^n + \left(\frac{1}{6} + 4\gamma\right)u_{i-1}^n + \left(\frac{2}{3} - 6\gamma\right)u_i^n + \left(\frac{1}{6} + 4\gamma\right)u_{i+1}^n - \gamma u_{i+2}^n \qquad (9)$$

其中 $\gamma = \frac{1-b}{2\alpha b(\Delta x)^4} > 0, i = 0,1,2,\cdots,M-1$。

根据周期边界条件,上式可写成

其中 $$AU = f$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}+6r & \frac{1}{6}-4r & r & \cdots & & & r & \frac{1}{6}-4r \\ \frac{1}{6}-4r & \frac{2}{3}+6r & \frac{1}{6}-4r & r & & & & r \\ r & \frac{1}{6}-4r & \frac{2}{3}+6r & \frac{1}{6}-4r & r & & & \\ \square & & & & & & & \square \\ r & & & & r & \frac{1}{6}-4r & \frac{2}{3}+6r & \frac{1}{6}-4r \\ \frac{1}{6}-4r & r & & \cdots & & r & \frac{1}{6}-4r & \frac{2}{3}+6r \end{bmatrix}$$

$$
B=\begin{bmatrix}
\frac{2}{3}-6r & \frac{1}{6}+4r & -r & \cdots & & & & -r & \frac{1}{6}+4r \\
\frac{1}{6}+4r & \frac{2}{3}-6r & \frac{1}{6}+4r & -r & & & & & -r \\
-r & \frac{1}{6}+4r & \frac{2}{3}-6r & \frac{1}{6}+4r & -r & & & & \\
\square & & & & & & & & \square \\
-r & & & & & -r & \frac{1}{6}+4r & \frac{2}{3}-6r & \frac{1}{6}+4r \\
\frac{1}{6}+4r & -r & & \cdots & & & -r & \frac{1}{6}+4r & \frac{2}{3}-6r
\end{bmatrix}
$$

$U=(u_0^{n+1},u_1^{n+1},\cdots,u_{M-1}^{n+1})^{\mathrm{T}}$，$e=(f_0^n,f_1^n,\cdots,f_{M-1}^n)^{\mathrm{T}}$，$f_i^n=u_i^n$，$f=Be$，$i=0,1,2,\cdots,M-1$。

虽然本文格式（9）为隐式格式，但是其系数矩阵是严格对角占优的，很容易用平方根法[8]求解。

根据稳定性分析的 Fourier 方法对格式（9）进行稳定性分析，令 $u_j^n=\lambda^n e^{ij\theta}$，将上式代入（9）式经计算整理得增长因子

$$\lambda=\frac{\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{2}{3}-4\gamma(1-\cos\theta)^2}{\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{2}{3}+4\gamma(1-\cos\theta)^2}$$

很显然 $|\lambda|\leqslant 1$ 恒成立，所以隐格式（9）对任意参数 $\alpha>0$ 是无条件稳定的。

此外，利用 Taylor 展开式容易求得格式（9）的在结点 (x_j,t_n) 处的局部截断误差为

$$O(\alpha(\Delta t)^2+\alpha^2(\Delta t)^3+(\Delta x)^4)$$

2 数值例子

考虑如下四阶抛物型方程周期初值问题

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0,\ -\infty<x<+\infty,0\leqslant t\leqslant T\\
&u(x+2\pi,t)=u(x,t),\ -\infty<x<+\infty,0\leqslant t\leqslant T\\
&u(x,0)=\sin(x),\ -\infty<x<+\infty
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

其精确解为

$$u(x,t)=e^{-t}\sin x$$

取 $\Delta x=\frac{\pi}{32}$，$r=\frac{1}{2},1,2$，$\Delta t=r(\Delta x)^4$，利用本文格式（9）计算到 $n=500$，并与同类差分格式进行比较，其结果如表 1 和表 2。

表 1　本文格式（9）与 Crank-Nicholson 格式、文献[1]格式的误差比较（$n=500$）

格式	r	x: $5\pi/32$	$22\pi/32$	$39\pi/32$	$56\pi/32$
格式(9)	1/2	0.856E-9	4.129E-9	2.577E-9	3.152E-9
	1	1.437E-9	8.154E-9	5.129E-9	5.637E-9
	2	0.441E-8	2.932E-8	1.889E-8	1.821E-8
Crank-Nicholson 格式	1/2	1.023E-5	3.046E-5	2.311E-5	2.134E-5
	1	1.733E-5	6.012E-5	4.582E-5	3.757E-5
	2	2.828E-5	1.145E-4	8.856E-5	6.326E-5
文献[1]格式	1/2	1.717E-5	3.029E-5	2.311E-5	2.578E-5
	2	6.406E-5	1.130E-4	8.621E-5	9.610E-5

表 2　本文格式（9）和文献[5]格式的误差比较（$n=500$）

格式	r	η,x	$5\pi/32$	$22\pi/32$	$39\pi/32$	$56\pi/32$
文献[5]格式	1/8	-6	2.005E-7	7.689E-7	9.718E-7	4.508E-7
格式(9)		-3	5.605E+3	1.833E+4	1.785+4	7.002+3

3 结果与讨论

1）从以上分析可知，文献[1]格式和文献[5]中的三层显示格式的局部截断误差分别为

$$O((\Delta t)^2+(\Delta x)^2)$$

和

$$O((\Delta t)^2+(\Delta t)(\Delta x)^2+(\Delta x)^6)$$

而本文格式（9）的局部截断误差为

$$O(\alpha(\Delta t)^2+\alpha^2(\Delta t)^3+(\Delta x)^4)$$

显然，本文格式（9）的精度比文献[1]格式高，表 1 中的数值结果也验证了此结论，从表 2 看出，文献[5]的格式（$r=1/8$）的精度比本文格式（9）（$r=2$）的精度还要低。

2）从表 1 中的结果可以得出，本文所构造的格式（9）比经典的 Crank-Nicolson 格式和文献[1]格式精度要高 $10^{-3}\sim10^{-4}$ 阶，数值结果与理论相符合。

3)文献[5] 中的格式是含有多个参数的三层隐格式,在计算实际问题时,必须用其他方法计算出第二层上的函数值,不利于实际问题的计算,且文献[5] 中的三层显式格式稳定的充分条件是

$$\left.\begin{aligned} &|r| < \frac{1}{2^{2m-1}} \\ &\eta < \min\left(0,\frac{\frac{1}{2}H_{2m}^{*} - r\cdot 4^{m-1}}{1-2r\cdot 4^{m-1}}\right) \\ &H_{2m}^{*} = \min(0,H_{2m}(1)) = \begin{cases}0, m\leqslant 8\\ H_{2m}(1), m>9\end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

显然,从(11) 式可看出,文献[5] 中的三层显示格式的稳定性要求太严格,从表 2 知,当 $r = 1/8$,$\eta = -3$ 时,文献[5] 中的三层格式就不稳定。而本文的格式具有很高的数值精度,且格式为无条件稳定的两层隐格式,其系数矩阵为严格对角占优矩阵,可用平方根法进行求解。可见,本文的格式具有很高的实用价值。

参考文献:

[1] 萨乌里耶夫 B K. 抛物型方程的网格积分法[M]. 袁兆鼎译. 北京:科学出版社,1963. 143-152.

[2] 林鹏程. 解四阶抛物型方程的绝对稳定高精度差分格式[J]. 厦门大学学报(自然科学版),1994,33(6):756-759.

[3] 曾文平. 高阶抛物型方程的具有高稳定性的显示和半显示差分格式[J]. 应用数学学报,1996,19(4):631-634.

[4] 金相华,曾文平. 解四阶抛物型方程的若干新的差分格式[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2006,27(3):238-240.

[5] 曾文平. 解高阶抛物型方程的高精度显示差分格式[J]. 高等学校计算数学学报,2003,25(2):167-174.

[6] 钟万勰. 子域精细积分及偏微分方程数值解[J]. 计算结构力学及其应用,1995,12(3):253-260.

[7] 钟万勰. 单点子域积分与差分[J]. 力学学报,1996,28(2):159-163.

[8] 钟万勰. 对差分法时程积分的反思[J]. 应用数学与力学,1995,16(8):663-668.

[9] 赖永星,刘敏珊,董其伍. 多点子域积分及计算格式的研究[J]. 机械强度,2006,28(6):853-856.

[10] 赖永星,刘敏珊,董其伍. 单点子域积分与多点子域积分[J]. 计算力学学报,2006,23(3):373-376.

[11] 易大义,陈道琦. 数值分析引论[M]. 杭州:浙江大学出版社,1996. 251-252.

[12] 张文生. 科学计算中的偏微分方程有限差分法[M]. 北京:高等教育出版社,2006. 46-48.

Compact Crank-Nicolson Scheme for Solving Four Order Parabolic Equation Based on Sub-domain Precise Integration

LIU Li-bin, *LIU Huan-wen*

(College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China)

Abstract: Recently Zeng Wen-ping has proposed a factor to be determined, in other words, using a difference equation contained a number of parameters in approximation to the differential equation. These parameters of the equation can be obtained by error analysis. Zeng Wen-ping got many high accuracy difference schemes, however, some of them are three level and conditionally stable difference scheme. It is hard to construct a unconditionally stable and high precision scheme. The classic Crank-Nicholson scheme is unconditionally stable, but its accuracy is too low. At the same time, the Sub-domain Precise Integration method was first introduced by Zhong Wan-xie for solving the partial differential equation in 1995. Later, many scholars utilized the Sub-domain Precise Integration to solve the convection equation and convection-diffusion equation. They obtained a lot of unconditionally stable difference schemes. Very recently parabolic equation is constructed based on the Sub-domain Precise Integration method in time direction. The difference scheme is five-point and two level implicit scheme. The coefficient matrix of this difference equation is the strict diagonally dominant, it can be solved by the square root. Stability analysis of this scheme has been carried out by Fourier. It is shown that this scheme is unconditionally stable, and the local truncation error is $O(\alpha(\Delta t)^2 + \alpha^2(\Delta t)^3 + (\Delta x)^4)$. It is shown by both error analysis and numerical examples that the accuracy of the present method is much better than the classical Crank-Nicholson method and Saul'ev method in [1], and the accuracy and stability of the present method is much better than the explicit scheme in [5]. Therefore, the difference format is effective and has a good Practicality. The numerical experiments at the end of this paper have shown that the numerical results are in agreement with the theoretical analysis.

Key words: four order parabolic equation; sub-domain precise integration; high accuracy

(责任编辑 黄 颖)